1

SKUPOVI I PRESLIKAVANJA

Svrha je ovog poglavlja uvesti uobičajenu terminologiju i notaciju koja će se dosljedno rabiti u ovom udžbeniku. Osim kratkog opisa nekih logičkih simbola, u poglavlju se daje pregled pojmova i činjenica elementarne teorije skupova. Pretpostavljajući da čitalac tu građu u većoj ili manjoj mjeri već poznaje, većina standardnih dokaza je ispuštena.

1.1. O simbolima i terminima

Nekoliko uvodnih riječi o znakovima, nazivima i nekim pojmovima, uobičajenim u matematici, kojima ćemo se služiti kako bismo tekst učinili jasnijim, preglednijim i sažetijim. Strogi pristup tom gradivu je predmet posebnih matematičkih disciplina, kao što su matematička logika, osnove matematike i sl. Najprije nešto o izjavama u matematici i pripadnim simbolima. Kao što znamo, **izjava** je smislena rečenica koja može biti samo istinita ili lažna. Na primjer upitna rečenica ne može biti izjava. Pojedine izjave možemo povezati veznicima; tako dolazimo do **složenih izjava**.

izjava=sud=iskaz
Složena izjava je izjava čija istinitosna vrijednost zavisi od jedne ili više drugih izjava.

Konjunkcija izjava A i B je složena izjava koju označujemo s

$$A \wedge B\,,$$

a nastaje povezivanjem izjava A i B veznikom *i*. Tu izjavu zato čitamo "*A i B*" ili također "*A et B*". Istinita je jedino u slučaju kad su i izjava A i izjava B istinite; inače je lažna. Za konjunkciju je uobičajena oznaka i $A\&B$.

Disjunkcija izjava A i B je složena izjava, koju označujemo s

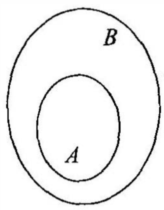
$$A \vee B\,,$$

a dobivamo je povezivanjem izjava A i B veznikom *ili*. Čitamo "*A ili B*" odnosno "*A vel B*". Ta je izjava istinita ako je istinita izjava A ili je istinita izjava B ili su istinite obje te izjave (inkluzivna disjunkcija!). Drugim riječima, $A \vee B$ je lažna jedino onda kad su obje izjave, A i B, lažne.

Implikacija je složena izjava, označena kao

$$A \Rightarrow B \ ,$$

koju čitamo "*A povlači B*" ili "*A implicira B*". Ta je izjava istinita uvijek kad je B istinita izjava ili kad su obje izjave A i B lažne. Lažna je dakle jedino u slučaju kad je izjava A istinita, a izjava B lažna. Posebno, ako su izjave A i $A \Rightarrow B$ istinite, zaključujemo da je i izjava B istinita; to će biti naša standardna primjena implikacije. Kažemo (posebno u tom slučaju),



da je A **dovoljan uvjet** za B, odnosno da je B **nuždan uvjet** za A.

Ekvivalencija izjava A i B je složena izjava, koju zapisujemo

$$A \Leftrightarrow B \ ,$$

i čitamo "*A je jednakovrijedna kao B*" ili češće "*A je ekvivalentna s B*". Ta je izjava istinita kad su obje polazne izjave A i B istinite, ili su obje lažne; inače je lažna. Iz prethodno rečenog, možemo "izračunati" da će to biti jedino u slučaju kad

$$A \Rightarrow B \quad \wedge \quad B \Rightarrow A \ .$$

Zato se i govori "*A je nuždan i dovoljan uvjet za B*", odnosno "*A je ako i samo ako je B*" ili "*A je onda i samo onda, kada je B*". To su termini kojima ćemo u pojedinim konkretnim slučajevima opisivati ekvivalenciju.

Ilustrirajmo navedene pojmove s nekoliko primjera. Promatrajmo izjave:
A: 3 *je mjera za* 9;
B: 9 *je višekratnik od* 3;
C: 3 *je paran broj* .
Onda su konjunkcije $A \wedge C$ i $B \wedge C$ lažne, dok je $A \wedge B$, dakako, istinita. U drugu ruku, sve su tri disjunkcije $A \vee C$, $B \vee C$ i $A \vee B$ istinite. Nadalje, istinita je implikacija $B \Rightarrow A$, ali, prema našoj definiciji, i $C \Rightarrow A$, dok je $A \Rightarrow C$ lažna. Konačno, kako je uz $B \Rightarrow A$ istinita i obrnuta implikacija $A \Rightarrow B$, imamo zaključak da je $A \Leftrightarrow B$, tj. da su izjave A i B ekvivalentne.

Predikat je izjava koja zavisi od jednog ili više parametara/argumenata.

biti mjera = dijeliti = biti djelitelj (divizor) od

3 dijeli 9 ali 9 ne dijeli 3 jer 9 možemo podijeliti na cijele dijelove

Promotrimo sada rečenicu "*x je mjera za y*". To očito nije izjava jer se ne može utvrditi niti da je istinita, niti da je lažna. Takvu rečenicu nazivamo **izjavna funkcija**, u ovom slučaju u dvije **varijable**; pišemo

(predikat, prirok)

$$I = I(x, y) \ .$$

Specifikacijom varijabli izjavna funkcija postaje izjava. U našem je primjeru $I(3,9)$ istinita izjava, a $I(9,3)$ lažna. Općenito, imat ćemo izjavne funkcije i s više varijabli. U drugu ruku, od interesa su i funkcije sa samo jednom varijablom; njima se opisuje neko **svojstvo** promatranih objekata. Na primjer, izjavna funkcija

$$I = I(x),$$

opisana rečenicom "*x je paran*", utvrđuje određeno svojstvo prirodnih brojeva.

Posebno je važan slučaj kad izjavna funkcija prelazi u izjavu pomoću neodređenih zamjenica **svaki** odnosno **neki**, tzv. kvantifikatora.

Univerzalni kvantifikator, u oznaci $\forall$, kazuje da je izjavna funkcija istinita za **sve** vrijednosti neke od varijabli. Tako u našem primjeru pišemo

$$(\forall y) \qquad I(1, y),$$

i čitamo "*svaki broj y je takav, da je* 1 *mjera od y*". Nasuprot tome, **egzistencijalni kvantifikator**, u oznaci $\exists$, tvrdi da je izjavna funkcija istinita za **neki** izbor varijable. Na primjer pišemo

$$(\exists x) \qquad I(x, 9),$$

i čitamo "*postoji (bar jedan) broj x takav da je x mjera za* 9". To će, dakako, biti brojevi $x = 1, 3$ i 9. Katkada je taj izbor jedinstven; tada egzistencijalni kvantifikator označujemo s $\exists!$ ili $\exists_1$. U našem primjeru

$$(\exists!\, x) \qquad I(x, 1),$$

što znači i čita se "*postoji točno jedan broj x takav da je x mjera za* 1", i to je broj $x = 1$. Izjavne funkcije možemo prevesti u izjave i kombiniranjem kvantifikatora. Imamo na primjer

$$(\forall\, x)(\exists\, y) \qquad I(x, y) \ ,$$

što čitamo "*za svaki x postoji y takav da je x mjera za y*".

U pravilu su vrijednosti varijabli u izjavnoj funkciji (pa onda i kod kvantifikatora) ograničene na neki određeni skup (vidi točku 1.2.). U našim primjerima to je bio skup prirodnih brojeva.

Na kraju, nešto o simbolu $=$, koji čitamo "*biti jednak*". Govoreći općenito, s $a = b$, odnosno $a \neq b$, označivat ćemo da a i b predstavljaju jedan te isti objekt, odnosno da se radi o različitim objektima. Međutim, u nekim teorijama simbol $=$ može imati i neko drugo, posebno definirano značenje.

Još nekoliko napomena. Tradicionalno, počevši još od Euklida i geometrije, većina se matematičkih disciplina, u višoj fazi izgradnje, nastoji strogo utemeljiti. To znači da se, prihvaćajući neke jednostavne pojmove kao poznate, svi ostali pojmovi opisuju pomoću njih, tj. definiraju. I nadalje, polazeći od određenog broja činjenica, koje se prihvaćaju kao istinite, sve se ostale tvrdnje izvode iz njih, tj. dokazuju. To je **aksiomatski pristup** nekoj matematičkoj disciplini.

Intenzivna definicija (definicija po Aristotelu) pojam je određen nadređenim pojmom i specifičnim svojstvom kojom se razlikuje od drugih instanci nadređenog pojma

Suvremene matematičke teorije, od kojih ćemo neke upoznati i u ovoj knjizi, slijede više-manje upravo tu shemu. Nabrojit ćemo nekoliko termina koji su u vezi s takvim pristupom, a s kojima ćemo se u daljnjem tekstu neprekidno susretati.

Podrazumijevamo neki logički sustav

U svakom logičkom sustavu fiksna je sintaksa i pravila zaključivanja

Osnovni pojam neke teorije (u pravilu) jednostavan je pojam, koji se smatra poznatim pa se ne opisuje pomoću drugih pojmova te teorije.

osnovni ili primitivni pojam ("kategorija")

Definirani pojam neke teorije je pojam koji se u toj teoriji opisuje (definira!) pomoću osnovnih pojmova i prethodno definiranih pojmova.

Teorija zadana vokabularom, sintaksom i aksiomima

Aksiom za neku teoriju je polazna, obično vrlo jednostavna tvrdnja u nekoj teoriji koja se bez dokaza prihvaća kao istinita.

Mi obično koristimo klasičan račun predikata s jednakošću (klasična logika prvog reda)

Teorem u okviru neke teorije je izjava, tvrdnja, čija se istinitost dokazuje, tj. izvodi logičkim zaključivanjem iz aksioma i već dokazanih teorema te teorije. Neki važni (i obično teški) teoremi imaju i ime, često po matematičaru koji ih je prvi dokazao (npr. teorem o dimenziji, Cayleyjev teorem, Binet–Cauchyjev teorem). U drugu ruku, teoreme za koje postoje jednostavni i kratki dokazi obično nazivamo **propozicije**. Teorem koji sam za sebe nije od posebnog interesa nego služi kao etapa u dokazu nekog važnijeg i složenijeg teorema, naziva se **lema**. Konačno, **korolar** je teorem koji je neposredna i jednostavna posljedica drugog, prethodno dokazanog teorema, i njegov je dokaz toliko očigledan, da ga obično ispuštamo.

