Znak: 9202 P

Izdanje:
Prof. dr. BORIS PAVKOVIĆ
Prof. dr. DARKO VELJAN
ELEMENTARNA MATEMATIKA I
Skupovi, funkcije, brojevi, polinomi i neke elementarne funkcije, planimetrija-geometrija ravnine

Stručni recenzenti:
Prof. dr. NEVEN ELEZOVIĆ
Prof. dr. VLADIMIR VOLENEC

Izdavač:
Izdavačko trgovačko poduzeće
TEHNIČKA KNJIGA
Zagreb, Jurišićeva 10

Za izdavača:
Inž. ZVONIMIR VISTRIČKA

Urednik izdanja:
Inž. SREĆKO ŠOŠTARIĆ

Priprema sloga za tisak:
KAZIMIR RAJIĆ
DAVOR TOMLJENOVIĆ

Likovna obrada korica:
ALFRED PAL

Tisak:
Tiskara "Gembarovski", Nova Gradiška

Tiskano u 2000 primjeraka

Tisak dovršen:
U SVIBNJU 1992.

ISBN 86-7059-175-8

Prof. dr. Boris Pavković
Prof. dr. Darko Veljan

ELEMENTARNA MATEMATIKA
I

SKUPOVI. FUNKCIJE. BROJEVI
POLINOMI I NEKE ELEMENTARNE FUNKCIJE
PLANIMETRIJA – GEOMETRIJA RAVNINE

TEHNIČKA KNJIGA
ZAGREB

Predgovor

Ova knjiga predstavlja prvi dio dvodjelnog udžbenika za kolegije Elementarna matematika I i II koji se predaju redom u prvom i drugom semestru studija matematike na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu s fondom od 2 sata predavanja i 2 sata vježbi tjedno. S postojećim fondom sati nije moguće detaljno obraditi sav sadržaj knjige, pa su neki dijelovi knjige (važni za nastavnike matematike) ušli u program kolegija Metodika nastave matematike I i II na trećoj i četvrtoj godini studija. Autori smatraju da bi svaki nastavnik i profesor matematike koji nije slušao navedene kolegije morao biti upoznat s problematikom koja se tretira u ovoj knjizi. Osim toga, pojedini sadržaji pogodni su za rad s naprednijim učenicima srednjih škola, a može poslužiti kao izvor tema za maturalne radove. Knjiga može poslužiti i onima koji žele osvježiti i/ili produbiti svoje znanje iz srednjoškolske matematike.

Sadržaj ovog sveska podudara se s programom kolegija Elementarna matematika I. Ovaj svezak sadrži tri cjeline. To su prvo poglavlje koje obuhvaća skupove, funkcije i brojeve. To prvo poglavlje predstavlja pripremni materijal koji je bitan za potpuno razumijevanje daljeg teksta. Drugo poglavlje obuhvaća osnovna znanja o polinomima i nekim elementarnim funkcijama (racionalnim, iracionalnim, eksponencijalnim i logaritamskim funkcijama). U trećem poglavlju se sustavno obrađuje geometrija ravnine (planimetrija). Ona se ovdje izlaže aksiomatski, pa je to prva prilika da se studenti na jednom zornom materijalu upoznaju kako se izgrađuje jedna matematička teorija. Osobita je pažnja u tom poglavlju posvećena metodama geometrijskih konstrukcija i problemima konstruktibilnosti. Detaljno su ovdje obrađeni klasični problemi starogrčke matematike (npr. trisekcija kuta, duplikacija kocke, itd.). Geometriji (odn. planimetriji) smo posvetili veliku pažnju. Ne samo da je (elementarna) geometrija važna u edukativnom i povijesno-znanstvenom smislu, nego se njena važnost očituje i u sasvim novim disciplinama kao što su kombinatorna i računarska geometrija. Na sve to lijepo ukazuju Gábor Fejes-Tóth i Janos Pach u predgovoru posebnog broja časopisa *Combinatorica* 10(2) (1990):

"Dolje Euklid! Smrt trokutima!" – vikao je Jean Dieudonné, jedan od vodećih geometara današnjice na konferenciji u Réaumontu 1959.

Ovo stoljeće je donijelo izvanredne nove sinteze analize, algebre i geometrije. Geometrijski modeli i ideje uvukli su se u sva područja matematike. Istovremeno, značenje pojma "geometrija" proširio se van prepoznatljivosti, gurajući klasične objekte kao pravilna tijela na rub, a stavljajući moćne unificirajuće pojmove kao topologiju na centralno mjesto.

"Čudno je da su skoro svi aspekti geometrije važni za 'čovjeka s ulice' izbačeni iz našeg obrazovnog sustava" – razmišljaju Branko Grünbaum i Geoffrey Shepard u uvodu svoje nedavne knjige o popločavanjima. "Geometrija se gotovo izbacila iz školskih i sveučilišnih programa, a i ono malo što je ostalo rijetko je od neke koristi ljudima koji žele primijeniti geometrijske ideje u svome radu – inženjerima, znanstvenicima, arhitektima, umjetnicima i ostalima". Poznati ruski geometar i profesor I. M. Jaglom žalio se (svojevremeno) da udžbenici iz geometrije A. N. Kolmogorova koji su se koristili u srednjim školama u (bivšem) SSSR-u su "takvi da su u njima gotovo nestali suštinski geometrijski problemi".

Zanemarivanje elementarne geometrije u obrazovanju, kojeg smo svjedoci u zadnjih pedeset godina, je u oštrom kontrastu s njenom popularnošću u umjetnosti. Paul Cézanne je otišao čak u ekstremizam glede toga kazavši: "Priroda se mora promatrati kao perspektivna kolekcija cilindričnih, sferičnih i piramidskih oblika i trebala bi se ocrtati sa svim ravninama i svim stranama objekata usmjerenim prema svom centru."

