Matematika 4, 21. travnja 2021.

linearna kombinacija linearnih kombinacija je linearna kombinacija početnih vektora

$v_1, \dots, v_k$ vektori

$\to a_1, \dots, a_k \in K$ mogu biti razni

njihova linearna kombinacija $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$ (novi vektori)

linearna kombinacija tih novih vektora je tipa

$$b_1 (a_{11} v_1 + \dots + a_{1k} v_k) + b_2 (a_{21} v_1 + \dots + a_{2k} v_k) + \dots + b_l (a_{l1} v_1 + \dots + a_{lk} v_k)$$

$$\underbrace{(b_1 a_{11} + b_2 a_{21} + \dots + b_l a_{l1})}_{c_1} v_1 + \underbrace{(b_1 a_{12} + \dots + b_l a_{l2})}_{c_2} v_2 + \dots$$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k$$

$S \subset V$ je skup izvodnica od V ako $\forall v \in V\ \exists a_1, \dots, a_k \in K$ (polje skalara) $\exists v_1, \dots, v_k \in S$

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$$

(svaki vektor iz V je linearna kombinacija elemenata iz S)

Skup $S \subset V$ je linearno nezavisan ako je linearna kombinacija različitih elemenata u S nula jedino onda kada su svi koeficijenti jednaki nuli (ekvivalentno tome, barem jedan od vektora iz S se da napisati kao linearna kombinacija ostalih)

$$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0 \implies a_i = 0\ \forall i$$

$$\Uparrow$$

$$1 v_k = \sum_{i=1}^{k-1} b_i v_i \qquad \Downarrow \qquad 1 v_k - b_1 v_1 - b_2 v_2 - \dots - b_{k-1} v_{k-1} = 0$$

Baza vektorskog prostora je skup koji je skup izvodnica i linearno nezavisan istovremeno.

Ako podrazumijevamo aksiom izbora, tada svaki vektorski prostor ima bazu.

Svake dvije baze istog vektorskog prostora V imaju istu kardinalnost („imaju isti broj elemenata"), koju zovemo dimenzija dim(V) prostora V. Kardinalnost može biti konačna ili beskonačna.
Mi ćemo invarijantnost dimenzije (invarijantnost znači da se ne mijenja, stalnost) dokazati kad postoji barem jedna konačna baza.

$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathcal{B}' = \{f_1, \dots, f_m\}$

$\mathcal{B}$ je baza $\implies$ svaki element u V, pa stoga posebno i svaki vektor u B' se može napisati kao linearna kombinacija vektora iz B

$$f_i = \sum_{l=1}^{n} a_{il} e_l$$

**posebno, možemo vektor f1 napisati kao linearnu kombinaciju elemenata iz B**
**Promatrajmo B U {f1}**

$e_1,\dots,e_n,f_1 \qquad a_{11}e_1+\dots+a_{1n}e_n - f_1 = 0$

$f_1\neq 0 \Rightarrow \exists i,\ a_{1i}\neq 0$

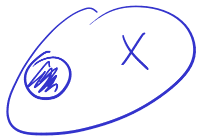
$$a_{1i}e_i = f_1 - a_{11}e_1 - \dots - a_{1i-1}e_{i-1} - a_{1i+1}e_{i+1} - \dots - a_{1n}e_n \qquad /:a_{1i}$$

$$e_i = \frac{f_1}{a_{1i}} - \frac{a_{11}}{a_{1i}}e_1 - \dots \overbrace{\frac{a_i}{a_{1i}}e_i}^{\text{preskočeno}} - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{1i}}e_n$$

$\{e_1,\dots,\hat{e_i},\dots,e_n,f_1\}$ nova baza!

$B_2 \qquad \{f_1, X, f_m\} = B'$ ako $m<n$

$B_2 \cup f_1$ odbacimo $e_j$



$B \qquad B'$

$e_1,\dots,e_n \qquad f_1,\dots,f_m$

$e_1,\dots,\hat{e_i},\dots,\hat{e_j},\dots,\hat{e_k},\dots,e_n$

$f_1 \quad f_2 \quad f_m$

baza

$e_1 = \sum(\ )f_\ell$

$e_1 - \sum(\ )f_\ell = 0 \Rightarrow\Leftarrow$

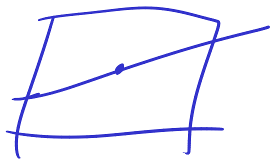
Vektorski potprostor je podskup skupa vektora
koji je vektorski prostor s obzirom na nasljeđenu operaciju
množenja skalara i vektora, tj. možemo i dalje zbrajati i
množiti s brojem, pa onda možemo raditi i linearne kombinacije
elemenata iz tog podskupa da ponovno dobijemo element iz
tog podskupa.

$W \subseteq V,\ K$

$k\cdot v,\ v_1+v_2 \quad \left.\right\} \quad v_1,\dots,v_\ell\in W,\ \lambda_1 v_1+\dots+\lambda_\ell v_\ell \in W$

$S\subset V$ podskup

$\mathrm{Span}(S)$ linearna ljuska $= \{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i v_i \mid v_i\in S\}$



Dakle, vektorski potprostor je neprazan podskup skupa vektora koji je zatvoren s obzirom na linearne kombinacije, tj. koji je sam svoja linearna ljuska. Kao konzekvenca slijedi da je skup vektora vektorski potprostor onda i samo onda kad je sam svoja linearna ljuska (tj. zatvoren s obzirom na linearne kombinacije).