U formalnom zapisu:
varijable
konstante
logički veznici
sintaktički simboli
istaknuti predikati
funkcijski simboli

Pravilo zaključivanja modus ponens (MP)

$$\frac{\begin{array}{c} P \\ P \Rightarrow Q \end{array}}{Q}$$

Jednakost je istaknuti predikat s dva argumenta =(x,y) pišemo i x=y za kojeg zahtijevamo svojstva
x=x

ako x=y i y=z tada i x=z

ako x= y tada i y=x

za svaki predikat P ako P(x) i ako x=y tada i P(y)

ZADACI

$$\frac{\neg\neg P}{P}$$

negacija negacije daje afirmaciju

1. **Negacija** izjave A je izjava koja se obično označuje s $\neg A$ i čita "*nije* A" ili "*non* A", a istinita je ako i samo ako je izjava A lažna. Što možeš reći o složenoj izjavi $A \wedge (\neg A)$ i složenoj izjavi $A \vee (\neg A)$? Dokaži da su složene izjave

$$\neg(A \wedge B) \quad i \quad (\neg A) \vee (\neg B)$$

ekvivalentne, za bilo koje izjave A i B.

U klasičnoj logici ili je sud P istinit ili je negacija od P istinita (tertium non datur)

$$\left.\begin{array}{l} \neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \\ \neg(A \vee B) \Longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B \end{array}\right\}$$

de Morganovi zakoni u računu sudova

2. Kažemo da je složena izjava **tautologija** ako je istinita bez obzira na istinitost polaznih izjava. Pokaži da su izjave $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ i $(A \wedge B) \Rightarrow B$ tautologije, dok $A \vee B$ to nije.

3. Neka je izjavi A pridružen broj 0 ako je ta izjava lažna, odnosno broj 1 ako je istinita. Onda se istinitost, odnosno lažnost, složene izjave može prikazati u zavisnosti od vrijednosti polaznih izjava pomoću tzv. **tablice istinitosti**. Na primjer, za izjavu $A \vee B$ imamo tablicu

A	0	0	1	1
B	0	1	0	1
A ∨ B	0	1	1	1

.

Odredi tablice istinitosti za $A \wedge B$, $A \Rightarrow B$ i $A \Leftrightarrow B$. Nadalje, prikaži tablicama složene izjave $\neg(A \Rightarrow B)$ i $A \wedge (\neg B)$. Što zapažaš?

4. Neka je izjava $A \Rightarrow B$ istinita, a $B \Rightarrow A$ lažna. Tada često kažemo da je A **samo** dovoljan uvjet za B, odnosno da je B **samo** nuždan uvjet za A. Ilustriraj to s nekoliko primjera iz svakidašnjeg života i matematike. **(nužan)**

5. Implikaciju "*ako je broj pozitivan, onda je i njegov kvadrat pozitivan*", izrazi pomoću termina nuždan i dovoljan.

6. Kakav god bio prirodni broj x, uvijek se može naći prirodni broj y sa svojstvom da je razlika $x - y$ mjera za bilo koji broj z. Zapiši tu nezgrapnu rečenicu kratko, pomoću kvantifikatora. [Uputa: $(\forall x)$ $(\exists y)$ $(\forall z)$ $(x - y \mid z)$, gdje smo s $(x - y \mid z)$, kako je uobičajeno, označili da $x - y$ dijeli z.]

1.2. Skupovi

Intuitivno je jasno što se podrazumijeva pod pojmom **skup**. To je svaka kolekcija objekata, bilo nabrojenih pojedinačno, bilo karakteriziranih nekim zajedničkim svojstvom. Dakako, to nije definicija skupa jer je kolekcija samo sinonim za skup. Mi ćemo prigodno upotrebljavati i neke druge nazive za skup, kao što su **množina**, **familija** itd. Daljnja analiza pokazuje kako je pojam skupa toliko jednostavan da ga i nije moguće definirati, tj. opisati uz pomoć još jednostavnijih pojmova. Prema tome, skup se smatra osnovnim, nedifiniranim pojmom u matematici.

Govorimo npr. o skupu svih građana jednoga grada, o skupu svih slova nekog alfabeta, o skupu svih točaka na pravcu ili u ravnini, o skupu svih koncentričnih kugala u prostoru i onda, naravno, o raznim skupovima brojeva:

o skupu prirodnih brojeva, cijelih, racionalnih itd. Za te skupove imamo standardne oznake:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \text{skup prirodnih brojeva,} \\
\mathbb{Z} &= \text{skup cijelih brojeva,} \\
\mathbb{Q} &= \text{skup racionalnih brojeva,} \\
\mathbb{R} &= \text{skup realnih brojeva,} \\
\mathbb{C} &= \text{skup kompleksnih brojeva.}
\end{aligned}$$

Tu ćemo notaciju upotrebljavati dosljedno. Uopće, skupove ćemo označivati velikim tiskanim slovima, kao $A, B, C, \ldots, X, Y$.

Objekte koji tvore dani skup nazivamo **elementima** toga skupa ili njegovim **članovima** ili, također, **točkama** skupa, i to bez obzira na to radi li se zaista o točkama ili o nekim drugim, možda i apstraktnim objektima. Shematski, skup obično prikazujemo kao

gdje točke predstavljaju elemente skupa (tzv. Vennov dijagram). Činjenicu da neki objekt x pripada skupu X zapisujemo

$$x \in X$$

i čitamo "*x je element skupa X*". U drugu ruku, simbol

$$x \notin X$$

$x \notin X \overset{def}{\Longleftrightarrow} \neg(x \in X)$

$A \neq B \overset{def}{\Longleftrightarrow} \neg(A = B)$

označivat će, da objekt x ne pripada skupu X. Na primjer,

$$7 \in \mathbb{N}, \qquad 0 \notin \mathbb{N}, \qquad \sqrt{2} \in \mathbb{R}, \qquad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Zadati skup znači propisati njegove elemente, tj. skup X je zadan ako za svaki objekt možemo reći pripada li skupu X ili mu ne pripada. Ako skup ne sadrži previše elemenata, možemo ga zapisati eksplicitno, kao npr.

$$\begin{aligned}
A &= \{-1, 1\}\,, \\
B &= \{a, b, c, d\}\,, \\
C &= \{x\}\,.
\end{aligned}$$

Posljednji se skup sastoji iz jednog jedinog elementa x. S logičkog bi stajališta trebalo razlikovati skup $\{x\}$ od njegova elementa $x \in \{x\}$, iako ćemo ih često (nekorektno) poistovjećivati. Iz praktičnih razloga uvodimo i pojam **praznog skupa**, tj. skupa bez ijednog elementa, za koji ćemo upotrebljavati simbol $\emptyset$.

Ako skup ima mnogo elemenata, praktično je nemoguće popisati sve elemente, kako je učinjeno u prethodnim primjerima. Ako elemenata ima beskonačno mnogo, to nije moguće ni teoretski. Često je u takvom slučaju pogodan zapis skupa pomoću tzv. **karakterističnog svojstva**. Neka je p izvjesno svojstvo, a $p(x)$ neka označava, da to svojstvo ima objekt x; onda je s

$$X = \{x \mid p(x)\}$$

opisan skup, čiji svi elementi, i samo oni, posjeduju svojstvo p. Na primjer,

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid x^2 + 1 = 0\} = \{-i, i\} , \\ B &= \{x \mid x = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\} = \mathbb{Q} , \\ C &= \{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -2, 0, 2, 4, \ldots\} = 2\mathbb{Z} , \\ D &= \{x \mid x = n^2,\ n \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, 4, 9, \ldots\} . \end{aligned}$$

Neka su A i B skupovi sa svojstvom da je svaki element skupa A ujedno element skupa B. U tom slučaju kažemo da je A **podskup** od B ili da je A **sadržan** u B, odnosno da je B **nadskup** skupa A, ili da B **sadrži** A, i pišemo

$$A \subset B .$$

Pritom relaciju $\subset$ nazivamo **inkluzija**. Naravno,

$$A \not\subset B$$

označivat će da A nije podskup od B. Na primjer, imamo ovaj niz inkluzija

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} .$$

Podskup se može zadati i dodatnim svojstvom, koje moraju zadovoljavati elementi skupa. Na primjer,

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1] \subset \mathbb{R} .$$

Očito je da za svaki skup A vrijedi

$$\emptyset \subset A \quad \text{i} \quad A \subset A .$$

Za skupove A i B kažemo da su **jednaki** i pišemo

$$A = B ,$$

ako se oni sastoje iz istih elemenata, tj. ako vrijedi

$$A \subset B \quad \text{i} \quad B \subset A .$$

Ako to nije slučaj, pišemo $A \neq B$. Ako vrijedi

$A \subsetneq B \iff (A \subset B \wedge A \neq B)$

$$A \subset B \quad \text{i} \quad A \neq B\,,$$

kažemo da je A **pravi** podskup od B.

Skup svih podskupova nekog skupa X označavamo s $\mathcal{P}(X)$ i nazivamo **partitivni skup** skupa X. Na primjer, za $X = \{a, b\}$ je

pars, partis Lat. dio

$$\mathcal{P}(X) = \{\{a,b\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}.$$

skup dijelova

Za partitivni skup od X još je uobičajena oznaka 2^X, iz razloga koji će biti objašnjen kasnije (vidi Zad. 9. u 1.5.).

za svaki element u skupu kažemo je li je ili nije u podskupu: 2 mogućnosti

Zato ako skup S ima n elemenata, tada P(S) ima 2 na n-tu elemenata

Sada ćemo definirati niz operacija sa skupovima koje omogućuju da se od zadanih skupova formiraju novi skupovi.

Pod **unijom** skupova A i B razumijevamo novi skup $A \cup B$, čiji elementi imaju svojstvo da pripadaju bar jednom od skupova A i B. Prema tome,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}\,.$$

Primijetimo da je uvijek

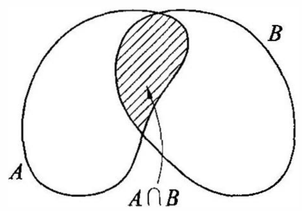
$$A \cup \emptyset = A \quad \text{i} \quad A \cup A = A$$

i, uopće, $B \subset A$ povlači

$$A \cup B = A\,.$$

Presjek skupova A i B definiramo kao skup $A \cap B$, čiji elementi imaju svojstvo da pripadaju i skupu A i skupu B, tj.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}\,.$$



Očito je

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad \text{i} \quad A \cap A = A$$

i, općenito, iz $B \subset A$ slijedi

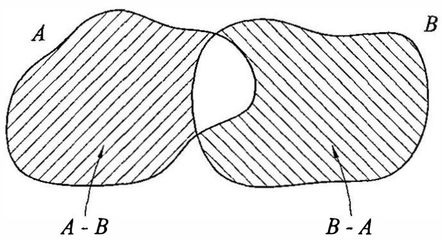
$$A \cap B = B\,.$$

Ako je $A \cap B = \emptyset$, kažemo da su A i B **disjunktni** skupovi.