To naravno ne znači da su umjetnici bili jedini ljudi koji su se bavili elementarnim pojmovima geometrije. Na prelasku XX stoljeća H. Minkowski je uočio da geometrijska reprezentacija može biti vrlo korisna u rješavanju diofantskih problema u teoriji brojeva. Njegova čuvena knjiga Geometrie der Zahlen *postala je izvor inspiracija ne samo za teoretičare brojeva; njeni novi pogledi na probleme pakiranja i pokrivanja konveksnih skupova inaugurirali su novu disciplinu nazvanu Diskretna geometrija.*

Kad je pred oko pola stoljeća Paul Erdős počeo postavljati probleme koje bi čak i Euklid razumio, počeo je time oživljavati najelementarnije pojmove geometrije. Dužine, pravokutni trokuti i ostali uobičajeni pojmovi euklidske geometrije ponovo su oživjeli kao objekti kombinatornog razmatranja. Kombinatorna geometrija, to novo područje začeto Erdősovim problemima, dodalo je nov i zanimljiv okus diskretnoj geometriji.

Plodotvornost računala donijela je novi izvor inspiracija za diskretne algoritamske metode i pored ostalog je dovela do rađanja i brzog rasta nove discipline – računarske geometrije. Ova nova fascinantna područja poduprta s već vrlo snažnom mašinerijom kombinatorike pridonijela je u velikoj mjeri i nedavnom snažnom razvoju diskretne geometrije. ...

Unatoč naših nastojanja, nismo na svakom mjestu u knjizi uspjeli biti strogo dosljedni u obradi pojedinih tema (uostalom, nitko nije savršen, tj. "nobody's perfect", kao što to neki vole reći). Tako smo npr. u II poglavlju o polinomima i III poglavlju o planimetriji posegnuli mjestimično i u trigonometriju (obrađena u drugom svesku). No, materijal koji je pri tom korišten je poznat svakom učeniku srednje škole i dovoljno ga je poznavati sasvim intuitivno. Naime, stroga dosljednost bi povećala opseg knjige i dovela do (nepotrebne) perturbacije materijala što bi razbilo klasičnu podjelu elementarne matematike.

U drugom svesku bit će sistematski obrađena trigonometrija, stereometrija, analitička geometrija i elementarna teorija brojeva.

U knjizi nema zadataka za samostalno rješavanje, ali zato ima velik broj detaljno riješenih primjera. Međutim, u izgledu je i poseban svezak kao zbirka zadataka. Na kraju ovog sveska smo ipak dodali nekoliko zadaća iz Elementarne matematike I s rješenjima koji su na pismenim ispitima zadavani studentima tijekom šk.g. 1990–91.

Rukopis knjige pomno su pročitali i dali mnoge korisne primjedbe i pojedina poboljšanja recenzenti prof. dr. Vladimir Volenec i prof. dr. Neven Elezović na čemu im se najsrdačnije zahvaljujemo. Također se zahvaljujemo asistentu-pripravniku A. Dujelli na pomoći oko zadataka sa pismenih ispita.

Za vrlo lijep slog na računalu i čitavu grafičku opremu, zahvalnost dugujemo Kazimiru Rajiču.

Tehnička knjiga, a posebno njezin glavni urednik ing. Zvonimir Vistrička zaslužni su za lijepu opremu knjige i zato da se što prije pojavi pred čitateljima.

Svakome tko nam ukaže na "preživjele" greške unaprijed se zahvaljujemo.

Zagreb, ratnog prosinca 1991.

B. Pavković
D. Veljan

Sadržaj

I. SKUPOVI. FUNKCIJE. BROJEVI.

§ 1. Izjave. Simboli matematičke logike.

U matematici se, kao i u svakidašnjem životu, misli, tvrdnje, pitanja izriču rečenicama. **Izjava** ili **sud** je smislena rečenica koja može biti samo **istinita** ili **lažna** (neistinita). Upitne rečenice nisu izjave. "Broj 5 je veći od broja 3" primjer je izjave i to istinite izjave. "Postoje dva različita pravca u ravnini koji se sijeku u barem dvije različite točke te ravnine" primjer je izjave, i to lažne izjave euklidske geometrije. Od izjava možemo tvoriti nove **složene izjave** povezujući polazne izjave veznicima, odnosno negirajući ih. Složene izjave proučava **račun izjava,** koji je dio **matematičke logike.** Navedimo sada neke standardne oznake matematičke logike kojima ćemo se stalno služiti u ovoj knjizi, a služit će nam samo kao simboličke pokrate.

Konjunkcija $A\&B$ dviju izjava A i B je složena izjava nastala povezivanjem izjava A, B veznikom **i** za koji se upotrebljava simbol &. $A\&B$ čita se "A i B" (ili "A et B"). Izjava $A\&B$ je po definiciji istinita točno onda, ako su izjave A, B istinite. Često se koristi i oznaka $A \wedge B$.

Naprimjer, ako je A izjava: "Broj 5 je veći od broja 3", a izjava B: "Postoje dva različita pravca u ravnini koji se sijeku u barem dvije različite točke te ravnine", onda je A istinita, a B lažna, pa je $A\&B$ lažna.

Disjunkcija $A \vee B$ dviju izjava A, B je složena izjava koja je lažna točno onda ako su obje izjave A, B lažne. $A \vee B$ se čita "A ili B" (ili "A vel B"; vel latinski znači ili, pri čemu se mogućnosti o kojima je riječ ne isključuju, tj. može nastupiti ili A ili B ili oba A, B, tj. bar jedan od A, B). Naprimjer, za A, B odabrane kao gore je $A \vee B$ istinita izjava.

Implikacija $A \Rightarrow B$ dviju izjava A, B je složena izjava koja je lažna točno onda ako je A istinita i B lažna. $A \Rightarrow B$ se čita "A povlači B" (ili "A implicira B" ili "iz A slijedi B"). Naprimjer, za A, B odabrane kao gore, izjava $A \Rightarrow B$ je lažna, dok je $B \Rightarrow A$ istinita. Za izjavu $B \Rightarrow A$ kažemo da je **obrat izjave** $A \Rightarrow B$.

