

mat4 13.9.2016. IME i PREZIME:

Vektor $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$. Duljina vektora $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Skalarni umnožak $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$, vektorski umnožak $\vec{a} \times \vec{b} = (a_x b_y - a_y b_x) \vec{i} + (a_y b_z - a_z b_y) \vec{j} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{k}$, $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Ravnina $Ax + By + Cz + D = 0$, normala u smjeru (A, B, C) . Rotacija $\vec{b}$ za ϕ , $b'_x = b_x \cos \phi - b_y \sin \phi$, $b'_y = b_x \sin \phi + b_y \cos \phi$.

1. U tijelu kvaterniona elementi su $a + bi + cj + dk$ gdje su $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Izračunaj (u obliku $a + bi + cj + dk$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) $z = (2 + i) \cdot (3 - i - k)$.

2. Neka su $A(1, 2, 1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(0, 0, -1)$ tri vrha paralelograma $ABCD$ kojem su $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ dijagonale. Izračunaj koordinate četvrtog vrha paralelograma $ABCD$.

3. Sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 7 \\ -x + 3y &= 11 \end{aligned}$$

riješi pomoću determinanti, tj. Cramerovim pravilom.

4. 5 policajaca kodna imena A, B, C, D, E lovi lopove Jolu i Kolu. Policajci se grupiraju u 2 grupe po 3 i 2 policajca i ulove oba lopova. Svakog lopova je uhvatila samo 1 grupa, a moguće je da ista grupa uhvati oba. Ako sve ljude razlikujemo na koliko načina je moguće da se policajci grupiraju i ulove lopove. Npr. A B C:Jola, D E:Kola je jedan način, a A D E:Jola i Kola, B C:nitko drugi, A B C:Jola i Kola, D E:nitko treći.

5. Promatraj skup S svih racionalnih brojeva koji su različiti od nule.

a) Je li skup S grupa s obzirom na zbrajanje ? (da/ne)

b) Je li skup S grupa s obzirom na množenje ? (da/ne)

c) Ako na skupu strogo pozitivnih racionalnih brojeva $\mathbb{Q}^+$ definiramo novu operaciju $a \circ b = \frac{a \cdot b}{a+b}$ pokaži općenitim računom (ne primjerom) da je ona asocijativna na cijelom $\mathbb{Q}^+$.

6. Polinom $P = y^3 - y^2 + 1$ PODIJELI polinomom $T = y + 3$ s ostatkom. Oni koeficijenti rezultata koji nisu cijeli neka budu napisani kao razlomci.

7. Nadjí jednadžbu pravca koji je paralelan pravcu $3x + 2y + 1 = 0$ i prolazi kroz točku $(2, 9)$.

8. Neka je $e = (e_1, e_2)$ baza od $\mathbb{R}^2$ dana vektorima

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(u standardnoj bazi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ od $\mathbb{R}^2$; $e_1 = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ itd.)

Ako za linearni operator $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vrijedi $g(e_1) = 2e_1 + e_2$, $g(e_2) = e_1 - 2e_2$, koliko je $g(3e_1 - e_2)$

a) u bazi e_1, e_2 ; koristi linearnost od g !

b) u standardnoj bazi

9. Definiraj što je to desna susjedna klasa u grupi G u odnosu na podgrupu $H \subset G$. Koliko ima desnih susjednih klasa grupe G od 20 elemenata u odnosu na podgrupu od 5 elementa ?

10. Je li preslikavanje $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ dano s $f(n) = n - 2$ homomorfizam (aditivnih) grupa ? Što treba provjeriti ? Objasni zašto je ili nije homomorfizam.

11. Nadjii volumen 3-strane piramide kojoj su vrhovi $(1, 0, 3)$, $(2, 0, 5)$, $(4, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$.