Diferencija ili **razlika** skupova A i B je skup $A - B$, koji se sastoji iz svih onih elemenata skupa A koji ne pripadaju skupu B; drugim riječima,

$$A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}\,.$$

Obično danas koristimo oznaku $A \setminus B$



Lako se provjeri (koristeći Tm. 1 koji slijedi), da uvijek vrijedi

$$(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B\ .$$

Ako je $A \subset X$, onda diferenciju $X - A$ nazivamo **komplement** od A u skupu X i pišemo

$$A^C = C_X A = X - A\ ,$$

Oznaka: A^c ako je skup X poznat

ili često samo CA, ako je jasno u odnosu na koji skup se uzima komplement. Očito vrijedi

$$A \cup CA = X, \qquad A \cap CA = \emptyset$$

i nadalje je

$$CX = \emptyset, \qquad C\emptyset = X, \qquad C(CA) = A.$$

Sljedećim teoremom su obuhvaćena osnovna svojstva definiranih operacija.

TEOREM 1

Ako su A, B, C i X bilo koji skupovi, onda vrijede

(1) *zakoni asocijacije, tj.*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\ ,$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\ ;$$

(2) *zakoni komutacije, tj.*

$$A \cup B = B \cup A\ ,$$
$$A \cap B = B \cap A\ ;$$

(3) *zakoni distribucije, tj.*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\ ,$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\ ;$$

(4) *De Morganove formule, tj.*

$$X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)\ ,$$
$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)\ .$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Dokaz

Jednostavan, slijedi neposredno iz definicija operacija. Dokažimo radi ilustracije prvu od formula (4). Kako dokazujemo jednakost dvaju skupova, prema definiciji treba provjeriti obje inkluzije. Najprije dokazujemo inkluziju $X - (A \cup B) \subset (X - A) \cap (X - B)$. Neka je $x \in X - (A \cup B)$. To znači da je $x \in X$ i $x \notin A \cup B$. Prema tome, $x \notin A$ i $x \notin B$, dakle je $x \in X - A$ i $x \in X - B$, što znači da je $x \in (X - A) \cap (X - B)$. Ostaje pokazati inkluziju $(X - A) \cap (X - B) \subset X - (A \cup B)$. Ako je $x \in (X - A) \cap (X - B)$, onda je $x \in X - A$ i $x \in X - B$. Prema tome, $x \notin A$ i $x \notin B$, dakle $x \notin A \cup B$. Odatle slijedi da je $x \in X - (A \cup B)$ i tvrdnja je dokazana. ∎

ZADACI

1. U kakvom su odnosu skupovi $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ i $\{\{\emptyset\}\}$? Je li $\emptyset = \{\emptyset\}$ i $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$?

2. Pokaži da za bilo koje skupove vrijedi
$$A \cap B \subset A \subset A \cup B.$$

3. Uvjeri se da je uvijek istina
   (a) $A \subset B$ i $B \subset C$ povlači $A \subset C$;
   (b) $A \subset C$ i $B \subset C$ povlači $A \cup B \subset C$;
   (c) $C \subset A$ i $C \subset B$ povlači $C \subset A \cap B$.

4. Dokaži da podskupovi danog skupa X imaju i ova svojstva:
   (a) $C(A - B) = CA \cup B$;
   (b) $A \subset B$ povlači $CB \subset CA$.

5. Dokaži da za bilo koje skupove A, B, C vrijede sljedeće skupovne jednakosti:
   (a) $A - (A - B) = A \cap B$;
   (b) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$;
   (c) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$.

6. Poopći pojam unije i presjeka skupova za bilo koji broj skupova. Uvjeri se da i u toj situaciji vrijede zakoni iz Tm. 1.

7. Poopći De Morganove formule.

1.3. Preslikavanja

Neka su X i Y neprazni skupovi, a f neka je zakon koji svakom elementu skupa X pridružuje (jedan jedini) element skupa Y. Onda uređenu trojku

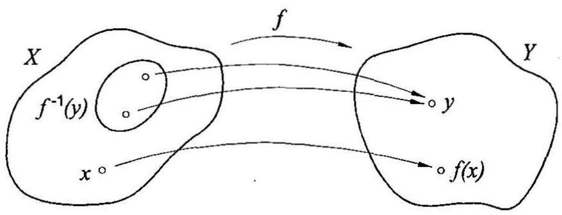
$$(X, Y, f)$$

nazivamo **preslikavanje** skupa X u skup Y ili **funkcija** sa skupa X u skup Y, i obično pišemo

$$f : X \to Y .$$

Skup X nazivamo **područje definicije** ili **domena**, skup Y **područje vrijednosti** ili **kodomena**, a f **zakon** danog preslikavanja. Kad je iz konteksta jasno što su domena i kodomena preslikavanja, često poistovjećujemo preslikavanje s njegovim zakonom, i govorimo jednostavno o funkciji f.

Neka je s $f(x) \in Y$ označen onaj element skupa Y koji je prema zakonu f pridružen elementu $x \in X$. Kažemo da je $f(x)$ **slika od** x u odnosu na preslikavanje f. Kaže se još da je $f(x)$ **vrijednost funkcije** f za vrijednost **varijable** (argumenta) x, ili u "*točki*" $x \in X$.



U drugu ruku, neka je $y \in Y$ bilo koji element, a

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\} \subset X$$

neka je skup svih elemenata iz X, čija je slika dani element y. Onda kažemo da je $f^{-1}(y)$ **praslika od** y, u odnosu na preslikavanje f. Primijetimo da praslika nekog elementa iz Y može biti i prazan skup.

Ako su $A \subset X$, odnosno $B \subset Y$ dani podskupovi, onda skupove

$$f(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\} \subset Y$$

i

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X$$

nazivamo **slikom podskupa** A, odnosno **praslikom podskupa** B u odnosu na preslikavanje f. Praslika od B je očito unija praslika elemenata iz B. Primijetimo da je uvijek

$$f^{-1}(Y) = X ,$$

dok je, općenito,

$$f(X) \subset Y \ ,$$

i taj skup nazivamo **slikom domene** X s obzirom na preslikavanje f, i označavamo katkada sa $S(f)$.

PRIMJERI

1. Neka je $A \subset X$ podskup od X, a $i : A \to X$ preslikavanje dano zakonom $i(x) = x$, za svaki x iz A. Onda kažemo da je funkcija i **inkluzija** od A u X. Specijalno, ako je $A = X$, inkluziju i nazivamo **identiteta** na X (i označujemo obično s e).

2. Neka je $a \in Y$ bilo koji element, a $f_a : X \to Y$ preslikavanje definirano s $f_a(x) = a$, za svaki $x \in X$. Onda f_a nazivamo konstantnim preslikavanjem ili **konstantom** (određenom s $a \in Y$).

3. Neka je $f : X \to Y$ preslikavanje čija je kodomena Y skup realnih brojeva ili neki njegov podskup. Onda kažemo da je f **realna funkcija na skupu** X. Ako je npr. X skup svih kružnica u ravnini, a $f : X \to \mathbb{R}$ preslikavanje koje svakoj kružnici pridružuje njezin polumjer, onda je f jedna realna funkcija na X.

4. Preslikavanje $f : X \to Y$ čije su i domena i kodomena skup $\mathbb{R}$ ili njegovi podskupovi, zove se **realna funkcija realne varijable**. Takve su npr. ınkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana zakonom $f(x) = 2x$, odnosno funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $g(x) = x^2$.

5. Neka je $f : \mathbb{N} \to X$ preslikavanje skupa prirodnih brojeva u skup X. Takvo se preslikavanje zove **niz u skupu** X. Ako za svaki $k \in \mathbb{N}$ označimo sliku $f(k) = x_k$, onda niz možemo pisati i u tradicionalnoj formi
$$f = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \ ,$$
popisujući redom vrijednosti funkcije f. Za element $x_k \in X$ kažemo da je k-ti član danog niza.

Sljedeće propozicije govore o ponašanju danog preslikavanja prema podskupovima domene, odnosno kodomene.

PROPOZICIJA 1

Neka je $f : X \to Y$ dano preslikavanje, a $A, B \subset X$ bilo koji podskupovi domene. Onda vrijedi

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B);$

(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. ■

Tvrdnje je lako dokazati i generalizirati na bilo koji broj podskupova od X. Primijetimo da u (2) neće općenito vrijediti znak jednakosti. Neka je npr. $X = \{a, b\}$, $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $Y = \{y\}$, a $f : X \to Y$ jedina moguća, konstantna funkcija. Očito je $f(\emptyset) = \emptyset$, dakle $f(A \cap B) = \emptyset$, a u drugu ruku je $f(A) \cap f(B) = Y$, što pokazuje da u tom slučaju

$$f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B).$$

Tako smo **protuprimjerom** pokazali da u (2) općenito ne može stajati znak jednakosti.

PROPOZICIJA 2

Neka je $f : X \to Y$ dano preslikavanje, a $C, D \subset Y$ bilo koji podskupovi. Onda vrijedi

(1) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$;

(2) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$;

(3) $f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$. ■

Tvrdnje (1) i (2) se lako generaliziraju na bilo koji broj podskupova od Y. Uočimo da se, s obzirom na osnovne operacije sa skupovima, praslike bolje ponašaju od slika. Na primjer iz $C \cap D = \emptyset$, prema (2), slijedi da su i praslike tih skupova disjunktne, što ne mora biti točno za slike.

Neka su sada $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ dva preslikavanja sa svojstvom da se kodomena prvog preslikavanja podudara s domenom drugog. Onda je njima jednoznačno određeno preslikavanje

$$h : X \to Z$$

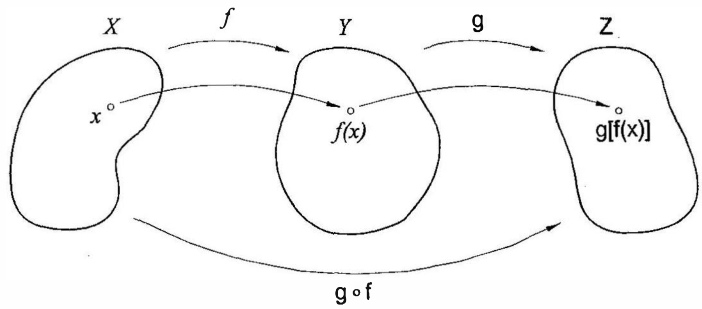
definirano zakonom

$$h(x) = g[f(x)],$$

za svaki $x \in X$. Preslikavanje h označavamo kao

$$g \circ f$$

i nazivamo **kompozicijom preslikavanja** f i g.



Ako su npr. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije dane s $f(x) = 2x$ odnosno $g(x) = \sin x$, onda je kompozicija $g \circ f$ definirana s

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x) = \sin 2x.$$

U ovom je slučaju određena i kompozicija $f \circ g$, i ona je dana s

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sin x) = 2 \sin x.$$

Primjer pokazuje da **komponiranje preslikavanja nije komutativno**.