Ekvivalencija $A \Leftrightarrow B$ dviju izjava A, B je složena izjava koja je istinita točno onda kada su obje izjave A, B istinite, ili kada su obje lažne. $A \Leftrightarrow B$ se čita "A je ekvivalentno sa B" (ili "A je ako i samo ako je B" ili "A je onda i samo onda kada je B"). Naprimjer, "broj 1 je veći od broja 0" $\Leftrightarrow$ "broj 2 je veći od broja 1", ili npr. ako je x realni broj za koji vrijedi da je $x^2 - 5x + 6 = 0$, onda možemo pisati $(x^2 - 5x + 6 = 0) \Leftrightarrow (x = 2) \vee (x = 3)$.

Negacija $\neg A$ izjave A je izjava koja je istinita točno onda kada je izjava A lažna. $\neg A$ se čita "nije A" (ili "non A").

Označimo li istinitost neke izjave s 1, a lažnost s 0, možemo vrijednost 1 ili 0 složene izjave $s(A, B, \ldots)$ u ovisnosti o vrijednostima izjava $A, B, \ldots$ iz kojih je ona sastavljena prikazati **semantičkom tablicom** ili **tablicom istinitosti.** Tablice istinitosti za konjunkciju, disjunkciju, implikaciju, ekvivalenciju i negaciju izgledaju (tim redom) ovako:

A	B	$A\&B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

;

A	$\neg A$
0	1
1	0

.

Kažemo da su dvije složene izjave X, Y **semantički jednake** (ili kratko jednake) ako im se pripadne semantičke tablice podudaraju; to se zapisuje kao $X \equiv Y$. Tako su naprimjer izjave $\neg(A \Rightarrow B)$ i $(A\&\neg B)$ semantički jednake, jer im tablice istinitosti izgledaju ovako:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0

,

A	B	$\neg B$	$A\&\neg B$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

.

Ovo se onda zapisuje kao $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A\&\neg B$.

Često se u matematici implikacije $A \Rightarrow B$ dokazuju **metodom suprotnog** (ili "kontrapozicijom" ili "kontradikcijom"), tj. pretpostavi se da je istinito $\neg B$, pa se na neki način dokaže da je $\neg A$ istinito što je u kontradikciji s pretpostavkom da je A istinito. Tablicom istinitosti se lako provjeri da je $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$, pa ako smo uspjeli dokazati da $\neg B \Rightarrow \neg A$, time smo onda dokazali da $A \Rightarrow B$.

Tipična tvrdnja u matematici je oblika $A \Rightarrow B$, gdje je A pretpostavka, a B zaključak. **Dokaz** takve tvrdnje se sastoji u konstrukciji lanca implikacija $A \Rightarrow \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_n \Rightarrow B$, pri čemu je svaka implikacija istinita ili kao aksiom ili vrijedi po definiciji ili je pak već otprije dokazana tvrdnja. Pri tom imamo u vidu da nam zapis $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ znači kraći zapis izjave $(A \Rightarrow B)\&(B \Rightarrow C)$.

Isto tako kod dokazivanja metodom suprotnog često koristimo princip "isključenja trećeg" (lat. tertium non datur, tj. nema treće mogućnosti), što znači da je $A \vee (\neg A)$ (A ili ne A) istinita bez obzira kakva je izjava A. Drugim riječima, izjava $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ je istinita za sve izjave A; još se kaže da je negacija negacije izjave njena afirmacija.

Osnovni zakoni računa izjava (ili **algebre sudova**) su slijedeći:

(RI1) $\neg(\neg A) \equiv A$,

(RI2) $\neg(A\&B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$,

(RI3) $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A)\&(\neg B)$.

Promotrimo rečenicu "prirodni broj x je djeljiv prirodnim brojem y". U toj rečenici ne znamo x i y, pa se ne može utvrditi niti da je ona istinita niti da je lažna. Stoga to i nije izjava. Međutim, ako uvrstimo za x i y određene brojeve, dobit ćemo izjavu; npr. ako uvrstimo za x broj 6, a za y broj 2, dobit ćemo istinitu izjavu.

Za ovakve rečenice kažemo da su **izjavne funkcije**, za x i y da su (predmetne) **varijable**, a za odnos među njima kojeg izjavna funkcija izriče da je **predikat.** Označimo li u predhodnom primjeru "...je djeljiv s..." slovom P, onda se navedena izjavna funkcija može zapisati kao $P(x, y)$. Ovdje je riječ o **dvomjesnom predikatu,** jer izražava odnos varijabli x i y. Općenito se može razmatrati n–**mjesni** predikat.

Primjena neodređenih zamjenica **svaki,** u oznaci $\forall$, i **neki** u oznaci $\exists$, na sve varijable izjavne funkcije prevodi izjavnu funkciju u izjavu; $\forall$ je tzv. **univerzalni kvantifikator,** dok je $\exists$ tzv. **egzistencijalni kvantifikator.** $\forall x$ se čita "za svako x", dok se $\exists x$ čita "postoji x". U gornjem primjeru, od izjavne funkcije $P(x, y)$ možemo npr. formirati **izjave** $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$, što znači: "za svaki prirodni broj x postoji prirodan broj y takav da je broj x djeljiv brojem y"; ta je izjava istinita (jer u primjeru možemo uzeti da je $y = 1$ ili $y = x$). Često se koriste **kvantifikatori ograničenog djelovanja:** $(\forall x \in X)$, odnosno $(\exists y \in Y)$. Po definiciji $(\forall x \in \in X)P(x)$ znači $(\forall x)(x \in X \Rightarrow P(x))$, a $(\exists y \in Y)Q(y)$ znači $(\exists y)(y \in Y\&Q(y))$ (znak $\in$ je objašnjen u §2.)

Kada ne prijeti opasnost od zabune, ponekad se kvantifikator $\forall$ izostavlja, ali se podrazumijeva. Tako se npr. osim zapisa $(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})x \cdot y = y \cdot x$ upotrebljava i kraći zapis $x \cdot y = y \cdot x$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$.

