Primjer 2.7. *Kutija sadrži 12 loptica za stolni tenis od kojih su 4 žute boje, a ostale su bijele. Na slučajan način izvadimo odjednom 7 loptica. Kolika je vjerojatnost da će među njima biti:*
a) najviše jedna žuta loptica?
b) 2 žute ili 4 žute loptice?

Rješenje:

a) Ako je događaj $A = \{$od 7 loptica izvadili smo jednu ili nijednu žutu lopticu$\}$, onda je

$$P(A) = \frac{\binom{8}{7} + \binom{4}{1} \cdot \binom{8}{6}}{\binom{12}{7}} = 0.15.$$

b) Neka je događaj $B = \{$od 7 loptica izvadili smo 2 žute ili 4 žute loptice$\}$. Vjerojatnost događaja B je

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{8}{5} + \binom{4}{4} \cdot \binom{8}{3}}{\binom{12}{7}} = 0.49.$$

✓

Primjer 2.8. *Iz tvornice je došla pošiljka od 300 proizvoda. Tvornica garantira da je u pošiljci najviše 10% loših proizvoda. Slučajnim izborom kontrola je uzela 4 proizvoda. Odredite vjerojatnost da se u izabranom uzorku nađu 3 loša proizvoda.*

Rješenje:

Iz skupa od 300 proizvoda, 4 proizvoda moguće je uzeti na $\binom{300}{4}$ načina. Pošto je 10% loših proizvoda, tada ćemo od 300 proizvoda imati 30 loših i 270 dobrih. Uzorak od tri loša i jedan dobar proizvod možemo dobiti na $\binom{30}{3} \cdot \binom{270}{1}$ različitih načina. Prema tome tražena vjerojatnost je:

$$p = \frac{\binom{30}{3} \cdot \binom{270}{1}}{\binom{300}{4}} = 0.0033.$$

✓

2.3 Uvjetna i potpuna vjerojatnost

Često puta vjerojatnost nekog događaja ovisi o tome što znamo o tijeku pokusa koji se izvodi. Zamislimo neki pokus u kojem se realiziraju događaji A i B s vjerojatnostima $P(A)$ i $P(B)$.
Postavlja se pitanje kolika je vjerojatnost događaja A ako znamo da se dogodio događaj B.
Ovu vjerojatnost označavamo s $P(A|B)$ i čitamo P od A, ako je B, odnosno vjerojatnost događaja A, ako se dogodio događaj B. Preciznije, **uvjetna vjerojatnost** događaja A, ako je poznato da se ostvario događaj B takav da je $P(B) > 0$, je broj

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{2.8}$$

Uvjetna vjerojatnost događaja B, ako je poznato da se realizirao događaj A takav da je $P(A) > 0$, je broj

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Ako je Ω konačan skup i ako su svi elementarni događaji jednako vjerojatni, tada zbog $P(A \cap B) = \dfrac{k(A \cap B)}{k(\Omega)}$ i $P(B) = \dfrac{k(B)}{k(\Omega)}$ iz (2.8) slijedi:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{k(A \cap B)}{k(\Omega)}}{\frac{k(B)}{k(\Omega)}} = \frac{k(A \cap B)}{k(B)}.$$

Dakle, uvjetnu vjerojatnost događaja A uz uvjet da se dogodio događaj B dobijemo dijeljenjem broja povoljnih elementarnih događaja za događaj $A \cap B$ i broja povoljnih elementarnih događaja za događaj B.

Primjer 2.9. *Bacamo dvije kocke. Ako je umnožak brojeva koji su pali 6, kolika je vjerojatnost da je na jednoj kocki pao broj 2?*

Rješenje:

