

$$4+6+3+2+7+6+4+6+5 = 43 \text{ boda}$$

Prolaz 21.5 bodova , trojka od 27 bodova, četvorka od 32.5 boda, petica od 38 bodova

mat4 10.6.2021. IME i PREZIME:

2+2

1. Promatraj skup svih kompleksnih brojeva kojima su i realni i imaginarni dio cijeli brojevi.

a) je li taj skup podgrupa skupa svih kompleksnih brojeva s obzirom na zbrajanje **da, zatvorenost, asocijativnost, 1 je unutra i suprotni element unutra**

b) je li taj skup podgrupa skupa svih kompleksnih brojeva s obzirom na množenje ? Objasni zašto je ili nije.

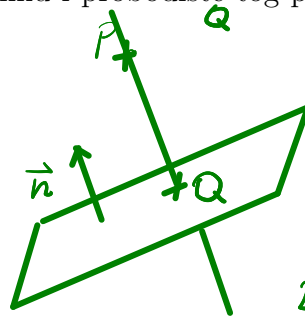
b) nije, prvo niti kompleksni brojevi nisu grupa jer 0 nema inverz, a tako ni ovaj podskup nije grupa jer ne samo 0, nego svi cjelobrojni kompleksni brojevi nemaju inverz osim plus minus 1 i plus minus i.

6 bodova

2. Promatraj ravninu M s jednadžbom $2x + 3y + z - 1 = 0$ i točku $P(1, 1, 1)$ koja je van ravnine. Nadji pravac p koji prolazi kroz P , a okomit je na M u parametarskom obliku i probodište tog pravca s M (dakle okomitu projekciju P na M),

$$p \dots \vec{r}(t) = P + t \vec{n} = (1+2t, 1+3t, 1+t)$$

$$t_Q = -\frac{5}{14}$$



$Q \in M$

$$2Q_x + 3Q_y + Q_z - 1 = 0$$

$$Q = P + t\vec{n}$$

$$2(1+2t) + 3(1+3t) + (1+t) - 1 = 0$$

$$2 + 4t + 3 + 9t + 1 + t - 1 = 0$$

$$14t_Q = -5$$

$$t_Q = -\frac{5}{14}$$

$$\frac{2}{14} - \frac{3}{14} + \frac{9}{14} - \frac{1}{14} = \frac{8-3+9-1}{14} = 0$$

$$Q(1+2(-\frac{5}{14}), 1+3(-\frac{5}{14}), 1+(-\frac{5}{14}))$$

$$Q(\frac{4}{14}, -\frac{1}{14}, \frac{9}{14}) \text{ provera: } 2 \cdot \frac{4}{14} + 3(-\frac{1}{14}) + \frac{9}{14} - \frac{1}{14} = 0$$

$$\vec{PQ} = (\frac{-10}{14}, \frac{-15}{14}, \frac{-5}{14}) = -\frac{5}{14}(2, 3, 1)$$

3 boda

3. Promatrajmo 2×2 matrice s elementima u tijelu kvaterniona, gdje je $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$.
Izračunaj

$$\begin{pmatrix} j & 3 \\ j & -k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j+k & i \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j(j+k)+3 \cdot 0 & j \cdot i+3i \\ j(j+k)-k \cdot 0 & j \cdot i-k \cdot i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1+i & 3i-k \\ -1+i & -j-k \end{pmatrix}$$

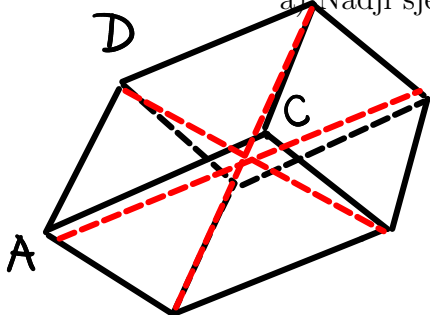
2 boda

4. Izračunaj kompoziciju permutacija skupa $\{A, B, C, D\}$ (gornji red je početno, a donji red u svakom stupcu završno stanje, kao i obično)

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & C & D \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & A & D \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & A & B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & C & D \end{pmatrix}$$

3+4 boda

5. Promatramo paralelepiped kojem su četiri vrha $A(1, 1, 0)$, $B(2, 3, 0)$, $C(-1, 0, 3)$, $D(0, 0, 1)$.
a) Nadji sjecište dijagonala tog paralelepipeda. b) Nadji volumen.