Jedan od najučestalijih simbola u matematici je svakako simbol = (čita se "jednako"). Ako se ništa posebno ne kaže, onda $a = b$ znači da su objekti čija su imena a i b, jedan te isti objekt. Kada se, međutim, u nekoj matematičkoj teoriji jednakost objekata definira svođenjem na druge pojmove, tada = ne znači da se radi o istom objektu, već ima značenje koje se tom objektu pripisuje u dotičnoj situaciji (npr. jednakost skupova, funkcija, jednadžba $x^2 - 5x + 6 = 0$ itd.). Umjesto $\neg(a = b)$, obično se piše $a \neq b$. Zagradama i zarezima služimo se u matematici kako bismo isključili mogućnost da čitalac pročita i shvati neke izjave, formule itd. drukčije nego što ih je autor zamislio.

Kad god se u ovoj knjizi pojave rečenice kao $A \Rightarrow B$, znamo da $A \Rightarrow B$, vrijedi $A \Rightarrow B$ itd. značit će to da je izjava $A \Rightarrow B$ istinita.

Ako su izjave $A, A \Rightarrow B$ istinite, onda je istinita i izjava B. To se pravilo u matematičkoj logici zove **pravilo otkidanja** ili **modus ponens.** Ako je izjava $A \Rightarrow B$ istinita, katkad još kažemo da je A **dovoljan uvjet** za B, odnosno da je B **nužan uvjet** za A. Ako je izjava $A \Rightarrow B\&B \Rightarrow A$ istinita, kaže se često još i da je uvjet A **ekvivalentan** uvjetu B, ili da je A **nužan i dovoljan uvjet** za B. Izjavu $A :\Leftrightarrow B$ čitamo ovako. *Definiramo* da je A istinito ako i samo ako je B istinito.

Na kraju navedimo i ovo pravilo zaključivanja: ako je $P(x)$ izjavna funkcija, pa ako je $P(a)$ istinita za proizvoljno odabrani a koji dolazi u obzir, onda je istinita i izjava $(\forall x)P(x)$. To se zove **pravilo generalizacije.** Često ga zapisujemo kao $P(x), \forall x$.

§ 2. Skupovi, relacije, funkcije.

Pojam **skupa** je osnovni pojam matematike, te se ne definira, tj. ne svodi se na još jednostavnije pojmove. Svaki skup sačinjavaju njegovi **elementi** i skup je njima posve određen. Izjavu "x je element skupa S" bilježimo simbolički $x \in S$, a negaciju te izjave bilježimo $x \notin S$. Među skupove ubrajamo i tzv. **prazan skup** $\emptyset$, koji je bez elemenata. Skup S najčešće se opisuje pomoću nekog svojstva P predikata, tako da elementima od S smatramo sve objekte X koji u danim okolnostima dolaze u obzir, a imaju svojstvo P. Tako pišemo $S = \{x | x \text{ ima svojstvo } P\}$ ili $S = \{x|P(x)\}$ i čitamo: "S je skup svih elemenata x sa svojstvom P". Ako je skup S sastavljen npr. od elemenata a, b, c, d onda se piše $S = \{a, b, c, d\}$. Oznaka $S := \{x|P(x)\}$ znači da *definiramo* skup S kao skup svih elemenata sa svojstvom P. Elementi skupova mogu biti najrazličitiji, npr. stanovnici nekog grada, svi pravci neke ravnine, svi realni brojevi čiji je kvadrat veći od 2, pa konačno i neki skupovi mogu biti elementi nekog novog skupa. Kažemo da je skup S **podskup** ili **dio** skupa T (a skup T **nadskup** skupa S) i pišemo $S \subseteq T$ (čita se: "S je sadržan u T") ili $T \supseteq S$ (čita se: "T sadrži S") ako je svaki element $x \in S$ element od T, tj. $x \in T$. Prazan skup $\emptyset$ je podskup svakog skupa. Dva skupa S i T su **jednaki** i piše se $S = T$, ako je $S \subseteq T$ i $T \subseteq S$, tj. ako je svaki element od S element od T i svaki element od T ujedno element od S. Ako je $S \subseteq T$ i $S \neq T$, onda kažemo da je S **pravi podskup** od T; pišemo $S \subset T$. Naprimjer, $\{1,2,3\} = \{2,1,3\}$, ali $\{1,2,3\} \neq \{1,2\}$ i $\{1,2\} \subset \{1,2,3,4\}$. Uočite da je poredak elemenata unutar vitičastih zagrada nebitan.

Sa skupom S posve je određen **partitivni skup** od S, čiji su elementi svi podskupovi skupa S. Taj se skup obično označava sa $\mathcal{P}(S)$ ili sa 2^S. Očito je $\emptyset, S \in \mathcal{P}(S)$. Podskup od $\mathcal{P}(S)$ se katkad zove **familija podskupova** od S.

Neka su $A, B, C, \ldots$ podskupovi nekog skupa U. Tada je posve određen podskup od U

$$\{x \in U | x \in A \vee x \in B\},$$

koji se zove **unija** skupova A i B i označava s $A \cup B$. Isto tako posve je određen podskup od U

$$\{x \in U | x \in A \& x \in B\},$$

koji se zove **presjek** skupova A i B i označava sa $A \cap B$. Nadalje, posve je određen podskup od U

$$\{x \in U | x \in A \& x \notin B\},$$

koji se zove **diferencija** (ili **razlika**) skupova A i B i označava se sa $A \setminus B$. Razlika $U \setminus A$ zove se **komplement** podskupa A u skupu U. Kad je jasno (iz konteksta ili drukčije) o kojemu skupu U je riječ, često se za komplement od A koristi i oznaka $\overline{A}$.

