zadarmat4 10.6.2016.

IME i PREZIME:

1. Od a-f zaokruži koje su tvrdnje (uvijek) točne:

a) u prstenu $(A, \cdot, +, 1, 0)$ uvijek vrijedi $0 \cdot a = 0$ gdje je (0 neutralni element u Abelovoj grupi $(A, +)$).

b) podskup polugrupe je polugrupa akko je taj podskup zatvoren u odnosu na binarnu operaciju polugrupe

c) podskup monoida je monoid akko je taj podskup zatvoren u odnosu na binarnu operaciju monoida

d) skup vektora u vektorskom prostoru je prsten

e) skup skalara u vektorskom prostoru je tijelo

f) ako matrica A ima 5 redaka i 3 stupca, a matrica B ima 2 retka i 5 stubaca tada je produkt matrica AB definiran

2. Izračunaj produkt matrica

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

3. Napiši definiciju grupe u multiplikativnoj notaciji $(G, \cdot)$.

4. Izračunaj kompoziciju permutacija skupa $\{A, B, C, D\}$ (gornji red je početno, a donji red u svakom stupcu završno stanje, kao i obično)

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & D & B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & C & B \end{pmatrix} =$$

5. (posvetite dosta vremena ovom zadatku, dosta bodova, pazite na zatvorenost na operaciju i na postojanje neutralnih elemenata kada je to potrebno) Promatrajte slijedećih 6 skupova: skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$, skup strogo pozitivnih racionalnih brojeva $\mathbb{Q}_+$, skup parnih cijelih brojeva $2\mathbb{Z}$, skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, skup kompleksnih brojeva bez nule $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, skup $\mathbb{Q}[x]$ polinoma u jednoj varijabli s racionalnim koeficijentima. Svi ti skupovi imaju uobičajeno (asocijativno i komutativno) množenje i zbrajanje, dakle mogu činiti aditivne i multiplikativne binarne strukture, a i kombinacije. Na svaku od slijedećih linija pobroji sve skupove iz tog niza koji čine napisane strukture:

(i) grupa za zbrajanje ____________________________

(ii) monoid za množenje ____________________________

(iii) polugrupa za množenje ____________________________

(iv) polugrupa za zbrajanje ____________________________

(v) polje ____________________________

6. Pomnoži polinome $P = 5y^2 - 1$ i $Q = y - 2$ i rezultat MNOŽENJA $R = P \cdot Q$ PODIJELI polinomom $T = y + 2$ s ostatkom. Oni koeficijenti rezultata koji nisu cijeli neka budu napisani kao razlomci.

7. Definiraj što je to baza vektorskog prostora.

8. Neka je $e = (e_1, e_2)$ baza od $\mathbb{R}^2$ dana vektorima

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(u standardnoj bazi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ od $\mathbb{R}^2$; $e_1 = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ itd.)

a) Ako za linearni operator $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vrijedi $f(e_1) = 3e_1 + 2e_2$, $f(e_2) = 2e_1$, koliko je $f(-e_1 + e_2)$? (u bazi e_1, e_2; koristi linearnost od f!)

b) Napiši matricu od f u toj bazi (e_1, e_2) (lagano, ne treba računati!)

b) Provjeri da je vektor v koji je u standardnoj bazi jednak $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, u novoj bazi (e_1, e_2) jednak $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$.

8. Definiraj što je to podgrupa grupe $(G, \cdot)$.

9. a) Definiraj što je izomorfizam grupa $f : G \to H$ (ako pri tome koristiš riječ homomorfizam grupa onda i njega definiraj).

b) Da li je preslikavanje $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ dano s $f(n) = 2 \cdot n$ (puta je množenje cijelih brojeva) homomorfizam (aditivnih) grupa ? Što treba provjeriti ? Objasni zašto je ili nije homomorfizam.