45 bodova
22.5 (2)
28 (3)
33 (4)
39.5 (5)

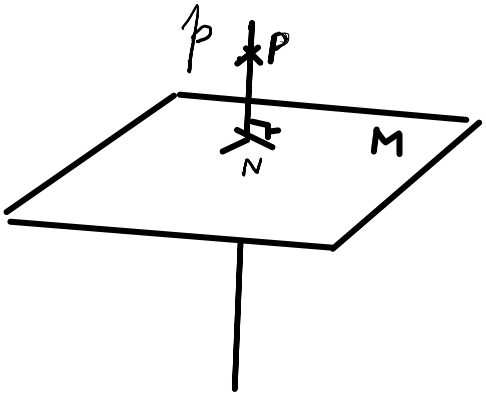
mat4 4. srpnja 2023. IME i PREZIME:

5 bodova

1. Promatraj ravninu M s jednadžbom $3x+3y+2z-3=0$ i točku $P(1,0,1)$ koja je van ravnine. Nadji pravac p koji prolazi kroz P, a okomit je na M u parametarskom obliku i probodište tog pravca s M (dakle okomitu projekciju P na M),

normala p je uzduž vektora normale $\vec{n}(3,3,2)$

$N(x_N, y_N, z_N)$



dakle, p ima parametarsku jednadžbu tipa $\vec{r}(t)$ = (x_N,y_N,z_N) + t (3,3,2)

gdje su (x_N,y_N,z_N) koordinate probodišta N pravca p kroz ravninu M

Točka P zadovoljava parametarsku jednadžbu od p

(1,0,1) = (x_N,y_N,z_N) + t(3,3,2) $\Rightarrow$ $x_N = 1-3t$, $y_N = -3t$, $z_N = 1-2t$

Ako je N točka presjeka pravca s ravninom M, to njegove koordinate zadovoljavaju jednadžbu koordinata točaka ravnine M, $3x_N+3y_N+2z_N-3=0$

$$3\underbrace{(1-3t)}_{x_N}+3\underbrace{(-3t)}_{y_N}+2\underbrace{(1-2t)}_{z_N}-3=0$$

$$\Rightarrow \cancel{3}-9t-9t+2-4t-\cancel{3}=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{1}{11}$$

$$\Rightarrow x_N = 1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11} \quad y_N=-3\frac{1}{11}=-\frac{3}{11} \quad z_N=1-\frac{2}{11}=\frac{9}{11}$$

probodište
$$N\left(\frac{8}{11}, -\frac{3}{11}, \frac{9}{11}\right)$$

pravac
$$p \ldots \vec{r}(t)=\left(\frac{8}{11}+3t, -\frac{3}{11}+3t, \frac{9}{11}+2t\right)$$

(parametarska jednadžba pravca p)

4 boda 2. Promatrajmo 2×2 matrice s elementima u tijelu kvaterniona, gdje je $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$. Izračunaj

$$\begin{pmatrix} i & 3 \\ j & -k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j-i & i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(j-i)+3 & i^2+3i \\ j(j-i)-k & ji-ki \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k+1+3 & -1+3i \\ -1+k-k & -k-j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+k & -1+3i \\ -1 & -j-k \end{pmatrix}$$

4 boda (2+1+1) 3. Ispiši sve inverzije u permutaciji, napiši broj inverzija i paritet

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 4 & 3 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(12), (13), (14), (15), (1,6), (17), (26), (34), (36), (46), (56), (57) 12 → parnot

12 inverzija

Inverzija permutacije s je par (i,j) gdje je i< j, a s(j)> s(i). Npr. (1,6) ide u (7,1) pa je inverzija, a (2,7) ide u (2,5) pa nije inverzija.

Paritet je paran ili +1 ako je broj inverzija paran.
Paritet je neparan ili -1 ako je broj inverzija neparan. **(Dakle (-1) potencirano na broj inverzija.)**

5 bodova

4. Promatramo trostranu piramidu kojoj su četiri vrha

$$A(1,3,0), B(2,1,0), C(-1,0,3), D(0,1,2).$$

Nadji volumen piramide.

