Matematika 4, 25. ožujka 2021.

Prsten (R,+,*,0,1) je skup s dvije operacije + i * koje zadovoljavaju
1) (R,+,0) je Abelova (komutativna) grupa
2) (R,*,1) je monoid (množenje * nije nužno komutativno, ako je govorit ćemo o komutativnom prstenu), 1 različito od 0
3) množenje je distributivno prema zbrajanju slijeva i zdesna

$$(\forall a,b,c \in R) \quad a*(b+c) = a*b + a*c$$
$$(b+c)*a = b*a + c*a$$

1) kaže da je zbrajanje a+b definirano za svaka dva elementa, da ima netralni element 0, to jest a+0 = a = 0 +a, da svaki element a ima inverzni element (koji se za aditivne komutativne operacije često zove suprotni element) -a, to jest -a+ a = 0 i a + (-a) = 0 i da je množenje asocijativno i komutativno (riječ Abelova)
2) kaže da je a*b uvijek definirano, asocijativno i ima neutralni element 1

Ne-primjer Skup prirodnih brojeva nema neutralni element s obzirom na zbrajanje pa iako ima + i * i ostala svojstva nema neutralni element i nema suprotnih elemenata (niti nema smisla) $\mathbb{N}$
N_0 = {0,1,2,3,...,} isto nije primjer jer ima 0 (neutralni za +) ali nema suprotne elemente s obzirom na zbrajanje (nema -n) $\mathbb{N}_0$

Primjer. Skup cijelih brojeva ($\mathbb{Z}$,+,$\cdot$,0,1)

Primjer. Prsten polinoma u jednoj varijabli x i s koeficijentima u prstenu cijelih brojeva. $\mathbb{Z}[x] = \{$ polinoma u x, koef. u $\mathbb{Z}\}$

$a_1 x^1 = a_1 x$
$a_0 = a_0 x^0$

polinom s koeficijentima u prstenu R je izraz oblika

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

gdje su a0,...,an elementi u tom komutativnom prstenu R (ovdje je Z).

$3x^2+5x+1$ je polinom s koef. u $\mathbb{Z}$ $\qquad x^n$ potencija

$\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 1$ —"— u $\mathbb{Q}$

$3x^2+0x+0$ je polinom

$3x^2$ je polinom skraćeno pisan

$0x^3+3x^2+0x+0$

dva su polinoma jednaka ako im su im koeficijenti uz iste potencije jednaki s time da koeficijent nula i odsustvo koeficijenta u zapisu gledamo jednakim

Stupanj polinoma je najveći broj n takav da je koeficijent uz n-tu potenciju različit od 0

Zbrajanje polinoma

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) \overset{\text{simbol operacija}}{+} (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0)$$

ako $n > m$

$$= \underbrace{a_n}_{(a_n+0)} x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{m+1} x^{m+1}$$
$$+ (a_m \underset{u\ R}{+} b_m) x^m + (a_{m-1} + b_{m-1}) x^{m-1} +$$
$$+ \dots + (a_0 + b_0)$$

itd. $\quad a_k + b_k$ s tim da je a_k ili $b_k = 0$ ako ga nema

0 je neutralni

$$-(a_n x^n + \dots + a_0) = (-a_n) x^n + (-a_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (-a_0)$$

suprotni

$$+ \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + (a_0)$$

$$0 = 0x^n + \cdot \quad 0x^{n-1} + \quad + 0$$

Množenje polinoma: $a_n x^n \cdot b_m x^m = (a_n \cdot b_m) x^{n+m}$ eksponenti

$$x \longmapsto \underbrace{x^3 + 2x}_{\text{polinom}} \qquad \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto x^3 + 2x$ polinomijalna f-ja na cijelim brojevima

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 + 2x$ pol. f-ja na realnim brojevima

$$\underbrace{\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}}_{} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in \mathbb{Q}, \operatorname{Im} z \in \mathbb{Q} \}$$

$h : \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \to \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}, \quad x \longmapsto x^3 + 2x$ pol. f-ja