Definiramo događaje:
$A = \{\text{na jednoj kocki je pao broj } 2\}$,
$B = \{\text{pao je umnožak } 6\}$.
Tražimo: $P(A|B)$. Kako je $B = \{(1,6),(6,1),(2,3),(3,2)\}$, $k(B) = 4$, a $A \cap B = \{(2,3),(3,2)\}$, $k(A \cap B) = 2$ slijedi da je

$$P(A|B) = \frac{k(A \cap B)}{k(B)} = \frac{2}{4} = 0.5.$$

✓

Promotrimo još jedan problem vezan uz uvjetnu vjerojatnost. Neka je Ω prostor elementarnih događaja, a $A_1, A_2, ..., A_n$ njegov rastav na disjunktne skupove. Događaji $A_1, A_2, ..., A_n$ nazivaju se hipotezama i čine potpuni sistem događaja ako vrijedi sljedeće:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ za } i \neq j$$

i

$$\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Neka je događaj B definiran na istom prostoru Ω (slika 2.4). Za svaki događaj $A_k, k = 1, 2, ..., n$ uz uvjet da je $P(A_k) > 0$ vrijedi relacija

$$P(B|A_k) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(A_k)}.$$

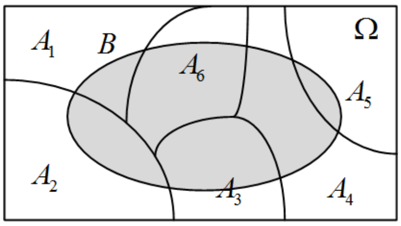
Događaj B možemo zapisati na sljedeći način (slika 2.4):

$$\begin{aligned} B &= B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\ &= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n). \end{aligned}$$

Kako se događaji $A_i \cap B, i = 1, 2, ..., n$ međusobno isključuju slijedi da je

$$\begin{aligned} P(B) &= P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Formula (2.9) naziva se **formula totalne vjerojatnosti**.



Slika 2.4.

Kako je $P(A_k|B) = \dfrac{P(A_k \cap B)}{P(B)}$, vjerojatnost hipoteze A_k ako se zna da se događaj B dogodio može se računati kao:

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}. \tag{2.10}$$

Jednakost (2.10) zove se **Bayesova**[2] **formula**.
Bayesova formula daje vjerojatnost pojedine hipoteze ako znamo da se neki događaj već dogodio.

Primjer 2.10. *Isti se artikl izrađuje u dvije tvornice. Tvornica T_1 podmiruje 60%, a tvornica T_2 40% potreba tržišta. Ispravno je 90% artikala tvornice T_1 i 70% artikala tvornice T_2.*
a) Kupi li kupac 100 artikala, koliko će ih biti ispravnih?
b) Ako je artikl ispravan, kolika je vjerojatnost da je proizveden u tvornici T_2?

Rješenje:

a) Označimo s B događaj da je artikl ispravan, s A_1 da je proizveden u tvornici T_1, a s A_2 da je proizveden u tvornici T_2. U tom je slučaju $P(B|A_1) = 0.9$, $P(B|A_2) = 0.7$

[2]Thomas Bayes (1701. - 1761.), engleski matematičar i prezbiterijanski svećenik. Poznat po tome što je formulirao formulu koja nosi njegovo ime - Bayesova formula.

Nadalje, vjerojatnost odabiranja artikla tvornice T_1 je $P(A_1) = 0.6$, a vjerojatnost odabiranja artikla tvornice T_2 je $P(A_2) = 0.4$. Prema formuli (2.9) imamo:
$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) = 0.6 \cdot 0.9 + 0.4 \cdot 0.7 = 0.82.$
Dakle, od 100 kupljenih artikala bit će 82 ispravna.
b) Vjerojatnost da je artikl proizveden u tvornici T_2, uz uvjet da je artikl ispravan, jednaka je:

$$\begin{aligned} P(A_2|B) &= \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)} \\ &= \frac{0.4 \cdot 0.7}{0.6 \cdot 0.9 + 0.4 \cdot 0.7} \\ &= 0.341. \end{aligned}$$

Ovaj primjer primjene Bayesovog pravila pokazuje kako ne treba paničariti da ćemo kupiti isti artikl iako tvornice proizvode toliko neispravnih artikala.

✓

2.3.1 Nezavisni događaji

Događaj A ne ovisi o događaju B ako vrijedi $P(A|B) = P(A)$.
Iz formule (2.8) slijedi

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B).$$

Kažemo da su događaji A i B **nezavisni** ako vrijedi

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

tj. ako je vjerojatnost pojavljivanja i događaja A i događaja B jednaka produktu vjerojatnosti pojedinih događaja A i B.