$\vec{AB}\ (1,-2,0)$ $\quad V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}\left(-3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}\right)$

$\vec{AC}\ (-2,-3,3)$ $\quad = \pm\frac{1}{6}\left(12 + (-14)\right) = \boxed{\frac{1}{3}}$

$\vec{AD}\ (-1,-2,2)$

biramo pozitivni na kraju

drugi način

$\vec{BA}\ (-1,2,0)$

$\vec{BC}\ (-3,-1,+3)$ $\quad V = \left|\frac{1}{6}\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & +3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right|$

$\vec{BD}\ (-2,0,2)$

$$= \pm\frac{1}{6}\left\{-2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & +3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}\right\} = \pm\frac{1}{6}\left(-12+14\right) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

6 bodova 5. a) Definiraj djelitelja nula u prstenu.

Djelitelj nule u prstenu R je element n iz R, različit od nule, takav da postoji drugi element r iz R, također različit od nule, takav da je njihov umnožak u barem jednom poretku nula (dakle ili r*n ili n*r = 0)

b) Opiši primjer prstena koji ima djelitelje nula i izdvoji jedan takav djelitelj u tom prstenu.

Prsten 2x2 matrica kojima su elementi cijeli brojevi (možemo realne umjesto toga), a djelitelj nule je matrica $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **za koju vrijedi da je pomnožena sama sa sobom jednaka nuli (nula u tom prstenu je 2x2 matrica čiji svi elementi su 0.**

c) Što je to lijeva susjedna klasa grupe G u odnosu na podgrupu H ?

Lijeva susjedna klasa grupe G u odnosu na podgrupu H je ma koji skup oblika H g = { h·g | h∈H}, dakle skup svih elemenata koji se dobiju tako da se neki fiksni element g iz H pomnoži slijeva sa elementima iz H.

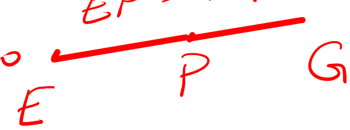
4 bodova 6. Trokut $\triangle EFG$ ima koordinate vrhova (u ravnini) $E(1,3), F(4,5), G(5,2)$. Nadji polovište stranice EG i koordinate težišta T tog trokuta.

$(5-1, 2-3)$

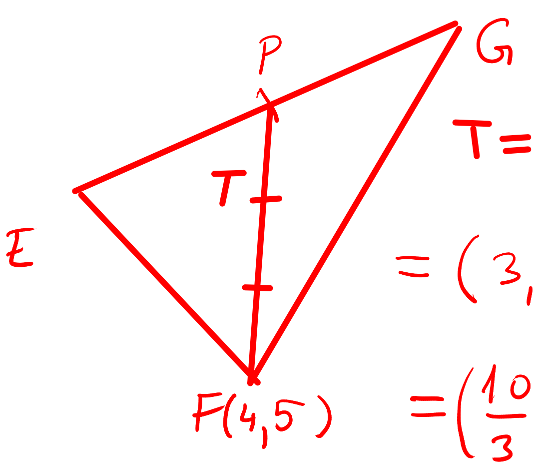
$\vec{EP} = \vec{PG} = \frac{1}{2}\vec{EG}$

$\overline{EG}$ polovište $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(3, \frac{5}{2}\right)$

ili crtež



$P = E + \frac{1}{2}\vec{EG} = (1,3) + \frac{1}{2}(5-1, 2-3) = \left(3, \frac{5}{2}\right)$



$T = P + \frac{1}{3}\vec{PF}$ **po teoremu o težištu i težišnicama**

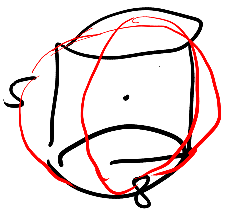
$= \left(3, \frac{5}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(4-3, 5-\frac{5}{2}\right)$