Operacija komponiranja preslikavanja je, međutim, **asocijativna**. Vrijedi naime

PROPOZICIJA 3

Neka su $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ i $h : Z \to V$ bilo koja preslikavanja. Onda su definirane kompozicije $(h \circ g) \circ f$ i $h \circ (g \circ f)$ i za svaki $x \in X$ vrijedi

$$[(h \circ g) \circ f](x) = [h \circ (g \circ f)](x)\ .$$

Dokaz

Na osnovi definicije komponiranja vrijedi redom

$$\begin{aligned} [(h \circ g) \circ f](x) &= (h \circ g)[f(x)] = h\{g[f(x)]\}\ , \\ [h \circ (g \circ f)](x) &= h[(g \circ f)(x)] = h\{g[f(x)]\} \end{aligned}$$

pa je asocijativnost dokazana. ■

Zapamtimo to važno svojstvo komponiranja na koje ćemo se često pozivati.

Za dva preslikavanja $f : X \to Y$ i $g : X' \to Y'$ kažemo da su **jednaka**, i pišemo (pojednostavnjeno)

$$f = g\ ,$$

ako se ta preslikavanja podudaraju u domeni, kodomeni i u zakonu pridruživanja, tj. ako vrijedi

$$X' = X \quad \text{i} \quad Y' = Y\ ,$$

kao i

$$g(x) = f(x)$$

za svaki $x \in X$. Ako su npr. f, g i h tri preslikavanja, koja se mogu komponirati (u tom poretku), onda tvrdnju iz Prop. 3 možemo pisati kao jednakost preslikavanja

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Uočimo da u definiciju jednakosti bitno ulazi domena i kodomena. Ako je

$$X = \{(4k+1)\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

a $f, g : X \to \mathbb{R}$ realne funkcije dane s $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1$, onda je u smislu naše definicije $f = g$.

Neka je $f : X \to Y$ dano preslikavanje, a $A \subset X$ podskup od X. Onda definiramo preslikavanje

$$g : A \to Y$$

stavljajući

$$g(x) = f(x)$$

za svaki $x \in A$, i to preslikavanje zovemo **restrikcija** ili **ograničenje** od f na skup A i pišemo

$$g = f/_A .$$

U drugu ruku, ako je dano preslikavanje $g : A \to Y$, ako je $A \subset X$, a $f : X \to Y$ je bilo koje preslikavanje sa svojstvom da je $f/_A = g$, onda kažemo da je f **ekstenzija** ili **proširenje** od g preko cijelog skupa X.

Dok je restrikcija preslikavanja očito jednoznačno određena, proširenja preslikavanja će općenito biti mnogo. Na primjer, funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane s $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1$ su različita proširenja funkcije

$$X \to \mathbb{R}$$

opisane u prošlom primjeru, preko skupa $\mathbb{R}$. Naravno, ima mnogo drugih proširenja te funkcije.

Na preslikavanja možemo postaviti neke dodatne zahtjeve. Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je **surjektivno** (ili surjekcija), ako je slika domene cijela kodomena, tj. ako vrijedi

$$f(X) = Y.$$

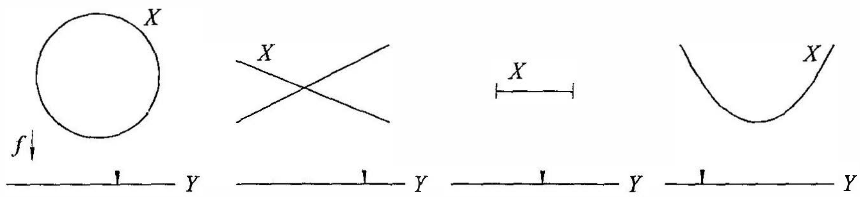
To će očito biti ako i samo ako je za svaki $y \in Y$ praslika $f^{-1}(y) \neq \emptyset$.

Preslikavanje $f : X \to Y$ je **injektivno** (ili injekcija) ako različiti elementi iz domene imaju različite slike, tj. ako iz $x_1, x_2 \in X$ i $x_1 \neq x_2$ slijedi

$f(x_1) \neq f(x_2)$. To će dakako biti ako i samo ako se za svaki $y \in Y$ praslika $f^{-1}(y)$ sastoji od najviše jednog elementa.

Konačno, za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je **bijektivno** (ili bijekcija), ako je i surjektivno i injektivno.

Na primjer, identiteta je uvijek bijekcija. Ako su realne funkcije f, g, h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane s $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$, onda su prva i treća funkcija bijekcije, dok druga to nije (zapravo, ta funkcija nije niti surjekcija niti injekcija). Ili geometrijski primjer: Neka je Y pravac u ravnini, a za X uzmimo u toj istoj ravnini redom kružnicu, par pravaca, segment odnosno parabolu (vidi sliku).



Ako je sada preslikavanje $f : X \to Y$ definirano kao ortogonalna projekcija, onda vidimo da prvo preslikavanje nije ni surjektivno ni injektivno, drugo je surjektivno (ali nije injektivno), treće je injektivno (ali nije surjektivno) i konačno, četvrto je preslikavanje i surjektivno i injektivno, dakle bijektivno.

Primijetimo da svaka injekcija zamjenom kodomene sa slikom domene postaje bijekcija. Slično, svaka surjekcija dopušta restrikciju (ograničenje domene), koja je bijekcija.

Neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ preslikavanja koja se mogu komponirati. Ako su oba preslikavanja f i g bilo surjektivna, bilo injektivna ili pak bijektivna, onda i njihova kompozicija $h = g \circ f$ ima to isto svojstvo. Interesantno je, međutim, da vrijedi neka vrsta obrata te očigledne činjenice.

PROPOZICIJA 4

Neka je $h = g \circ f$ kompozicija preslikavanja f i g. Ako je

(1) *h surjekcija, onda je i g surjekcija,*

(2) *h injekcija, onda je i f injekcija.*

Dokaz

Dokažimo npr. (2). Neka su $a, b \in X$ i $a \neq b$. Kako je h injekcija po pretpostavci, to je $h(a) \neq h(b)$. Dakle je $g[f(a)] \neq g[f(b)]$, odakle zaključujemo da mora biti $f(a) \neq f(b)$ i, prema tome, f je injekcija. ■

Neka je $f : X \to Y$ bijektivno preslikavanje. Onda se za svaki $y \in Y$ praslika $f^{-1}(y)$ očito sastoji iz jednog jedinog elementa. Ako skup $f^{-1}(y)$

identificiramo s tim elementom iz X, dolazimo prirodno do preslikavanja

$$g : Y \to X$$

danog zakonom

$$g(y) = f^{-1}(y)$$

za svaki $y \in Y$. Preslikavanje g nazivamo **inverznim preslikavanjem** ili **inverzom** preslikavanja f i iz očiglednih razloga označavamo standardno s f^{-1}.

Odmah se vidi da je inverzno preslikavanje f^{-1} također bijekcija i da vrijedi

$$f^{-1} \circ f = e_X, \qquad f \circ f^{-1} = e_Y\ ,$$

gdje su s e_X i e_Y označene identitete na skupu X odnosno Y.

Kažimo na kraju i ovo: Ako su X i Y dani skupovi, onda skup svih preslikavanja $X \to Y$ standardno označavamo kao

$$Y^X$$

i zovemo **funkcijski skup** za (uređeni) par skupova X i Y. Naravno, u općem će slučaju Y^X i X^Y biti različiti skupovi. Na primjer, $\mathbb{R}^X$ je oznaka za skup svih realnih funkcija na skupu X, a $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ za skup svih realnih funkcija realne varijable (vidi i Zad. 8. u 1.5.).

ZADACI

1. Kad je iz konteksta jasno što je domena, a što kodomena, često se dano preslikavanje zapisuje kraće kao $y = f(x)$ ili $f : x \mapsto y$ ili $x \overset{f}{\mapsto} y$. Uzimajući za domenu maksimalni skup realnih brojeva za koji zakon pridruživanja ima smisla, opiši preslikavanja dana s $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $x \mapsto |x|$.

2. Definiraj pojam kompleksne funkcije kao i kompleksne funkcije kompleksne varijable i daj primjere takvih funkcija.

3. Dokaži Prop. 1 i Prop. 2. Dokaži da za $f : X \to Y$ i $A, B \subset X$ vrijedi

$$f(A) - f(B) \subset f(A - B).$$

Uvjeri se protuprimjerom da u gornoj relaciji općenito ne vrijedi znak jednakosti.

4. Neka je $f : X \to Y$ bilo koje preslikavanje, i $A \subset X$, $B \subset Y$. Dokaži da vrijedi

(a) $A \subset f^{-1}[f(A)]$;

(b) $f[f^{-1}(B)] \subset B$;

(c) $f[A \cap f^{-1}(B)] = f(A) \cap B$.

5. Neka je $A \subset X$ podskup od X. Onda definiramo funkciju

$$\chi_A : X \to \mathbb{R}$$

stavljajući

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in X - A \end{cases} .$$

Ta se funkcija zove **karakteristična funkcija** od A u X. Verificiraj ove jednakosti:

(a) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;

(b) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;

(c) $\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x)\,[1 - \chi_B(x)]$;

(d) $\chi_{CA}(x) = 1 - \chi_A(x)$;

za svaki $x \in X$.

6. Neka je $\mathcal{P}(X)$ partitivni skup skupa X i $A \in \mathcal{P}(X)$. Definiramo

$$\Psi_A : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$$

stavljajući

$$\Psi_A(B) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } B \cap A \neq \emptyset \\ 0, & \text{ako je } B \cap A = \emptyset \end{cases} .$$

Analiziraj tu funkciju.

7. Kompozicija preslikavanja se može definirati i u slučaju kad je kodomena prvog preslikavanja **sadržana** u domeni drugog. Je li ta definicija bitno općenitija od one u tekstu?

8. Neka je $A \subset X$, $i : A \to X$ inkluzija, $f : X \to Y$ i $g : A \to Y$ bilo koja preslikavanja. Promatraj **dijagram**

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd} .$$

Uvjeri se da je $g = f/_A$ ako i samo ako je taj dijagram **komutativan**, tj. vrijedi $f \circ i = g$.

9. Neka su $A, B \subset X$ podskupovi, koji **fiksiraju** X, tj. takvi da je $A \cup B = X$. Neka su $f : A \to Y$ i $g : B \to Y$ preslikavanja sa svojstvom da je
$$f/_{A\cap B} = g/_{A\cap B}\,.$$
Onda postoji jedinstveno preslikavanje
$$h : X \to Y$$
takvo da je $h/_A = f$ i $h/_B = g$. Dokaži i generaliziraj.

10. Dokaži ovaj važan **kriterij** za prepoznavanje injektivnog preslikavanja: Preslikavanje $f : X \to Y$ je injektivno onda i samo onda ako iz $f(a) = f(b)$ slijedi $a = b$.