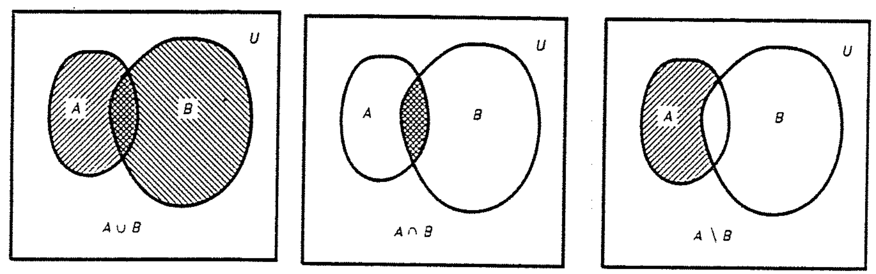
Kažemo da su skupovi A i B **disjunktni** ako je $A \cap B = \emptyset$, a da se sijeku ako je $A \cap B \neq \emptyset$. **Simetrična diferencija** je $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Iz definicije unije, presjeka i komplementa može se lako dokazati da za proizvoljne skupove $A, B, C, \ldots$ iz U vrijede formule:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \tag{1}$$
$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A \tag{2}$$
$$A \cup (A \cap B) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A \tag{3}$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{4}$$
$$A \cup \overline{A} = U \qquad A \cap \overline{A} = \emptyset \tag{5}$$
$$A \cup \emptyset = A \qquad A \cap U = A \tag{6}$$
$$A \cup U = U \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \tag{7}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{8}$$
$$\overline{U} = \emptyset \qquad \overline{\emptyset} = U \tag{9}$$
$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A \tag{10}$$
$$\overline{\overline{A}} = A \tag{11}$$

Primijetimo da su formule u lijevom i desnom stupcu međusobno dualne u smislu da zamjenom znakova $\cup$ i $\cap$, te U i $\emptyset$, one prelaze jedne u druge. Formule (8) su tzv. **De Morganove***) formule.

Shematski je zgodno skupove predstavljati kao dijelove ravnine omeđene zatvorenim krivuljama. To su tzv. **Vennovi****) **dijagrami** (za skup U se obično tada uzima čitava ravnina ili neki pravokutnik (v. sl. 1)). Partitivni skup $\mathcal{P}(U)$ zajedno s operacijama $\cup$, $\cap$, , za koje vrijede formule (1)–(11), zove se **Booleova*****) **algebra skupova na** U.



Sl. 1.

Koristit ćemo se standardnim oznakama za osnovne skupove brojeva, i to:

N = skup prirodnih brojeva = $\{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$,

Z = skup cijelih brojeva = $\{\ldots, -2, 1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

*) Augustus de Morgan (1806–1871), engl. matematičar i logičar.
**) John Venn (1834–1923), engl. logičar.
***) George Boole (1815–1864), engl. logičar i matematičar.

Q = skup racionalnih brojeva $= \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}$,

$\mathbf{R}$ = skup realnih brojeva,

$\mathbf{C}$ = skup kompleksnih brojeva $= \{x + iy | x, y \in \mathbf{R}\}, i = \sqrt{-1}$,

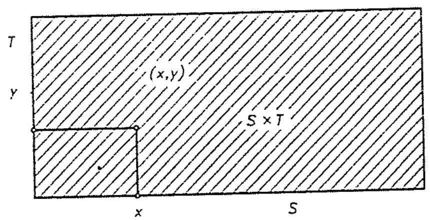
$\mathbf{Z}^+ = \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

$\mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Direktni (ili **Kartezijev**) produkt dvaju skupova S i T je skup $S \times T$ svih **uređenih parova** (x, y) elemenata $x \in S$, $y \in T$, tj.

$$S \times T = \{(x, y) | x \in S, y \in T\}.$$

Za uređene parove je $(x, y) = (x', y')$ ako i samo ako je $x = x'$ i $y = y'$. Napomenimo da se uređeni par (x, y) općenito razlikuje od uređenog para (y, x). Nadalje, uređen par (x, y) se može definirati i kao skup $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Smatramo da je uvijek $\emptyset \times S = S \times \emptyset = \emptyset$.



Sl. 2.

Direktni produkt triju skupova R, S, T definira se kao skup svih uređenih trojki (x, y, z) elemenata $x \in R$, $y \in S$, $z \in T$, tj. $R \times S \times T = \{(x, y, z) | x \in R, y \in S, z \in T\}$. Opet su uređene trojke (x, y, z) i (x', y', z') jednake, ako i samo ako je $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$. Netko bi mogao pomisliti da uređenu trojku možemo definirati ako skup $\{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$, no to nije dobro (dokažite to!), nego je uređena trojka uređen par $(x, (y, z))$, a to je skup $\{\{x\}, \{\{x\}, \{\{y\}, \{y, z\}\}\}\}$. Općenito, ako imamo n skupova ($n \in \mathbf{N}$), $S_1, S_2, \ldots, S_n$, onda se njihov direktni produkt $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ definira kao skup svih uređenih n–torki $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_1 \in S_1, \ldots, x_n \in S_n$. Ako je $S_1 = S_2 = \ldots = S_n$, onda se n–struki produkt zapisuje još i kao S^n.

Svaki podskup $\rho \subseteq S \times S$ zove se **binarna relacija** na skupu S. Za elemente $x, y \in S$ kažemo da su u relaciji ρ, i piše se $\rho(x, y)$ ili $x \rho y$ ako je $(x, y) \in \rho$.