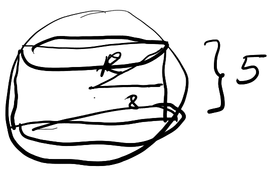
$= \left(\frac{10}{3}, \cancel{\frac{20}{6}}\frac{10}{3}\right)$

alternativno: koordinate težišta su aritmetička sredina koord. vrhova trokuta $\left(\frac{1+4+5}{3}, \frac{3+5+2}{3}\right)$

5 bodova

7. Promatrajmo uspravni VALJAK takav da je njegov poprečni presjek kružnica radijusa 8 cm i visina 5 cm i opiši oko njega sferu. Dakle, gornja i donja osnovica valjka diraju sferu u svojim vanjskim obodima. Nadji obje površine ta dva dijela i njihov omjer: omjer površine (oplošja) sfere i površine valjka.





$r = 8$

$R = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 8^2}$

$R = \frac{\sqrt{281}}{2}$

$P_{\ominus} = 4R^2\pi = \cancel{4}\frac{281}{\cancel{4}}\pi = 281 \cdot \pi \approx 281 \times 3.14159$

$P_{\text{valjak}} = 2r\pi(r+v) = 16\pi(8+5) = 208 \cdot \pi$

omjer $\frac{P_{\ominus}}{P_{\text{valjak}}} = \frac{281}{208}$

4 boda

8. Neka je $e = (e_1, e_2)$ baza od $\mathbb{R}^2$ dana vektorima

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

(u standardnoj bazi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ od $\mathbb{R}^2$; $e_1 = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ itd.)

Ako je linearni operator $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dan vrijednostima na bazi, $g(e_1) = -e_1 + e_2$, $g(e_2) = 3e_1 + 1e_2$.

a) koliko je $g(2e_1 - e_2)$ u bazi e_1, e_2; (koristi linearnost od g!)

b) Rezultat napiši i u standardnoj bazi.

c) Napiši vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ kao linearnu kombinaciju $\alpha e_1 + \beta e_2$, tj. nadji konstante α i β.

$g(2e_1 - e_2) \overset{\text{linearnost}}{=} 2g(e_1) - g(e_2) = 2(-e_1 + e_2) - (3e_1 + e_2) \overset{a)}{=} -5e_1 + e_2$

$= -5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{b)}{=} \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha + 2\beta = 1 \\ 2\alpha + 3\beta = 3 \end{matrix} \Rightarrow \alpha = 1 - 2\beta$

$2(1-2\beta) + 3\beta = 3$

$2 - 4\beta + 3\beta = 3$

$-\beta = 1 \Rightarrow \beta = -1 \Rightarrow \alpha = 3$

provjera:

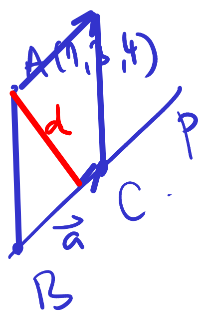
$3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3 boda) 9. Nađi kut između ravnina 2x+2y+3z-1=0 i x+2y+1=0 (priznaje se i ako nađete samo kosinus ili sinus tog kuta).

Rješenje: to je ujedno kut između normala koje su (2,2,3) i (1,2,0). Dakle cos tog kuta je skalarni umnožak (2,2,3)(1,2,0) = 2+4+0 = 6 podijeljen s umnoškom duljina vektora (2,2,3) (dakle korijen iz 17) i (1,2,0) (korijen iz 5). Dakle

$$cos\theta = \frac{6}{\sqrt{17}\sqrt{5}}$$

10. Nađi udaljenost od pravca r(t) = (2+t,3+t,1-2t) do točke A(1,3,4)
(5 bodova)



$p \ldots \vec{r}(t) = \underset{B}{(2,3,1)} + t\underbrace{(1,1,-2)}_{\vec a}$

$d = \dfrac{\|\vec a \times \vec{BA}\|}{\|\vec a\|}$ ← površina

$\vec{BA} = (1-2, 3-3, 4-1) = (-1,0,3)$

$\vec a \times \vec{BA} = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec i - \vec j - \vec k$

$P = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$

$\|\vec a\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$

$d = \sqrt{\frac{11}{6}}$