mat4 29.6.2017. IME i PREZIME:

Vektor $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$. Duljina vektora $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Skalarni umnožak $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$, vektorski umnožak $\vec{a} \times \vec{b} = (a_xb_y - a_yb_x)\vec{i} + (a_yb_z - a_zb_y)\vec{j} + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{k}$, $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Ravnina $Ax + By + Cz + D = 0$, normala u smjeru (A, B, C). Rotacija $\vec{b}$ za ϕ, $b'_x = b_x \cos\phi - b_y \sin\phi$, $b'_y = b_x \sin\phi + b_y \cos\phi$.

1. U tijelu kvaterniona elementi su $a + bi + cj + dk$ gdje su $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Izračunaj (u obliku $a + bi + cj + dk$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) $z = (1 + 2i) \cdot (i + j + k)$.

2. Nadji jednadžbu simetrale dužine $\overline{AB}$ gdje je $A(1, 2)$, $B(3, 0)$.

3. Sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ 5x + 3y &= 11 \end{aligned}$$

riješi pomoću determinanti, tj. Cramerovim pravilom.

4. U šaci imam 5 sličica nogometaša koje onda postavljam u dvije hrpice, po 2 i po 3 sličice. Dok ih postavljam neke od sličica mogu postaviti nezavisno naopako. Ako razlikujem svih 5 sličica i razlikijem je li slika naopačke ili ne, na koliko načina mogu sastaviti dvije hrpice.

5. Promatraj skup S svih racionalnih brojeva koji su različiti od nule.

a) Je li skup S grupa s obzirom na zbrajanje ? (da/ne)

b) Je li skup S grupa s obzirom na množenje ? (da/ne)

c) Ako na skupu strogo pozitivnih racionalnih brojeva $\mathbb{Q}^+$ definiramo novu operaciju $a \circ b = \frac{a \cdot b}{a+b}$ pokaži općenitim računom (ne primjerom) da je ona asocijativna na cijelom $\mathbb{Q}^+$.

6. Polinom $P = y^3 - y^2 + 1$ PODIJELI polinomom $T = -y + 2$ s ostatkom. Oni koeficijenti rezultata koji nisu cijeli neka budu napisani kao razlomci.

7. Nadji jednadžbu pravca koji je paralelan pravcu $3x + 2y + 1 = 0$ i prolazi kroz točku $(2, 3)$.

8. Neka je $e = (e_1, e_2)$ baza od $\mathbb{R}^2$ dana vektorima

$$e_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(u standardnoj bazi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ od $\mathbb{R}^2$; $e_1 = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ itd.)

Ako za linearni operator $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vrijedi $g(e_1) = e_1 + e_2$, $g(e_2) = e_1 - e_2$, koliko je $g(e_1 - e_2)$

a) u bazi e_1, e_2; koristi linearnost od g!

b) u standardnoj bazi

9. Izreci Cayleyev teorem o grupama.

10. Je li preslikavanje $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ dano s $f(n) = 2n$ homomorfizam (aditivnih) grupa ? Što treba provjeriti ? Objasni zašto je ili nije homomorfizam.

11. Nadji volumen prizme kojoj su 3 vrhova donje stranice $(1, 0, 3)$, $(2, 0, 5)$, $(4, 0, 1)$, a visina je 5.