$(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ je prsten

$k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad x \mapsto x^3 + \frac{3}{2} x$

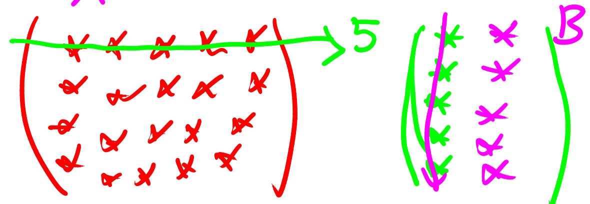
$k(1) = 1^3 + \frac{3}{2} 1 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$ nije polinomijalna f-ja jer nije ni dobro definirana

$Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ skup $n\times n$ matrica kojima su elementi realni brojevi

$$Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

A, B



$$(A\cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}\cdot B_{kj}$$

4×5 $\quad mat_{5\times 4}(\mathbb{R})$ $\quad 5\times 2 \longrightarrow 4\times 2$

$n\times m \qquad m\times p$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 0 & 2\cdot 7+3\cdot 3 \\ 4\cdot 1+6\cdot 0 & 4\cdot 7+6\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 20 \\ 4 & 46 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$ skalarne matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+0 & b+0 \\ c+0 & d+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot 1+\cancel{b\cdot 0} & \cancel{a\cdot 0}+b\cdot 1 \\ c\cdot 1+\cancel{d\cdot 0} & \cancel{c\cdot 0}+d\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot a+\cancel{0\cdot c} & 1\cdot b+\cancel{0\cdot d} \\ \cancel{0\cdot a}+1\cdot c & \cancel{0\cdot b}+1\cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Propozicija. U svakom prstenu, ako je r u prstenu onda je 0*r = 0 = r*0

$$0 = 0+0 \qquad \underline{\underline{0*r}} = (0+0)*r \underset{\text{z. distribucije}}{=} \underline{\underline{0*r}} + \underline{\underline{0*r}} \quad / + (-0*r)$$

$$\underbrace{0*r + (-0*r)}_{0} = (0*r+0*r)+(-0*r)$$

$$0 = 0*r + \underbrace{(0*r + (-0*r))}_{0}$$

$$0 = 0*r + 0 = 0*r$$

Grupa kvaterniona K = {1,-1,i,-i,j,-j,k,-k}

$$i\cdot j = k,\quad j\cdot k = i,\quad k\cdot i = j$$
$$j\cdot i = -k,\quad k\cdot j = -i,\quad i\cdot k = -j$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

1, i minusi se ponašaju uobičajeno, npr.

$$j\cdot(-i) = -j\cdot i = -(-k) = k$$

Tijelo kvaterniona (ima beskonačno mnogo elemenata)

$$a1 + bi + cj + dk, \quad a,b,c,d \in R$$
$$a + bi + cj + dk$$
$$(2+i)+(3+i+j) = 5+2i+j$$

$$(2+3i)\cdot(4-i+j) =$$
$$= 2\cdot 4 + 3\cdot 4i - 2i - 3i^2 + 2j + 3i\cdot j$$
$$= 8 + 12i - 2i + 3 + 2j + 3k$$
$$= 11 + 10i + 2j + 3k$$

to je primjer nekomutativnog prstena, čak nekomutativnog tijela
tijelo: prsten u kojem svaki element različit od nula ima inverz s ozbirom na množenje

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix},\ J^2 = \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot0+1\cdot1 & 0\cdot1+1\cdot0\\ 1\cdot0+0\cdot1 & 1\cdot1+0\cdot0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot0+1\cdot(-1) & 0\cdot1+1\cdot0\\ -1\cdot0+0\cdot(-1) & -1\cdot1+0\cdot0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$I = i^2 = -1 \qquad K = I\cdot J$$

$$a\mathbb{1} + bI + cJ + dK$$ model za kvaternione

$$K = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$$

$$a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + b\underset{\substack{I_x\\ I}}{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}} + c\underset{\substack{I_y\\ J}}{\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}} + d\underset{\substack{I_z\\ K}}{\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}}$$