Matematika 4 -- 2. ožujka 2023.

(algebarske strukture, linearna algebra, analitička geometrija)

Kartezijev umnožak n skupova

$\underset{n\text{-arna}}{R} \subseteq \underbrace{A\times B\times C\times\cdots\times K}_{n} = \{\underbrace{(a,b,c,\ldots,k)}_{\text{uređena } n\text{-torka}} \mid a\in A, b\in B, \ldots, k\in K\}$

$R \subseteq \underbrace{S\times S\times\cdots\times S}_{n}$ n-arna relacija na skupu S

algebarska operacija je funkcija s $\underbrace{S\times S\times S\times\ldots\times S}_{n}$ **u S** (n-arna)

$+ : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $(m,n)\mapsto \underset{+(m,n)}{m+n}$

parcijalna (djelomična) algebarska operacije je funkcija s nekog podskupa Kart. umnoška

$f: R\to S$, $R\subset S\times\cdots\times S$ ("nije svuda definirana")

$- : (R\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N})\to\mathbb{N}$

$a-b=c\in\mathbb{N} \iff a=b+c$

$R=\{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid a\geq b\}$

$2-3$ ne postoji u $\mathbb{N}$

$3-2$ postoji

n=0 $S^0=\{*\}$ $\{*\}\to S$ „odabrani element" „nularna operacija"

n=1 $S^1=S$ unarna operacija $(-): \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ $3\mapsto -3$, $-3\mapsto +3$, $0\mapsto 0$

n=2 $S^2=S\times S$ binarna

n=3 $S^3=S\times S\times S$ ternarna

Algebarska struktura je (neprazni) skup zajedno s jednom ili više zadanih algebarskih operacija

Ako imamo samo jednu binarnu algebarsku operaciju (i ne tražimo neka posebna svojstva)

onda govorimo o binarnoj algebarskoj strukturi ili magmi (naziv po Bourbakiju).

Stariji algebraičari nekad kažu grupoid, ali mi taj naziv rabimo za jedan drugi koncept (Brandtov grupoid) koji je jako značajni koncept u modernoj matematici.

Binarna algebarska operacija (a,b) |---> a*b na skupu S je asocijativna ako

za svaka tri elementa a,b,c iz S vrijedi (a*b)*c = a* (b*c)

...komutativna ako za svaka dva elementa a,b iz S vrijedi a*b = b*a

Magma s asocijativnom operacijom se zove "polugrupa"

Primjer: polugrupa riječi na alfabetu X

$X = \{a, b, c, \dots\}$ neki skup simbola

X^+ su sve (neprazne) riječi s tim alfabetom

$aabc \neq baac$ $\qquad X^+ = \langle X \rangle$

operacija je spajanje (konkatenacija)

$aabc \cdot dabc = aabcdabc$

$(aabc)$ ← notacija sa zagradom

$\mathbb{N}$ $\quad X = \{1\}$

$| = 1$

$|| = 2$

$||| = 3$

$|||| = 4$

$|| + ||| = |||||$

$\mathbb{N} = \{1\}^+$

Drugi primjer X^* su sve riječi, uključujući šutnju

$()$ $\qquad \underbrace{()}_{\text{neutralni element za operaciju}} \cdot (abc) = (abc)$

• BIN. OP. $*$ na S :

Def Element e, $\underbrace{\boxed{e * x = x \quad \forall x \in S}}_{\text{lijevi neutralni element}}$ $\qquad \underbrace{x * e = x \quad \forall x \in S}_{\text{desni n.e.}}$

je lijevi neutralni element

(dvostrani) neutralni element

MONOID (S,*) je binarna algebarska struktura s binarnom operacijom * koja je asocijativna i ima (obostrani) neutralni element e.

X alfabet

Prazna riječ () je neutralni element s obzirom na spajanje riječi, i spajanje je asocijativno dakle X* je monoid.

MONOD = $\underbrace{\text{POLUGRUPA}}_{\text{MAGMA KOJA JE ASOCIJATIVNA}}$ S NEUTRALNIM ELEMENTOM

$X = \{1\}$ $\quad X^+ = \mathbb{N}$ $\quad X^* = \{0, (1), (11), (111), (1111), \dots\}$

$\| \qquad = \mathbb{N}_0 = \{(), (1), (11), (111), (1111) \dots\}$

$\{1, 11, 111, 1111, 11111, \dots\}$

$(1) * (11) = (111)$ $\qquad$ konkatenacija za $\mathbb{N}$ je zbrajanje

$1 + 2 = 3$

IME OPERACIJE (BINARNE) $\diamond, \circ, *, +, \cdot, \times, \oplus, \boxtimes, \boxplus$

lozenge

komp.

multiplikativni simboli

aditivni simboli

Neutralni element za operaciju koju zapisujemo
ADITIVNO pišemo često 1 (jedinični element)
MULTIPLIKATIVNO pišemo često 0

Postoje strukture s dvije operacije, najčešće ćemo govoriti o PRSTENOVIMA gdje je jedna operacija "multiplikativno zapisana", a druga aditivno.

Ako operacija * ima neutralni element e tada kažemo za element g da je h njegov lijevi inverz ako vrijedi h*g = e, desni inverz ako vrijedi g*h = e i (obostrani) inverz (inverzni element od g) ako vrijedi oboje.

Propozicija. Ako binarna operacija * ima lijevi neutralni element e i desni neutralni element e' tada je e = e'.

Dokaz. $\forall x \quad \underbrace{e * x = x}_{\text{LIJEVI N.E.}}$ $\qquad \forall y \quad \underbrace{y * e' = y}_{\text{DESNI N.E.}}$

$x = e' \quad e * e' = e'$ $\qquad y = e \quad e * e' = e$

$$e' = e * e' = e$$

$$\boxed{e' = e}$$

Propozicija. Ako je binarna operacija * asocijativna s obostranim neutralnim elementom e, i ako element g iz S ima lijevi inverz g^{-1} i desni inverz ${}^{-1}g$ tada su oni jednaki (obostrani inverz od g)

$g^{-1} * g = e \qquad g * {}^{-1}g = e$

$${}^{-1}g = e * {}^{-1}g = \underbrace{(g^{-1} * g)}\, * {}^{-1}g = g^{-1} * \underbrace{(g * {}^{-1}g)} = g^{-1} * e = g^{-1}$$

$$g^{-1} = {}^{-1}g$$

Korolar. Ako element u polugrupi ima dva obostrana inverza oni su jednaki

GRUPA je $\overbrace{\text{polugrupa neutralnim elementom}}^{\text{monoid}}$ i u kojoj svaki element ima obostrani inverz.

$(G, *, e, (\ )^{-1})$ postaje unama operacija $\quad g \overset{(\ )^{-1}}{\longmapsto} g^{-1}$

svuda definirana (zatvorenost), asocijativna (polugrupa)

$(a*b)*c = a*(b*c)$

$a * e = e * a$

$\exists a^{-1}, \ a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Slijedeći puta: motiviramo grupe pojmom simetrije

Simetrija je (zamišljena) operacija na nekom objektu koja čuva bitna svojstva tog objekta.

Udžbenik: K. Horvatić, Linearna algebra, Tehnička knjiga 2005. (vidi stranicu zadarmat4)