Ako se jedan događaj sastoji od više događaja koji su međusobno nezavisni, onda se vjerojatnost za takav događaj zove složena vjerojatnost i jednaka je produktu vjerojatnosti pojedinih događaja.

Npr., bacamo dvije kocke i pitamo se kolika je vjerojatnost da će na obje kocke pasti broj 5. Vjerojatnost da će na jednoj kocki pasti 5 jednaka je $p_1 = \frac{1}{6}$, vjerojatnost da će na drugoj kocki pasti broj 5 je također jednaka $p_2 = \frac{1}{6}$, pa je vjerojatnost da će i na prvoj i na drugoj kocki pasti 5 jednaka

$$p = p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Da je to ispravno lako se možemo uvjeriti i na sljedeći način. Kako svaka kocka ima 6 ploha, sve mogućnosti dobivamo tako da svakoj plohi prve kocke pridružimo po redu svih 6 ploha druge kocke. Prema tome, imamo sve moguće slučajeve koji mogu nastupiti ($n = 6 \cdot 6 = 36$). Povoljni su međutim samo oni slučajevi kada imamo na obje kocke broj 5, što znači da imamo samo jedan povoljan ishod jer svaka kocka ima samo jednu plohu s brojem 5 ($m = 1 \cdot 1 = 1$), pa je prema tome vjerojatnost

$$p = \frac{m}{n} = \frac{1}{36}.$$

To pravilo ćemo upotrijebiti uvijek kad računamo vjerojatnost da će jedan događaj nastupiti i na jedan i na drugi način (pravilo "i - i"). Naravno, ovakvo razmišljanje se može primijeniti i na više događaja.

Ako su A i B nezavisni događaji onda su nezavisni i događaji:
a) A i B^c,
b) A^c i B te
c) A^c i B^c.
Pokažimo da ako su A i B nezavisni događaji da su tada nezavisni i događaji A i B^c.
Kako su događaji $A \cap B$ i $A \cap B^c$ disjunktni vrijedi da je

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c),$$

pa je

$$P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c).$$

Tada imamo:

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)[1 - P(B)] \\ &= P(A)P(B^c). \end{aligned}$$

Primjer 2.11. *U kutiji K_1 se nalazi 10 mobitela od kojih su 4 neispravna, a u kutiji K_2 se nalazi 6 mobitela od kojih su 2 neispravna. Slučajno je izabran po jedan mobitel iz svake kutije.*
a) Kolika je vjerojatnost da su oba mobitela ispravna?
b) Kolika je vjerojatnost da je jedan mobitel ispravan, a drugi neispravan?

Rješenje:

Imamo sljedeće događaje:
$A = \{$izabran je ispravan mobitel iz $K_1\}$,
$B = \{$izabran je ispravan mobitel iz $K_2\}$.
$P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
a) Odabir mobitela iz kutije K_1 ne utječe na odabir mobitela iz kutije K_2 pa je tražena vjerojatnost

$$p = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = 0.4.$$

b) Vjerojatnost da je jedan mobitel ispravan, a drugi neispravan jednaka je

$$p = P(A) \cdot P(B^c) + P(A^c) \cdot P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = 0.47.$$

✓

Primjer 2.12. *U jednom hrvatskom restoranu provedena je anketa koja je pokazala da 5% gostiju nije zadovoljno hranom, 98% gostiju zadovoljno je ambijentom i 1% nije zadovoljno poslugom. Kolika je vjerojatnost da je slučajno odabrani gost zadovoljan i hranom i ambijentom i poslugom?*

Rješenje:

$A = \{\text{gost nije zadovoljan hranom}\}$,
$B = \{\text{gost je zadovoljan ambijentom}\}$,
$C = \{\text{gost je zadovoljan poslugom}\}$.
Tražena vjerojatnost je

$$p = P(A^c) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0.95 \cdot 0.98 \cdot 0.99 = 0.92.$$

✓

2.4 Zadaci za vježbu

1. U kartaškoj igri - beli se dijeli 8 karata. Odredite vjerojatnost dobivanja:
   a) jednog kralja,
   b) barem jednog kralja,
   c) jednog asa?