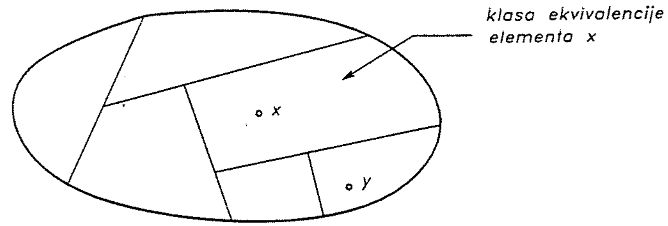
Relacija ρ je **refleksivna**, ako je $x \rho x$, za svako $x \in S$; relacija ρ je **simetrična** ako za svako $x, y \in S$ $x \rho y$ povlači $y \rho x$; relacija ρ je **tranzitivna** ako za svako $x, y, z \in S$, $(x \rho y) \& (y \rho z)$ povlači $x \rho z$. **Relacija ekvivalencije** (ili **klasifikacije**) je binarna relacija koja je istodobno refleksivna, simetrična i tranzitivna. Obično se relacija ekvivalencije bilježi sa $\sim$. Naprimjer, jednakost elemenata "=" nekog skupa S je relacija ekvivalencije na A. Nadalje, za $n \in \mathbf{N}$, definirajmo za dva cijela broja $a, b \in \mathbf{Z}$ da su **kongruentno modulo** n, u zapisu $a \equiv b \pmod{n}$, ako je $a - b$ djeljivo sa n. Tada je očito $a \equiv a \pmod{n}$, $\forall a \in \mathbf{Z}$, $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b \equiv a$ (mod

n), te $a \equiv b \pmod{n}$ & $b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$ (dokažite to), pa je $\equiv$ (mod n) relacija ekvivalencije na $\mathbf{Z}$. Kao daljnji primjer, označimo sa $\mathcal{P}$ skup svih pravaca u ravnini $\mathbf{R}^2$. Relacija "biti paralelan" $\|$ je relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{P}$.

Ako je $\sim$ relacija ekvivalencije na nekom skupu S, onda se S može prikazati na jedinstven način kao unija disjunktnih podskupova, tzv. **klasa ekvivalencije** s obzirom na relaciju $\sim$.

U istu klasu, po definiciji, ulaze svi međusobno ekvivalentni elementi od S. Za $x \in S$ označimo sa $[x] = \{y \in S | y \sim x\}$ klasu ekvivalencije od x. Tada je očito $x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y]$, te za svake dvije klase $[x]$, $[y]$ vrijedi da se ili podudaraju ili su disjunktne. Unija svih klasa ekvivalencije je očito čitav skup S, pa relacija ekvivalencije $\sim$ na S definira jednu **"particiju"** skupa S na klase ekvivalencije.

Shematski se ta situacija može prikazati ovako kao na sl. 3.



Sl. 3.

Skup svih klasa ekvivalencije s obzirom na relaciju ekvivalencije $\sim$ na S zove se **kvocijentni skup** i označava se sa $S/\sim$.

Kvocijentni skup u gornjem primjeru jednakosti elemenata na S jednak je skupu čiji su elementi jednočlani skupovi $\{x\}, x \in S$, tj. $S/_= = \{\{x\} | x \in S\}$, pa ga možemo identificirati sa skupom S. U drugom se primjeru, kvocijentni skup $\mathbf{Z}/\equiv(\text{mod } n)$ često zapisuje kao $\mathbf{Z}_n$ i zove **skup ostataka modulo** n. U trećem primjeru relacije paralelnosti $\|$ na skupu $\mathcal{P}$ svih pravaca u ravnini kvocijentni skup $\mathcal{P}/\|$ je skup svih smjerova u ravnini.

Drugi osnovni tip binarne relacije je relacija **parcijalnog uređaja** $\leq$ (manje ili jednako) na skupu S. To je binarna relacija na S koja je refleksivna, tranzitivna i **antisimetrična**, tj. ima svojstvo da za svako $x, y \in S (x \leq y) \& (y \leq x)$ povlači $x = y$. Ako je osim toga, za svaki $x, y \in S, (x \leq y) \vee (y \leq x)$, onda se govori o **relaciji uređaja** (ili **totalnog uređaja**). Ako je $\leq$ totalni uređaj na S, onda se S zajedno s $\leq$ (tj. uređen par $(S, \leq)$) zove **totalno uređen skup** ili **uređen skup**. Tako je npr. obična nejednakost na skupu $\mathbf{R}$ realnih brojeva totalni uređaj (katkad se još zove i **linearni uređaj**). Umjesto $x \leq y$ ponekad se piše $y \geq x$ (y veće ili jednako x). Ako je $x \leq y$ i $x \neq y$, piše se $x < y$ (x manje od y), ili $y > x$ (y veće od x).

Neka je $(S, \leq)$ parcijalno (ili totalno) uređen skup, a $X \subseteq S$ neprazan podskup od S. Kažemo da je $m \in S$ **donja međa** od X ako je $m \leq x, \forall x \in X$. Skup X je **odozdo omeđen** ako postoji bar jedna donja međa od X.

Najveća donja međa ili **infimum** odozdo omeđenog skupa $X \subseteq S$ je $\inf X \in S$, ako vrijedi:

(1) $\inf X$ je donja međa skupa X,

(2) za svaku donju među m skupa X vrijedi $m \leq \inf X$.

Ako $\inf X$ postoji, onda je jedinstven. Naime, pretpostavimo da imamo dva elementa $m_1, m_2 \in S$ sa svojstvima (1), (2). Tada bi vrijedilo $(m_1 \leq m_2)\&(m_2 \leq m_1)$, a odatle izlazi $m_1 = m_2$.

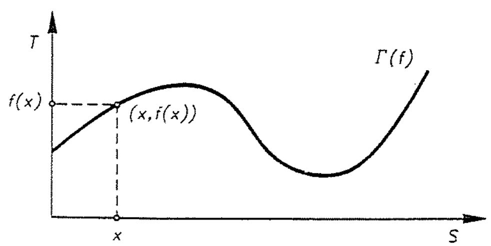
Najmanji element ili **minimum** skupa $X \subseteq S$ je element $\min X \in X$, koji je ujedno donja međa za X, tj. $\min X \leq x$, za svako $x \in X$. Ako minimum skupa X postoji, onda je jedinstven, te je očito $\inf X = \min X$.