11. Dokaži: Ako je $h = g \circ f$ kompozicija preslikavanja $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$, onda je

    (a) $h(A) = g[f(A)]$, za svaki $A \subset X$;

    (b) $h^{-1}(C) = f^{-1}[g^{-1}(C)]$, za svaki $C \subset Z$.

    Primijeni taj teorem za dokaz tvrdnje (1) u Prop. 4.

12. Iz Prop. 4 slijedi: Ako je $h = g \circ f$ bijekcija, onda je f injekcija i g surjekcija. Je li istinit obrat te tvrdnje?

13. Koristeći Prop. 4 dokaži: Preslikavanje $f : X \to Y$ je bijektivno ako i samo ako postoji $g : Y \to X$ tako da su kompozicije $g \circ f$ i $f \circ g$ identitete. Pritom je $g = f^{-1}$.

1.4. Kardinalni broj skupa

Nekoliko osnovnih činjenica o pojmu kardinalnog broja. Kažemo da je skup X **ekvipotentan** (jednakobrojan) skupu Y ako postoji bar jedna bijekcija
$$f : X \to Y.$$
Skup X je **konačan** ako je ekvipotentan s jednim od skupova S_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, gdje je
$$\begin{aligned}
S_0 &= \emptyset \\
S_1 &= \{1\} \\
S_2 &= \{1, 2\} \\
\ldots & \quad \ldots \\
S_n &= \{1, 2, \ldots, n\} \\
\ldots & \quad \ldots
\end{aligned}$$

U protivnom kažemo da je X **beskonačan** skup. Primijetimo da za $i \neq j$ skup S_i nije ekvipotentan sa skupom S_j.

Kardinalni broj skupa broji njegove elemente. Točnije, konačni skup X je **kardinalnog broja** n,

$$\operatorname{card}(X) = n ,$$

ako je ekvipotentan sa skupom S_n. Posebno, dakle, $\operatorname{card}(X) = 0$ ako i samo ako je $X = \emptyset$.

Teškoće nastupaju kad je skup beskonačan. G. Cantor (konac 19. st.) prvi je primijetio da beskonačni skupovi ne moraju biti ekvipotentni, da ih ima koji su "više beskonačni" od drugih beskonačnih skupova. Konkretno, pokazalo se da skup $\mathbb{R}$ realnih brojeva i skup $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva nisu ekvipotentni; prvi ima bitno više elemenata od drugog.

Za skup X koji je ekvipotentan sa skupom $\mathbb{N}$ kažemo da je **prebrojivo beskonačan**, i za njegov kardinalni broj tradicionalno pišemo

$$\operatorname{card}(X) = \aleph_0 ,$$

što čitamo alef nula ($\aleph$ je hebrejsko slovo alef). Na primjer, lako se pokazuje da su skupovi $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ prebrojivo beskonačni.

Za skup koji je ili konačan ili prebrojivo beskonačan, kažemo da je **prebrojiv**. Skup koji nije prebrojiv je **neprebrojivo beskonačan** ili **neprebrojiv**. U smislu naše primjedbe, takav je npr. skup $\mathbb{R}$.

Ako je X ekvipotentan sa skupom $\mathbb{R}$, pišemo

$$\operatorname{card} X = c$$

i kažemo da X ima kontinuum elemenata (c dolazi od latinske riječi continuum – neprekidnost).

Mogu se konstruirati neprebrojivi skupovi koji nisu ekvipotentni s $\mathbb{R}$, ali oni za naše praktične potrebe nisu od interesa.

Strogim fundiranjem kardinalnih brojeva i detaljnim izučavanjem njihovih svojstava bavi se teorija skupova.

ZADACI

1. Uoči da je $\operatorname{card}\{1, \ldots, n\} = n$, $\operatorname{card} \mathbb{N} = \aleph_0$, $\operatorname{card} \mathbb{R} = c$.

2. Pokušaj dokazati da $\mathbb{N}$ i $\mathbb{C}$ nisu ekvipotentni.

3. Dokaži da je $\operatorname{card} \mathbb{Z} = \aleph_0$ i $\operatorname{card} \mathbb{Q} = \aleph_0$. Dokaži, nadalje, da je

$$\operatorname{card} \mathbb{C} = c .$$

4. Za realni broj x kažemo da je **algebarski** prebrojivo beskonačan ako je nultočka polinoma u jednoj varijabli s cjelobrojnim koeficijentima. Pokaži da je skup svih algebarskih brojeva prebrojiv.

5. Dokaži: Unija od prebrojivo mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.

6. Ako su X i Y konačni skupovi, dokaži da vrijedi
$$\operatorname{card}(X \cup Y) = \operatorname{card} X + \operatorname{card} Y - \operatorname{card}(X \cap Y) .$$

7. Dokaži: Skup je beskonačan ako i samo ako je ekvipotentan s jednim svojim pravim podskupom. Ilustriraj to primjerima.

8. Neka je X konačan skup, a $\mathcal{P}(X)$ partitivni skup od X. Dokaži da onda vrijedi
$$\operatorname{card} \mathcal{P}(X) = 2^{\operatorname{card}(X)} .$$

9. Uvjeri se da je u slučaju kad je skup X prebrojivo beskonačan, skup $\mathcal{P}(X)$ neprebrojivo beskonačan. I više, $\operatorname{card} \mathcal{P}(X) = c$.

10. Neka su X i Y konačni skupovi, a Y^X neka je skup svih preslikavanja iz X u Y. Onda je i Y^X konačan i vrijedi
$$\operatorname{card}(Y^X) = (\operatorname{card} Y)^{\operatorname{card} X} .$$
Diskutiraj i slučaj kad je jedan od danih skupova prebrojivo beskonačan.

1.5. Kartezijev produkt skupova

Opisat ćemo još jedan način kako se iz danih skupova mogu proizvesti novi.

Za dane skupove X i Y definiramo njihov **Kartezijev produkt** $X \times Y$ kao skup
$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\} ,$$
tj. kao skup svih **uređenih** parova, u kojima je prvi element iz skupa X, a drugi iz skupa Y. Kažemo da su X i Y **faktori** Kartezijeva produkta. Osim naziva Kartezijev produkt, još su u upotrebi nazivi kombinirani ili, također, direktni produkt skupova. Na primjer, ako je
$$X = \{a, b\}, \qquad Y = \{1, 2, 3\} ,$$
Kartezijev produkt tih skupova jest skup
$$X \times Y = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\} .$$

U drugu ruku, imamo

$$Y \times X = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

i prema tome

$$X \times Y \neq Y \times X\,.$$

Kartezijevo množenje skupova nije, dakle, općenito komutativno. To će biti slučaj ako i samo ako je $Y = X$; tada govorimo o **Kartezijevu kvadratu**

$$X^2 = X \times X = \{(a,b) \mid a,b \in X\}$$

skupa X. Za Kartezijev kvadrat definiramo **dijagonalu**

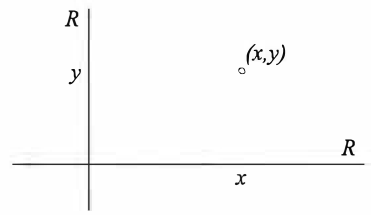
$$D = \{(a,a) \mid a \in X\} \subset X^2\,.$$

PRIMJERI

1. Neka je $X = Y = \mathbb{R}$. Onda je Kartezijev kvadrat

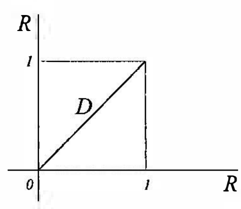
$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}\ ,$$

dakle, kako se to kaže u srednjoj školi, ravnina Kartezijeva koordi-



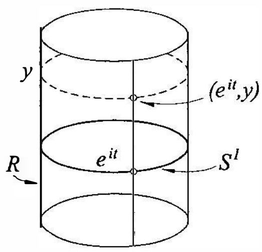
natnog sustava, koordinatna ravnina. Odatle i potječe naziv za Kartezijev produkt. Prema tome, Kartezijev produkt dvaju neparalelnih pravaca možemo geometrijski interpretirati kao ravninu.

2. Slično, uz $X = Y = I = [0, 1]$ imamo
$$I^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 1\} ,$$
a to je u koordinatnoj ravnini pravi kvadrat, u kojem se dijagonala

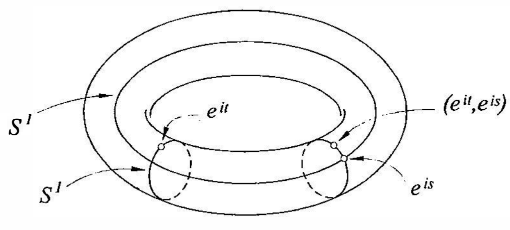


produkta D podudara s njegovom geometrijskom dijagonalom.

3. Neka je $X = S^1 = \{e^{it} \mid t \in \mathbb{R},\ 0 \leq t < 2\pi\}$, dakle kružnica u kompleksnoj ravnini, a $Y = \mathbb{R}$, tj. pravac. Uređenim parom (e^{it}, y) jednoznačno je određena točka na cilindru, kojem je S^1 baza (vidi sliku) pa u tom smislu shvaćamo $X \times Y$ kao (beskonačni) **cilindar**.



4. Posve analogno, $S^1 \times S^1$ možemo geometrijski interpretirati kao **torus**,



plohu koja odgovara zračnici automobilske gume.

Primijetimo da će biti
$$X \times Y = \emptyset$$
onda i samo onda, ako je bar jedan od skupova X i Y prazan. Daljnja svojstva Kartezijeva produkta popisana su ovim teoremom:

TEOREM 1

Neka su X, Y i Z bilo koji skupovi. Onda je

(1) $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$;

(2) $(X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z)$;

(3) $(X - Y) \times Z = (X \times Z) - (Y \times Z)$;

tj. Kartezijevo je množenje distributivno prema uniji, presjeku i razlici skupova.

Dokaz

Pokažimo npr. (3). Neka je $(x, z) \in (X - Y) \times Z$. To znači da je $x \in X - Y$, a $z \in Z$. No, $x \in X - Y$ povlači da je $x \in X$ i $x \notin Y$. Prema tome je $(x, z) \in X \times Z$ i $(x, z) \notin Y \times Z$, dakle $(x, z) \in (X \times Z) - (Y \times Z)$, pa je inkluzija $(X - Y) \times Z \subset (X \times Z) - (Y \times Z)$ dokazana. Slično se vidi i obratna inkluzija. ■

Navedimo još kako se Kartezijev produkt ponaša prema podskupovima faktora.