2. Bacamo dvije kocke. Bilježimo rezultat na svakoj od njih.
   a) Koliko ima elementarnih događaja?
   Koliko elementarnih događaja imaju sljedeći događaji:
   b) $A = \{\text{oba broja su parna}\}$?
   c) $B = \{\text{oba broja su veća od 4}\}$?

3. U kutiji se nalazi 5 plavih, 7 crvenih i 2 žute kuglice. Izvlačimo 3 kuglice bez vraćanja. Kolika je vjerojatnost da se izvuku kuglice različitih boja?

4. U jednoj velikoj seriji 96% proizvoda zadovoljava tehničke uvjete propisane standardom. Proizvodi se podvrgavaju gruboj kontroli koja proglašava proizvode dobrim uz vjerojatnost od 0,98 ako je proizvod stvarno dobar, i uz vjerojatnost 0,05 ako je proizvod stvarno loš. Kolika je vjerojatnost da je proizvod stvarno dobar, ako ga je kontrola proglasila dobrim?

5. Bacamo novčić 4 puta. Kolika je vjerojatnost sljedećih događaja:
   a) A={pojavilo se točno jedno pismo}?
   b) B={u drugom bacanju pojavilo se pismo}?
   c) C={pojavilo se barem jedno pismo}?
   d) D={pismo se pojavilo barem dva puta}?

6. Od 100 mobitela 5 ih je neispravno. Kolika je vjerojatnost da će od 3 slučajno odabrana mobitela sva 3 biti ispravna?

7. Pločice na kojima su ispisana slova A, A, A, B, N, N slažemo jednu do druge. Kolika je vjerojatnost da ćemo dobiti riječ BANANA?

8. Kutija ima 3 jednake pregrade. U prvoj pregradi se nalazi 5 plavih i 4 bijele kuglice, u drugoj 3 bijele i 6 plavih, a u trećoj 5 crvenih i 8 plavih kuglica. Kolika je vjerojatnost da ćemo vadeći dvije kuglice iz na sreću odabrane pregrade izvući 2 plave kuglice?

9. Iz skupa $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ biramo na sreću dva broja. Kolika je vjerojatnost da su:
   a) oba parna?
   b) brojevi suprotne parnosti?
   c) oba prosta?

10. Kolika je vjerojatnost da se u igri LOTO 6/45 u jednoj kombinaciji postigne dobitak od 6 zgoditka, od 5 zgoditka, od 4 ili od 3 zgoditka?

11. Vjerojatnost da zrakoplov bude oboren prije nego stigne do cilja je 5%. Vjerojatnost da uništi cilj, ako do njega stigne, je 30%. Kolika je vjerojatnost da zrakoplov dospije do cilja i uništi ga?

12. Simetrična kockica se baca dva puta. Odredite vjerojatnost sljedećih događaja:
    a) A={pali su jednaki brojevi},
    b) B={suma brojeva koji su pali je 8},
    c) C={produkt brojeva koji su pali je 8},
    d) D={suma brojeva koji su pali je veća od produkta brojeva koji su pali}.

13. Od 20 pitanja student je naučio njih 15 i izašao je na ispit iz Statistike. Na ispitu izvlači 4 pitanja. Kolika je vjerojatnost da student zna odgovoriti na:
a) sva 4 pitanja?
b) na barem jedno?

14. Na Veleučilištu u Varaždinu je 5% studenata i 2% studentica viših od 2 metra, dok su 60% studenata muškarci. Ako je slučajno izabrana jedna osoba i viša je od 2 metra, kolika je vjerojatnost da je žena?

15. S parkirališta na kojem su bila 3 plava i 1 crni Audi, 3 plava i 5 crna BMW-a i 2 plava i 1 crna Mazda ukraden je jedan automobil. Ako je ukradeni automobil plava boje, kolika je vjerojatnost da je to bila Mazda?