(SUŠJEDNI VRHOVI)

$$V = |\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AD})|$$

$$\pm V = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 - 2 \cdot 1 = 0$$

paralelepiped je degeneriran!
sve 4 točke u ravni

$$-3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$$

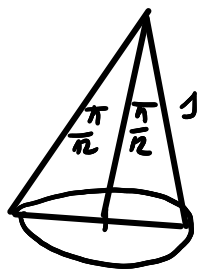
$$S = A + \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$$

$$S = (1, 1, 0) + \frac{1}{2}(-2, 0, 4)$$

$$S = (1-1, 1+0, 0+2)$$

$$S(0, 1, 2)$$

6 bodova



$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{12}$$

6. Promatrajmo uspravni stožac takav da je kut pri vrhu $\pi/6$ radijana (to je kut u ravnini presjeka s ravinom kroz vrh stošca koja je okomita na ravninu osnovice) i visina je $h = 1$. Nadji oplošje P i volumen V stošca.

$$r = h \cdot \tan \frac{\pi}{12} = 1 \cdot \tan \frac{\pi}{12} = 0.267949...$$

$$V = r^2 \pi \cdot h/3 = \pi \tan^2 \frac{\pi}{12} \cdot 1/3 = 0.075...$$

$$P = \pi r^2 + r s \pi \approx 0.2255 + 0.8715 = 1.097$$

$$\text{ili } P = \pi \tan^2 \frac{\pi}{12} + \tan \left(\frac{\pi}{12} \right) \cdot \frac{\pi}{\cos \frac{\pi}{12}} = \pi \tan \frac{\pi}{12} \cdot \frac{\tan \frac{\pi}{12} + 1}{\cos \frac{\pi}{12}} \approx 1.097$$

7. Neka je $e = (e_1, e_2)$ baza od $\mathbb{R}^2$ dana vektorima

2+2 boda

$$e_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

(u standardnoj bazi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ od $\mathbb{R}^2$; $e_1 = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ itd.)

Ako je linearni operator $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dan vrijednostima na bazi, $g(e_1) = -2e_1 + e_2$, $g(e_2) = 3e_1 + 2e_2$.

a) koliko je $g(e_1 - 2e_2)$ u bazi e_1, e_2 ; (koristi linearnost od g !)

b) Rezultat napiši i u standardnoj bazi.

$$\begin{aligned} \text{a) } g(e_1 - 2e_2) &= g(e_1) - 2g(e_2) = -2e_1 + e_2 - 2(3e_1 + 2e_2) \\ g(e_1 - 2e_2) &= -8e_1 - 3e_2 \end{aligned}$$

$$\text{b) } = -8 \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 - 3 \\ -16 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -51 \\ -25 \end{pmatrix}$$



$$\varphi = 2\pi \frac{r}{s}$$

$$P_{\text{b}} = s^2 \pi \cdot \frac{\varphi}{2\pi} = r s \pi$$

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{h^2 + r^2} \\ s &= 1.035276... \end{aligned}$$

$$0.87148...$$

$$\text{ili } s = \frac{h}{\cos \frac{\pi}{12}}$$

6 bodova

3 5 1

parametarski, p je

8. Nadji jednadžbu ravnine kojoj pripadaju pravac $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = z-1$ i točka $P(0, 4, 1)$.

$$r(t) = A + t a$$

$$x = 2 + 3t$$

$$y = -4 + 5t$$

$$z = 1 + t$$

izaberemo dvije točke A i B na p

$$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{a} (3, 5, 1) \text{ je uzduž tog pravca p}$$

A(2, -4, 1) je na p, B(2+3, -4+5, 1+1) = (5, 1, 2) je na p

$$t=0$$

$$\vec{AP} = (-2, 8, 0)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -8\vec{i} - 2\vec{j} + 37\vec{k}$$

$$-8x - 2y + 37z + D = 0, \text{ uvrstimo } P(x_p, y_p, z_p)$$

$$P... -8 \cdot 0 - 2 \cdot 4 + 37 \cdot 1 + D = 0 \quad D = -26$$

$$-8x - 2y + 37z - 26 = 0 \text{ ili } 4x + y - 17z + 13 = 0$$

$$\text{Provjera } 4(2+3t) + (-4+5t) - 17(1+t) + 13 = 0$$

9. Nadji udaljenost od točke $D(0, 2, 3)$ do pravca parametarski danog s

$$\vec{r}(t) = (2t, t-1, t-2).$$

$$d = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AD}\|}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\sqrt{2^2 + (-10)^2 + 6^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{140}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{70}{3}}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 2\vec{i} - 10\vec{j} + 6\vec{k}$$

5 bodova

$$\vec{r}(t) = (0, -1, -2) + (2, 1, 1)t$$

napomena: umjesto $\vec{AD}$ mogli smo uzeti $\vec{BD}$, rezultat je isti

$$\vec{BD} = (-2, 2, 1)$$

$$\vec{AB} \times \vec{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 10\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \vec{AB} \times (\vec{AB} + \vec{BD})$$

$$= \vec{AB} \times \vec{BD}$$

$$\text{jer je } \vec{AB} \times \vec{AB} = \vec{0}$$

4

alternativno rješenje (predložila G. Rubelj): nađimo ravninu okomitu na pravac AB koja prolazi kroz D

To je $2x + y + z - 5 = 0$ i njeno sjecište N s pravcem AB odgovara parametru

$$2(2t) + (-1+t) + (-2+t) - 5 = 0, \text{ dakle } 6t = 8, t = 4/3, N(8/3, 1/3, -2/3) \text{ pa je}$$

$$d(p, D) = d(N(8/3, 1/3, -2/3), D(0, 2, 3)) = \text{korijen}((64 + 25 + 121)/9) = \text{korijen}(210/9) = \text{korijen}(70/3)$$