TEOREM 2

Ako je $A \subset X$ i $B \subset Y$, onda je

(1) $A \times B \subset X \times Y$;

(2) $(X \times Y) - (A \times B) = [(X - A) \times Y] \cup [X \times (Y - B)]$. ■

Uz produkt $X \times Y$ prirodno su vezana neka preslikavanja. Imamo tako preslikavanja

$$p_1 : X \times Y \to X, \qquad p_2 : X \times Y \to Y$$

definirana s

$$p_1(x, y) = x, \qquad p_2(x, y) = y,$$

koja nazivamo **projekcije** na prvi, odnosno drugi faktor. U drugu ruku, za bilo koji fiksni $x_0 \in X$, odnosno $y_0 \in Y$, preslikavanja

$$j_1 : X \to X \times Y, \qquad j_2 : Y \to X \times Y\ ,$$

zadana s

$$j_1(x) = (x, y_0), \qquad j_2(y) = (x_0, y)\ ,$$

nazivamo **inkluzije**, određene s $y = y_0$, odnosno $x = x_0$. Jasno je da su projekcije surjektivna preslikavanja, a inkluzije injektivna.

Konačno, ako su

$$f : S \to X \quad \text{i} \quad g : S \to Y$$

bilo koja preslikavanja, definiramo preslikavanje

$$h : S \to X \times Y$$

stavljajući

$$h(s) = (f(s), g(s))$$

za svaki $s \in S$. To preslikavanje obično označavamo s

$$h = f \times g$$

i nazivamo **Kartezijev produkt preslikavanja** f i g.

Pojam Kartezijeva produkta se generalizira na slučaj kad imamo više faktora. Ako su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bilo koji skupovi, definiramo

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i\} \ .$$

Produkt se slično definira i kad imamo prebrojivo mnogo faktora (nizovi umjesto uređenih n-torki), pa i neprebrojivo (vidi Zad. 8.). Nije teško definirati projekcije i inkluzije i u toj općenitijoj situaciji.

ZADACI

1. Dokaži Tm. 1 i Tm. 2.

2. Neka su $A, C \subset X$, a $B, D \subset Y$. Dokaži da je onda

   (a) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$;

   (b) $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$.

   Uvjeri se protuprimjerom da u (2) općenito ne vrijedi znak jednakosti.

3. Neka je

   $$s : X \times Y \to Y \times X$$

   preslikavanje dano sa

   $$s(x, y) = (y, x) \ .$$

   Pokaži da je s bijekcija i prema tome je skup $X \times Y$ ekvipotentan sa skupom $Y \times X$.

4. Uvjeri se da je $(X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z)$, tj. Kartezijevo množenje nije asocijativno. Konstruiraj prirodnu bijekciju

$$(X \times Y) \times Z \to X \times (Y \times Z)$$

koja pokazuje da su ti skupovi ekvipotentni.

5. Ako su X i Y konačni skupovi, onda je

$$\text{card}\,(X \times Y) = \text{card}\,X \cdot \text{card}\,Y\ .$$

Dokaži!

6. Dokaži da je Kartezijev produkt prebrojivih skupova prebrojiv.

7. Neka je

$$d : X \to X^2$$

dijagonalna inkluzija, tj. preslikavanje dano s

$$d(x) = (x, x)\ .$$

Pokaži da je d injekcija i da je $d(X) = D =$ dijagonala u X^2. Nadalje, ako je $s : X^2 \to X^2$ preslikavanje iz Zad. 2., onda je

$$s \circ d = d\ .$$

Konačno, ako su $p_i : X^2 \to X$, $i = 1, 2$, projekcije, onda vrijedi

$$p_i \circ d = e\ ,$$

gdje je e identiteta na X.

8. Neka je M bilo koji skup, a $\{X_\mu \,|\, \mu \in M\}$ familija skupova, indeksirana elementima iz M. Neka je s X označena unija skupova iz te familije. Onda pod **Kartezijevim produktom dane familije skupova** razumijevamo skup F svih preslikavanja

$$f : M \to X$$

sa svojstvom da je

$$f(\mu) \in X_\mu \subset X$$

za svaki $\mu \in M$. Kartezijev produkt označavamo obično kao

$$F = \prod_{\mu \in M} X_\mu\ .$$

Uvjeri se da se u slučaju kad je $M = \{1, 2\}$, odnosno $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, ta definicija svodi na definicije Kartezijeva produkta iz teksta. Razmotri slučaj kad je $M = \mathbb{N}$. Ako su svi faktori u produktu jednaki, $X_\mu = X$ za svaki $\mu \in M$, onda F nazivamo M-ta **Kartezijeva potencija** skupa X i pišemo

$$F = X^M .$$

To je, dakle, skup svih preslikavanja $M \to X$. Uoči da je to generalizacija Kartezijeva kvadrata X^2 i n-te potencije X^n. Kako ćeš opisati skup $X^{\mathbb{N}}$?

9. Kako smo spomenuli u točki 1.2., za partitivni skup od M se upotrebljava i oznaka 2^M. Uzmimo sada da je $X = \{0, 1\}$ pa definirajmo preslikavanje

$$f : 2^M \to X^M$$

stavljajući za svaki $A \in 2^M$, dakle $A \subset M$,

$$f(A) = \chi_A ,$$

gdje je $\chi_A : M \to X$ karakteristična funkcija od A u M (vidi Zad. 5. u 1.3.). Pokaži da je f bijekcija. Time se objašnjava klasična oznaka 2^M za partitivni skup od M.

10. Generaliziraj pojam projekcija, inkluzija kao i pojam Kartezijeva produkta preslikavanja za opći slučaj Kartezijeva produkta skupova.

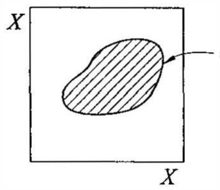
1.6. Relacije

U mnogim konkretno zadanim skupovima primjećujemo da su neki od elemenata u izvjesnom međusobnom odnosu. Tako npr. u skupovima brojeva će neki od brojeva biti manji od danog broja ili možda jednaki tom broju, ili veći od njega. U skupovima pravaca govorimo o parovima paralelnih pravaca, o parovima okomitih pravaca i slično. Generalizirajući te ideje, dolazimo do apstraktnog pojma relacije.

Neka je X neprazni skup, a X^2 njegov Kartezijev kvadrat. Svaki podskup

$$\varrho \subset X^2$$

tog kvadrata nazivamo **relacija** na skupu X. Ako je ϱ bilo koja relacija

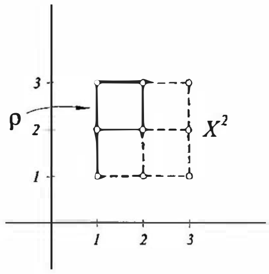


na skupu X, a $a, b \in X$ elementi sa svojstvom da je $(a, b) \in \varrho \subset X^2$, onda kažemo da je element a u **relaciji** ϱ s b i pišemo

$$a \,\varrho\, b\,.$$

Ako je npr. $X = \{1, 2, 3\}$, jedna relacija na X je

$$\varrho = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\} \subset X^2\,,$$



što znači da je

$$1 \,\varrho\, 1, \quad 1 \,\varrho\, 2, \quad 1 \,\varrho\, 3, \quad 2 \,\varrho\, 2, \quad 2 \,\varrho\, 3\,.$$

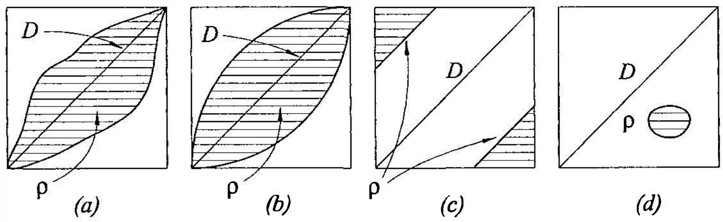
Za nas će biti od interesa relacije koje imaju neka dobra dodatna svojstva.

Relacija ϱ je **refleksivna** ako je $a \,\varrho\, a$ za svaki $a \in X$. Drugim riječima, ϱ je refleksivna ako i samo ako je $(a, a) \in \varrho$, za svaki $a \in X$, tj. ako je dijagonala $D \subset X^2$ sadržana u ϱ.

Relacija ϱ je **simetrična** ako iz $a \,\varrho\, b$ slijedi da je i $b \,\varrho\, a$, tj. ako $(a, b) \in \varrho$ povlači $(b, a) \in \varrho$. Geometrijski gledano, simetrična relacija je podskup u X^2 koji je simetričan s obzirom na dijagonalu D. Pritom ϱ može, ali ne mora, sadržavati dijagonalu; simetrična relacija nije nužno refleksivna.

Relacija ϱ je **antisimetrična** ako iz $a \,\varrho\, b$ i $b \,\varrho\, a$ slijedi da je nužno $a = b$. Prema tome, uz $a \neq b$ je kod antisimetrične relacije od odnosa $a \,\varrho\, b$ i $b \,\varrho\, a$ istinit najviše jedan; $(a, b) \in \varrho$ povlači $(b, a) \notin \varrho$.

Relacija je **tranzitivna**, ako iz $a \,\varrho\, b$ i $b \,\varrho\, c$ slijedi da je i $a \,\varrho\, c$, odnosno ako $(a, b) \in \varrho$ i $(b, c) \in \varrho$ povlači $(a, c) \in \varrho$.



Na slici je (a) refleksivna relacija, (b) i (c) su simetrične relacije, a (d) je antisimetrična. Svojstvo tranzitivnosti je teško predočiti grafički.

Konačno, za relaciju ϱ na skupu X kažemo da je **relacija ekvivalencije**, ako je ta relacija i refleksivna i simetrična i tranzitivna, tj. ako istovremeno vrijedi

(1) $a\,\varrho\,a$, za svaki $a \in X$,

(2) $a\,\varrho\,b$ povlači $b\,\varrho\,a$, i

(3) $a\,\varrho\,b$ i $b\,\varrho\,c$ povlači $a\,\varrho\,c$.

Za takvu je relaciju još uobičajen naziv **relacija klasifikacije**, zbog njezina svojstva, koje ćemo uskoro upoznati (vidi Tm. 1).

Relaciju ekvivalencije standardno označavamo s $\sim$. Ako je $a \sim b$, onda kažemo da je element a **ekvivalentan** s elementom b.

Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije definirana na skupu X, a $a \in X$ bilo koji element. Neka je sa $C(a) \subset X$ označen podskup od X, koji se sastoji od svih elemenata iz X koji su ekvivalentni s a, tj.

$$C(a) = \{x \in X \mid x \sim a\} \ .$$

Kažemo da je $C(a)$ **klasa ekvivalencije** određena elementom $a \in X$. Primijetimo da je, zbog refleksivnosti, $a \in C(a)$ za svaki $a \in X$ i, prema tome, je uvijek $C(a) \neq \emptyset$.

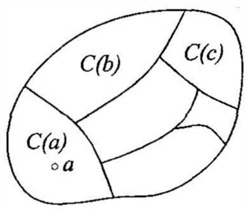
TEOREM 1

Neka su $a, b \in X$ bilo koji elementi. Onda je $C(a) \cap C(b) = \emptyset$ ili je $C(a) = C(b)$.