Kažemo da je totalno uređen skup $(S, \leq)$ **dobro uređen,** ako svaki njegov neprazni podskup ima minimalni element. Tako je npr. skup N s obzirom na obični uređaj brojeva dobro uređen , dok skup **R** s običnim uređajem to nije, jer npr. za skup $X = \{x \in \mathbf{Q} | x^2 > 2\}$ $\inf X = \sqrt{2}$ nije najmanji element od X (to ćemo kasnije pokazati).

Posve analogno definiraju se pojmovi: **gornja međa, odozgo omeđen skup, najmanja gornja međa** ili **supremum** $\sup X$ i **najveći element** ili **maksimum** $\max X$ nepraznog skupa $X \subseteq S$. Učinite to sami. Ako je $X \subseteq S$ omeđen odozdo i odozgo, kažemo da je **omeđen.** Ako je $(S, \leq)$ parcijalno uređen skup, $a, b \in S$, $a \leq b$, onda se skup $[a, b] := \{x \in S | a \leq x \leq b\}$ zove **segment** u S, a ako je $a < b$, skup $\langle a, b\rangle := \{x \in S | a < x < b\}$ **interval** u S. Često se promatraju i skupovi $[a, \cdot\rangle$, $\langle a, \cdot\rangle$, $\langle \cdot, b]$, $\langle \cdot, b\rangle$, gdje je npr. $\langle \cdot, b] := \{x \in S | x \leq b\} \subseteq S$.

Neka su sada S i T dva skupa. **Preslikavanje** ili **funkcija** sa skupa S u skup T je uređena trojka (S, T, f), koja se sastoji od skupa S, koji se zove **područje definicije** ili **domena,** skupa T, koji se zove **područje vrijednosti** ili **kodomena,** te nekog pravila f, pomoću kojeg svakom elementu $x \in S$ pridružujemo neki element $y \in T$ (koji ovisi o x). Pridruženi element y zove se **vrijednost preslikavanja** na elementu x i označava se sa $f(x)$ ili fx. Katkad je zgodna i oznaka $x \mapsto f(x)$, $x \in S, f(x) \in T$ ili jednostavno $x \mapsto f(x)$, kojom se označava funkcija koja prevodi element x u $f(x)$. Npr. kvadriranje je funkcija $x \mapsto x^2, x \in \mathbf{R}, x^2 \in \mathbf{R}$. Katkad se naprosto zapisuje da je funkcija kvadriranja zadana sa $y = x^2$.

Graf preslikavanja (S, T, f) je skup $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) | x \in S\} \subseteq S \times T$:

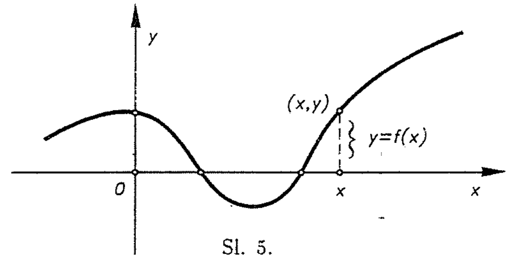


Sl. 4.

Uobičajena oznaka za preslikavanje ili funkciju je $f : S \to T$. Često se još o

elementima $x \in S$ govori kao o **nezavisnoj varijabli** ili **argumentu,** a o elementima $y \in T$ kao o **zavisnoj varijabli** funkcije. Pojam funkcije se može alternativno definirati ovako. $f : S \to T$ je podskup $\Gamma \subseteq S \times T$, koji ima svojstvo da za svako $x \in S$ postoji jedan i samo jedan $y \in T$, tako da je $(x, y) \in \Gamma$. Tu smo, dakle, poistovjetili pojam funkcije s pojmom grafa i taj je pristup s logičke strane u prednosti jer se ne služi (s nedefiniranim) pojmom "pravilo", ali je prvi pristup intuitivno bliži, a ne uzrokuje teškoće, jer se u njemu može gledati samo način govora, dok je matematički smisao iz ovog drugog pristupa.

Grafove funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (ili $f : S \to \mathbf{R}$, gdje je $S \subseteq \mathbf{R}$) zadanih formulom $y = f(x)$ ili nekim propisom $x \xrightarrow{f} y$ obično prikazujemo u koordinatnom sustavu kao na sl. 5, pri čemu se os X zove **apscisa,** a os y **ordinata.**

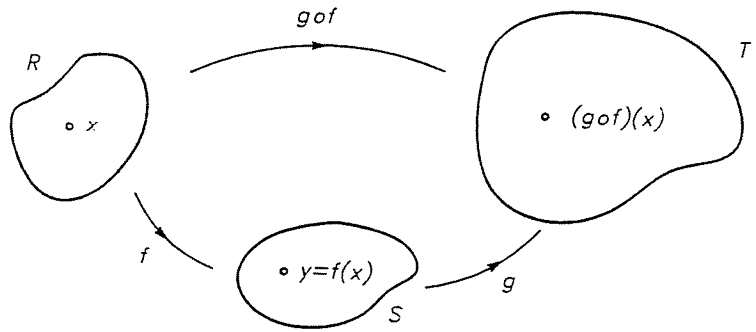


Sl. 5.

Poučno je nacrtati grafove funkcija $\lfloor\,\rfloor, \lceil\,\rceil : \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$, gdje je $\lfloor x \rfloor$ =**najveći cijeli broj** $\leq x$ ("pod" od x), $\lceil x \rceil$ =**najmanji cijeli broj**$\geq x$ ("strop" od x). Uočite da je $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

