mat4 24.4.2017. rješenja

1. Kad je polugrupa monoid ?

Ako ima neutralni element.

2. Precizno definiraj što znači (potpuno) podijeliti dva prirodna broja m i n s ostatkom ?

Podijeliti m s n s ostatkom znači odrediti brojeve $s \in \mathbb{N}$ (rezultat dijeljenja s ostatkom) i $r \in \mathbb{N}_0$ (ostatak) takve da je $m = s \cdot n + r$ i takve da je $0 \leq r < n$. Po teoremu o dijeljenju, r, s su jedinstveni.

3. Mogu li u tijelu postojati djelitelji nule ? Ne.

4. Ima li u prstenu cijelih brojeva djelitelja nule ? Ne.

5. Kada je (po definiciji) S podskup skupa vektora vektorskog prostora V linearno nezavisan ?

Ako vrijedi da ako je proizvoljna linearna kombinacija $\lambda_1 s_1 + \ldots + \lambda_k s_k$ ma kojih vektora $s_1, \ldots, s_k \in S$ (u kojoj su $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ skalari) jednaka nuli, onda su i svi koeficijenti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jednaki nuli.

6. Kada kažemo da je preslikavanje f iz skupa vektora vektorskog prostora V u skup vektora vektorskog prostora W (nad istim poljem) homogeno ?

Ako je $f(\lambda \vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$ za svaki $\vec{v} \in V$ i svaki skalar λ.

7. Što je to linearni operator ?

Preslikavanje iz skupa vektora jednog vektorskog prostora u skup vektora drugog vektorskog prostora koje je homogeno i aditivno.

8. Što je to permutacija ?

Bijekcija s nekog skupa na samog sebe.

9. Definiraj zbrajanje prirodnih brojeva uz pomoć brojenja (tj. korištenja funkcije uzimanja sljedbenika) i rekurzije ("matematičke indukcije").

Neka je $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija sljedbenika. Tada je definicija rekurzijom dana s

$m + 1 := s(m)$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$, $m + s(n) := s(m + n)$

U neformalnoj notaciji $m+1$ je od brojenja, a $m+(n+1) := (m+n)+1$.

10. Što je to n-arna algebarska operacija ?

n-arna algebarska operacija na skupu A je svaka funkcija $A \times A \times \ldots \times A \to A$ gdje je $A \times A \times \ldots \times A$ (n-puta) Kartezijev produkt.

11. Vektori u euklidskom prostoru su klase ekvivalencije usmjerenih dužina. Kada su dva vektora ekvivalentna ?

$\vec{AB}$ je ekvivalentan s $\vec{CD}$ ako se polovišta dužina $\overline{AD}, \overline{BC}$ podudaraju (pravilo paralelograma).

12. Definiraj Kartezijev produkt dvaju skupova.

$A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$ tj. skup svih uredjenih parova kod kojih je prvi element iz prvog, a drugi element iz drugog skupa.

13. Definiraj razliku dva *prirodna* broja.

Razlika $m - n$ je prirodni broj p takav da je $n + p = m$, ako taj broj postoji (ako postoji tada kažemo da je m veći od n).

14. Definiraj što je to razlomak i što je to racionalni broj.

Razlomak je uredjeni par (p, q) gdje su $p, q \in \mathbb{Z}$ cijeli brojevi i $q \neq 0$. Obično se taj par piše $\frac{p}{q}$. Racionalni broj je klasa ekvivalencije razlomaka: $a/b \sim c/d$ akko $a \cdot d = b \cdot c$.

15. Što je to lijeva susjedna klasa grupe G u odnosu na podgrupu H ?

Lijeva susjedna klasa je skup $H \cdot g = \{h \cdot g | h \in H\}$ za neki $g \in G$.

16. Definiraj množenje $\bullet$ u lijevoj kvocijentnoj grupi $H \backslash G$ gdje je H normalna podgrupa grupe $(G, \cdot)$

$Hg \bullet Hg' := H(g \cdot g')$.

17. Definiraj $n!$ (n faktorijela) za sve prirodne brojeve n.

Rekurzijom: $1! = 1$, $n! = n(n-1)!$.

18. Što je dimenzija vektorskog prostora ?

Kardinalnost (broj elemenata) bilo koje baze tog vektorskog prostora.

19. Definiraj što je to kardinalni broj.

Klasa ekviponentnosti skupova. Dva skupa su ekvipotentna ako postoji bijekcija s prvog na drugi skup. Ekvipotentost je relacija ekvivalencije.

20. Kad je binarna relacija $<$ na skupu S relacija strogog parcijalnog uredjaja? Ako je tranzitivna (tj. $a < b$ i $b < c$ implicira $a < c$) i ako iz $a < b$ slijedi da nije $b < a$.

21. Ako je $<$ relacija strogog uredjaja na skupu S, kad su dva elementa $r, s \in S$ u pripadnoj relaciji nestrogog uredjaja $\leq$ na skupu S ?

$r \leq s$ akko $r < s$ ili $r = s$

22. Definiraj množenje kompleksnih brojeva, tj. ako su $a + bi$ i $c + di$ dva kompleksna broja, napiši njihov umnožak u obliku $X + Yi$ gdje su $X, Y \in \mathbb{R}$ realni i imaginarni dio umnoška.

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$, dakle $X = ac - bd$, $Y = ad + bc$.

23. Definiraj prsten. Prsten (s jedinicom) je skup A s dvije algebarske operacije, $\cdot, +$ gdje je $(A, +)$ Abelova grupa, $(A, \cdot)$ monoid i $\cdot$ je distributivno prema $+$ s lijeva i s desna.