Dokaz

Pretpostavimo da je $C(a) \cap C(b) \neq \emptyset$. Treba dokazati da je u tom slučaju $C(a) = C(b)$. Neka je $c \in C(a) \cap C(b)$ bilo koja točka. Pokažimo inkluziju $C(a) \subset C(b)$. Neka je $x \in C(a)$. Po definiciji to znači da je $x \sim a$. Kako je i $c \in C(a)$, dakle $c \sim a$, odnosno zbog simetrije $a \sim c$, imamo iz tranzitivnosti da je $x \sim c$. U drugu ruku, jer je također $c \in C(b)$, vrijedi $c \sim b$. Ponovo, zbog tranzitivnosti, iz $x \sim c$ i $c \sim b$ zaključujemo da je $x \sim b$, dakle $x \in C(b)$, pa je inkluzija $C(a) \subset C(b)$ dokazana. Posve analogno se dokazuje inkluzija $C(b) \subset C(a)$. Prema tome je $C(a) = C(b)$ i teorem je dokazan. ∎

Iz teorema slijedi da svaki element skupa X pripada jednoj i samo jednoj klasi ekvivalencije, određenoj pomoću relacije $\sim$ na skupu X. Na taj smo



način proveli dakle izvjesnu klasifikaciju elemenata iz skupa X, pa zato $\sim$ nazivamo i relacijom klasifikacije.

Neka je s Q označen skup svih međusobno **različitih** klasa ekvivalencije određenih s relacijom $\sim$ na skupu X. Elementi od Q su neprazni podskupovi od X, koji su u parovima disjunktni i imaju svojstvo da je njihova unija jednaka čitavom X (pa prema tome predstavljaju jednu dekompoziciju skupa X, vidi Zad. 12.). Skup Q obično označavamo s

$$Q = X/_{\sim}$$

i nazivamo ga **kvocijentnim skupom** skupa X u odnosu na relaciju $\sim$, ili po relaciji $\sim$.

Uz kvocijentni skup je prirodno vezano preslikavanje

$$q : X \to X/_{\sim}$$

definirano s

$$q(a) = C(a) \ ,$$

koje svakom elementu skupa X pridružuje klasu ekvivalencije kojoj taj element pripada. Preslikavanje q se naziva **kvocijentno preslikavanje** skupa na pripadni kvocijent.

PRIMJERI

1. Neka je $X = \mathbb{Z}$, a $m \in \mathbb{N}$ dani prirodni broj. Na X definiramo relaciju $\sim$ stavljajući $a \sim b$ ako i samo ako je $a - b$ djeljivo s m. Lako se provjeri da je $\sim$ jedna relacija ekvivalencije i da se pripadni kvocijentni skup sastoji od točno m različitih klasa,

$$\mathbb{Z}/_{\sim} = \{C(0), C(1), \ldots, C(m-1)\} \ .$$

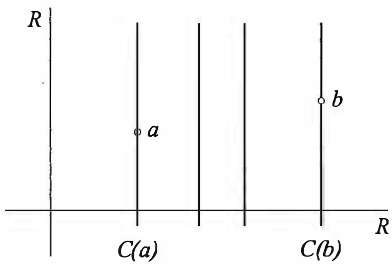
Pritom će klasa $C(k)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$ sadržavati one i samo one cijele brojeve koji pri dijeljenju s m daju ostatak k (oprez pri dijeljenju negativnih brojeva!). Na primjer, za $m = 3$ imamo

$$
\begin{aligned}
C(0) &= \{\ldots -3, 0, 3, 6, \ldots\} \ , \\
C(1) &= \{\ldots -2, 1, 4, 7, \ldots\} \ , \\
C(2) &= \{\ldots -1, 2, 5, 8, \ldots\} \ ,
\end{aligned}
$$

tj. proveli smo klasifikaciju cijelih brojeva na one koji su djeljivi s 3, na one koji pri dijeljenju s 3 daju ostatak 1, te one koji pri dijeljenju s 3 daju ostatak 2.

2. Neka je $\mathcal{P}$ skup svih pravaca ravnine. Za pravce $a, b \in \mathcal{P}$ kažemo da su paralelni, i pišemo $a \parallel b$, ako ti pravci nemaju ni jedne točke zajedničke ili su im sve točke zajedničke. Onda je $\parallel$ jedna relacija ekvivalencije na $\mathcal{P}$. Klase ekvivalencije, tj. elemente kvocijentnog skupa $\mathcal{P}/_{\parallel}$, nazivamo **smjerovima u ravnini** (vidi i Zad. 1. u 5.4.). Je li relacija $a \perp b$, tj. "*biti okomit*" relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{P}$?

3. Neka je $X = \mathbb{R}^2$ koordinatna ravnina, na kojoj je relacija $\sim$ definirana s $(x, y) \sim (x', y')$ ako i samo ako je $x = x'$.



To je onda relacija ekvivalencije na $\mathbb{R}^2$, čije klase čine, geometrijski govoreći, pravci paralelni s osi y. Odmah se vidi da je kvocijentni skup $\mathbb{R}^2/_{\sim}$ prirodno ekvipotentan sa skupom $\mathbb{R}$ realnih brojeva.

4. Neka je s $\mathcal{T}$ označen skup svih trokuta u ravnini. Onda je svaki od odnosa "*biti kongruentan (sukladan) sa*", "*biti sličan sa*" i "*imati istu površinu kao*" među trokutima jedna dobro definirana relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{T}$. Na primjer, kvocijentni skup po zadnjoj od tih relacija će biti ekvipotentan sa skupom pozitivnih realnih brojeva.

Spomenimo još jedan važan tip relacija. To su tzv. **relacije uređaja**. Neka je ϱ relacija na skupu X, koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, tj. relacija za koju vrijedi

(1) $a\,\varrho\,a$, za svaki $a \in X$;

(2) $a\,\varrho\,b$ i $b\,\varrho\,a$ povlači $a = b$;

(3) $a\,\varrho\,b$ i $b\,\varrho\,c$ povlači $a\,\varrho\,c$.

Onda kažemo da je ϱ jedna **relacija parcijalnog** (djelomičnog) **uređaja** na skupu X. Ako je još ispunjeno i

(4) za svaki $a, b \in X$ je ili $a\,\varrho\,b$ ili $b\,\varrho\,a$ ili oboje,

onda takvu relaciju nazivamo **relacija totalnog** (potpunog, linearnog) **uređaja** na skupu X.

Relaciju parcijalnog, odnosno totalnog uređaja na skupu X označavamo standardno s $\leq$. Ako je $a \leq b$, kažemo da je element a manji ili jednak od elementa b.

Uređeni par $(X, \leq)$ koji se sastoji od skupa X i uređajne relacije $\leq$ na tom skupu nazivamo **parcijalno**, odnosno **totalno uređenim** skupom.

PRIMJERI

1. Neka je $X = \mathcal{P}(S)$ partitivni skup od S. Na njemu definiramo relaciju $\leq$ stavljajući $A \leq B$ za $A, B \in \mathcal{P}(S)$ ako i samo ako je $A \subset B$. Odmah se vidi da je to jedna relacija parcijalnog uređaja na $\mathcal{P}(S)$, pa je $(\mathcal{P}(S), \leq)$ parcijalno uređen skup (ne i totalno uređen, ako S ima više od jednog elementa).

2. Na skupu $X = \mathbb{N}$ definiramo relaciju $\leq$ stavljajući $a \leq b$ ako i samo ako je a mjera od b, tj. b je djeljiv s a. Onda se lako provjeri da je $\leq$ uređajna relacija, s obzirom na koju je skup $\mathbb{N}$ parcijalno uređen.

3. Neka je $X = \mathbb{R}$, a relaciju $\leq$ definiramo stavljajući $a \leq b$ ako i samo ako je razlika $b - a$ nenegativan realni broj. Lako se provjeri da je $\leq$ jedna relacija totalnog uređaja, koju nazivamo **prirodnim uređajem** na $\mathbb{R}$. Analogno definiramo prirodne uređaje na skupovima $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$.

4. Neka je $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ skup svih realnih funkcija realne varijable. Za $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ stavljamo $f \leq g$ ako i samo ako je $f(x) \leq g(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje druga relacija predstavlja prirodni uređaj za realne brojeve. Onda je $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \leq)$ parcijalno uređen skup.

Neka je $(X, \leq)$ totalno uređen skup. Kažemo da je taj skup **dobro uređen** ako za svaki neprazni podskup $A \subset X$ postoji **minimalni** (najmanji) element, tj. element $a \in A$ sa svojstvom da je $a \leq x$ za svako $x \in A$.

Svaki totalno uređen skup ne mora biti i dobro uređen. Na primjer, skup $\mathbb{N}$ je uz prirodni uređaj dobro uređen, ali skupovi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ to nisu. Mogućnost dobrog uređenja skupa pomoću neke uređajne relacije regulirana je u teoriji skupova aksiomatski.

ZADACI

1. Na skupu $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva definiramo relaciju ϱ, stavljajući $a \varrho b$ ako i samo ako

   (a) $a = b$;
   (b) $a \neq b$;
   (c) a se razlikuje od b za manje od 2;
   (d) svaki prirodni broj koji dijeli a dijeli i b;
   (e) a je višekratnik od b.

   Ispitaj koja svojstva ima svaka od navedenih relacija ϱ.

2. Neka je s X označen skup svih ljudi na svijetu. Utvrdi koja svojstva imaju sljedeće relacije na skupu X:

   (a) " je rođak od";
   (b) " je potomak od";
   (c) " je vjenčan sa";
   (d) " je stariji nego";
   (e) " je istog spola kao".

3. Neka je ϱ bilo koja relacija na skupu X. Onda definiramo **inverznu relaciju** ϱ^{-1} od ϱ kao

$$\varrho^{-1} = \{(a,b) \in X^2 \mid (b,a) \in \varrho\} .$$

   Dokaži ove tvrdnje:

   (a) za svaku relaciju ϱ je $(\varrho^{-1})^{-1} = \varrho$;
   (b) relacija ϱ je simetrična ako i samo ako je $\varrho^{-1} = \varrho$.

4. Neka su ϱ i σ relacije na skupu X. Onda definiramo njihovu **kompoziciju** $\varrho \circ \sigma$, kao relaciju na X sa svojstvom da je $(a,b) \in \varrho \circ \sigma$ ako i samo ako postoji $x \in X$ tako da je $(a,x) \in \varrho$ i $(x,b) \in \sigma$. Pokaži da je uvijek

   (a) $(\varrho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \varrho^{-1}$;

(b) $(\varrho \circ \sigma) \circ \tau = \varrho \circ (\sigma \circ \tau)$.

Nadalje, pokaži primjerom da komponiranje relacija nije komutativno. Je li općenito istina da je $\varrho \circ \varrho^{-1} = \varrho^{-1} \circ \varrho = e$, gdje je

$$e = D = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

tzv. **identična** relacija?

5. Pojam relacije možemo generalizirati na ovaj prirodan način: **Relacija na uređenom paru skupova** (X, Y) ili **relacija između** X i Y je svaki podskup $\varrho \subset X \times Y$ njihova Kartezijeva produkta. Kao i prije, reći ćemo da je $x \in X$ u relaciji ϱ s $y \in Y$ i pisati $x \,\varrho\, y$, ako i samo ako je $(x, y) \in \varrho$. U novije se vrijeme uobičava pisati relaciju i kao

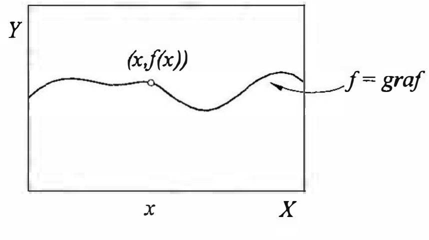
$$\varrho : X \to Y$$

stavljajući

$$\varrho(x) = \{y \in Y \mid x \,\varrho\, y\} \ .$$

Podskup $\{x \in X \mid \varrho(x) \neq \emptyset\}$ od X je onda domena za ϱ, a Y njezina kodomena. Definiraj u tim terminima pojmove inverzne relacije i kompozicije relacija, i utvrdi njihova svojstva. Kako bi se prirodno definirao pojam injektivne odnosno surjektivne relacije?

6. Preslikavanje $f : X \to Y$ možemo shvatiti kao specijalnu relaciju definiranu na paru (X, Y). Naime, relacija f će biti preslikavanje onda i samo onda, ako za svaki $x \in X$ postoji jedan i samo jedan element $y \in Y$ takav da je $(x, y) \in f$, tj. $x \, f \, y$. U tom slučaju pišemo $y = f(x)$. Drugim riječima, (u notaciji iz Zad. 5.) relacija $f : X \to Y$ je funkcija ako i samo ako se za svaki $x \in X$ skup $f(x)$ sastoji od točno jedne točke. Odatle odmah vidimo da je ovako definiran pojam preslikavanja identičan s onim u točki 1.3. Kažimo još da podskup $f \subset X \times Y$ nazivamo **graf** preslikavanja $f : X \to Y$.



Pokaži da je podskup $\varrho \subset X \times Y$ graf neke funkcije ako i samo ako iz pretpostavki $(x, y), (x', y') \in \varrho$ i $x' = x$ slijedi $y' = y$.

7. Neka je ϱ refleksivna relacija na skupu X. Ta relacija je relacija ekvivalencije ako i samo ako ima svojstvo da $a\,\varrho\, b$ i $a\,\varrho\, c$ povlači $b\,\varrho\, c$. Dokaži!

8. Neka je $f : X \to Y$ bilo koje preslikavanje. Onda na X definiramo relaciju $\stackrel{f}{\sim}$, stavljajući $a \stackrel{f}{\sim} b$, ako i samo ako je $f(a) = f(b)$. Pokaži da je $\stackrel{f}{\sim}$ relacija ekvivalencije.

9. Na skupu $\mathbb{R}$ realnih brojeva definiramo relaciju $\sim$ stavljajući $a \sim b$ onda i samo onda ako je $a - b$ cijeli broj. Pokaži da je $\sim$ jedna relacija ekvivalencije na $\mathbb{R}$. Kvocijentni skup $X/_\sim$ nazivamo **skup realnih brojeva modulo 1**.

10. Kako smo rekli (točka 1.4.), skup X je ekvipotentan sa skupom Y ako postoji bar jedna bijekcija $X \to Y$. Pokaži da je "*biti ekvipotentan*" jedna relacija ekvivalencije*). **Kardinalni broj** ili **potenciju** skupa X definiramo kao klasu ekvivalencije kojoj taj skup pripada, tj. kao zajedničko svojstvo svih ekvipotentnih skupova, i samo njih.

11. Neka je ϱ bilo koja relacija na skupu X. Na tom skupu definiramo onda novu relaciju $\sim$, stavljajući $a \sim b$ ako i samo ako postoji konačan broj točaka
$$a = x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k = b$$
iz X, sa svojstvom da je za svaki i ispunjeno:

    (a) $x_{i+1} = x_i$, ili

    (b) $x_{i+1}\,\varrho\, x_i$, ili

    (c) $x_i\,\varrho\, x_{i+1}$.

    Dokaži da je $\sim$ jedna relacija ekvivalencije na X i da je to najmanja relacija ekvivalencije (podskup od X^2!) koja sadrži ϱ. Za $\sim$ kažemo da je **relacija ekvivalencije generirana s** ϱ.

12. Pod **particijom** (rastavom, dekompozicijom) nepraznog skupa X razumijevamo svaku familiju $\mathcal{D}$ podskupova od X, tj. svaki podskup $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ njegova partitivnog skupa koji ima ova svojstva:

    (a) članovi od $\mathcal{D}$ nisu prazni;

    (b) presjek bilo koja dva člana iz $\mathcal{D}$ je prazan; i

*) Izbjegli smo reći na skupu svih skupova jer takav ne postoji; to je čuveni paradoks u teoriji skupova. Zato se obično govori o **klasi** svih skupova.

(c) članovi od $\mathcal{D}$ prekrivaju X, tj. unija svih članova od $\mathcal{D}$ se podudara sa skupom X.

Ako je $\sim$ bilo koja relacija ekvivalencije na X, onda smo vidjeli da klase ekvivalencije određene tom relacijom imaju svojstva (a) – (c), dakle predstavljaju jednu dekompoziciju skupa X. Pokaži da vrijedi i obrnuto: Svaka particija skupa X prirodno definira jednu relaciju ekvivalencije na tom skupu. [Uputa: Stavi $a \sim b$ ako i samo ako a i b pripadaju istom članu dekompozicije.]

13. Pokaži: ϱ je relacija ekvivalencije na skupu X onda i samo onda ako postoji particija $\mathcal{D}$ od X takva da vrijedi

$$\varrho = \bigcup \{A^2 \subset X^2 \mid A \in \mathcal{D}\}.$$

14. Neka je S neprazan skup. Na skupu $X = \mathcal{P}(S)$ definiramo relaciju $\leq$ stavljajući $A \leq B$ ako i samo ako $A \supset B$. Pokaži da je to relacija uređaja, pa je i $(\mathcal{P}(S), \supset)$ parcijalno uređen skup. Uvjeri se, nadalje, da je relacija $\supset$ inverzna relaciji $\subset$.

15. Na skupu $X = \mathbb{R}$ definiramo relaciju $\geq$ stavljajući $a \geq b$ ako i samo ako je $a - b$ nenegativan realni broj. Onda je $(\mathbb{R}, \geq)$ totalno uređen skup, a relacija $\geq$ je inverzna relaciji $\leq$ definiranoj u tekstu. Nadalje, uz istu definiciju je i skup $(\mathbb{N}, \geq)$ totalno uređen. Je li taj skup i dobro uređen?

16. Pokaži da vrijedi i općenito: Ako je $\leq$ relacija uređaja na skupu X, onda je njoj inverzna relacija (vidi Zad. 3.) također relacija uređaja na tom skupu. Tu relaciju obično označavamo s $\geq$ i zovemo **suprotnim uređajem** od $\leq$.

17. Neka su $(X, \leq_1)$ i $(Y, \leq_2)$ totalno uređeni skupovi. Onda na $X \times Y$ definiramo relaciju $\leq$, stavljajući $(x, y) \leq (x', y')$ ako i samo ako je $x' \leq_1 x$ ili $x = x'$ i $y \leq_2 y'$. Pokaži da je $\leq$ relacija totalnog uređaja na $X \times Y$. Ta se relacija obično zove **leksikografski uređaj**.

18. Neka je $(S, \leq)$ totalno uređen skup i $X = S \times S$. Na X definiramo relaciju $\leq'$ stavljajući $(a, b) \leq' (a', b')$ ako i samo ako je $a \leq a'$ i $b \leq b'$. Pokaži da je $\leq'$ jedno parcijalno uređenje na skupu X.

19. Dokaži da je svaki podskup parcijalno (totalno) uređenog skupa također parcijalno (totalno) uređen skup, s obzirom na istu relaciju uređaja. Je li to istina i za dobro uređenje?

20. Neka je $(X, \leq)$ parcijalno (totalno) uređen skup, a $f : X \to Y$ bijekcija. Na skupu Y definiramo relaciju $\leq'$, stavljajući $a \leq' b$ ako i samo ako je $f^{-1}(a) \leq f^{-1}(b)$ u skupu X. Pokaži da je onda $(Y, \leq')$ također parcijalno (totalno) uređen skup. Primjenom te činjenice, može se na skupu $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva definirati jedno totalno uređenje (vidi Zad. 3. u 1.4). Bi li znao definirati direktno neki uređaj na skupu $\mathbb{C}$?

21. Neka je $(X, \leq)$ parcijalno (totalno) uređen skup. Na X definiramo novu relaciju $<$, stavljajući $a < b$ onda i samo onda ako je $a \leq b$ i $a \neq b$. Ta relacija očito nije refleksivna i, štoviše, $a < a$ nije istinito ni za jedan $a \in X$. Uvjeri se da je relacija $<$ tranzitivna. Katkad se i za tu relaciju kaže da je relacija parcijalnog (totalnog) uređaja na X. Na primjer, ako su s $\leq$ i $\geq$ označeni prirodni uređaj na $\mathbb{R}$ i njegov inverz, onda su inducirane relacije $<$ i $>$ ("*biti manji od*" i "*biti veći od*") totalni uređaji na $\mathbb{R}$ u tom novom smislu.

22. Analogno definiciji minimalnog elementa, za podskupove od $(X, \leq)$ definiraj pojam **maksimalnog** (najvećeg) elementa. Na primjer, skup $\mathbb{R}$ nema ni minimalni ni maksimalni element, a isto vrijedi za njegove podskupove $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$. Naprotiv, $\mathbb{N}$ očito ima minimalni element, ali nema maksimalni.

23. Neka je $(X, \leq)$ totalno uređen skup, a $A \subset X$ njegov podskup. Ako A ima minimalni (maksimalni) element, on je određen jednoznačno.

24. Pojam relacije možemo generalizirati i tako da promatramo podskupove od X^n ili, još općenitije, od $X_1 \times \ldots \times X_n$. Svaki takav podskup nazivamo **n-arna relacija**. U toj terminologiji su relacije koje smo promatrali **binarne relacije**. Te su i najvažnije. Nađi primjere **ternarnih** i, općenito, n-arnih relacija.