Preslikavanja (S, T, f) i (S', T', f') su **jednaka** ako je $S = S', T = T'$ i za svako $x \in S = S'$ je $f(x) = f(x')$. Vrlo je važno uočiti da za jednakost preslikavanja zahtijevamo da su im domene i kodomene jednaki skupovi. Npr. neka je $S \subseteq T$. Preslikavanje $i : S \to T$, definirano formulom $i(x) = x, x \in S$, zove se **inkluzija** (ili **ulaganje**). Ako je S pravi podskup od T, onda je inkluzija $i : S \to T$ različita od preslikavanja $1_S : S \to S$, koje definiramo formulom $1_S(x) = x, x \in S$, a zove se **identiteta** ili **identično preslikavanje.** Naime, tada i, 1_S imaju različite kodomene. Još neki važniji primjeri preslikavanja su ovi: neka su S i T skupovi. Tada definiramo **projekcije** $p_S : S \times T \to S$ i $p_T : S \times T \to T$, sa $p_S(x, y) = x, p_T(x, y) = y$ (zapravo bi trebalo pisati $p_S((x, y))$, ali te dvostruke zagrade obično izostavljamo); projekciju p_S obično zovemo prvom, a p_T drugom projekcijom. Nadalje, ako je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu S, onda definiramo **prirodnu projekciju** ili **kvocijentno preslikavanje** $q : S \to S/\sim$, formulom $q(x) = [x]$. Daljnji važni primjeri preslikavanja su **binarne operacije.** Binarna operacija na skupu S je svako preslikavanje skupa $S \times S$ u S. Npr. zbrajanje prirodnih brojeva je binarna operacija $+ : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}, +(k, l) = k + l \in \mathbf{N}$. Ili, $\cup, \cap, \setminus$ su binarne operacije na partitivnom skupu $S = \mathcal{P}(U)$ nekog skupa U, jer svakom paru $(A, B) \in \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U)$ pridružuju novi element $A \cup B \in \mathcal{P}(U), A \cap B \in \mathcal{P}(U), A \setminus B \in \mathcal{P}(U)$. **Kompozicija preslikavanja** $f : R \to S$ i $g : S \to T$ je preslikavanje $h : R \to T$, takvo da je za svako

$x \in R, h(x) = g(f(x))$. Oznaka za kompoziciju od f i g je $g \circ f$, tj. $h = g \circ f$ ili naprosto $h = gf$ (v. sl. 6).



Sl. 6.

Ako su $f : P \to R$, $g : R \to S$, $h : S \to T$ preslikavanja, tada je $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, tj. za kompoziciju preslikavanja vrijedi **zakon asocijacije** (dokažite to!). Nadalje, ako su $1_S : S \to S$ i $1_T : T \to T$ identička preslikavanja, a $f : S \to T$, onda je $f \circ 1_S = 1_T \circ f = f$.

Neka je $S' \subseteq S$, a $f : S \to T$ i $f' : S' \to T$ preslikavanja sa svojstvom da je za svako $x \in S', f(x) = f'(x)$. Tada kažemo da je f' **restrikcija** (ili **suženje**) od f na podskup S' i pišemo $f' = f|_{S'}$. Kažemo još da je f **proširenje** (ili **ekstenzija**) od f' na S.

Vrlo korisna funkcija za ispitivanje da li element nekog ("velikog") skupa U pripada nekom podskupu od U je tzv. **karakteristična funkcija** χ_S podskupa $S \subseteq U$. To je funkcija $\chi_S : U \to \{0,1\}$ definirana sa

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako } x \in S \\ 0, & \text{ako } x \notin S. \end{cases}$$

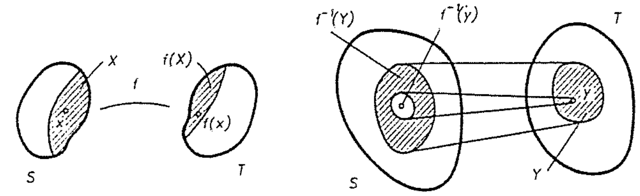
Umjesto skupa $\{0,1\}$ može se uzeti bilo koji dvočlani skup, npr. {istinito, lažno} itd. Ta je funkcija vrlo korisna za programiranje na kompjuterima.

Slika skupa $X \subseteq S$ pri preslikavanju $f : S \to T$ je skup $f(X) := \{y \in T | \exists x \in X \& y = f(x)\} \subseteq T$, ili kraće $f(X) = \{f(x) | x \in X\} \subseteq T$, a **slika od** f, $\operatorname{Im} f := f(S)$.

Inverzna slika (ili **original**) skupa $Y \subseteq T$ pri preslikavanju $f : S \to T$ je skup $f^{-1}(Y) := \{x \in S | y \in Y \& y = f(x)\} \subseteq S$, ili kraće $f^{-1}(Y) = \{x \in S | f(x) \in Y\}$. Ako je $Y = \{y\}$ jednočlani skup, onda stavljamo $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\}) = \{x \in S | f(x) = y\}$ i zovemo ga **originalom točke** y po f ili **vlakno** od y. Shematski možemo sliku, inverznu sliku i original točke prikazati kao na sl. 7.

Neka je $f : S \to T$ preslikavanje, $A, B \subseteq S$, te $C, D \subseteq T$. Tada vrijede formule (dokažite ih sami):

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \qquad f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \tag{12}$$



Sl. 7.

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B) \qquad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \tag{13}$$

$$f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B) \qquad f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D) \tag{14}$$

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \tag{15}$$

$$f(f^{-1}(C)) = C \cap f(S) \subseteq C. \tag{16}$$

Ako je dano i preslikavanje $g : T \to U$ i $E \subseteq U$, onda je

$$(gf)^{-1}(E) = f^{-1}g^{-1}(E). \tag{17}$$

Oznaka za skup svih preslikavanja sa skupa S u skup T je T^S.

Za preslikavanje $f : S \to T$ kažemo da je **injekcija** (ili **1-1-preslikavanje**) ako $f(x) = f(x')$ povlači $x = x'$, a kažemo da je **surjekcija** (ili **preslikavanje na**) ako je $f(S) = T$ (tj. $(\forall y \in T)(\exists x \in S)$, $f(x) = y$). f je **bijekcija** (ili **obostrano jednoznačno preslikavanje**) ako je f injekcija i surjekcija.

Kažemo da su skupovi S i T **ekvipotentni** ili **bijektivni** ako postoji bijekcija $f : S \to T$. Relacija ekvipotencije je relacija ekvivalencije, pa se skupovi svrstavaju u disjunktne klase; klasa kojoj pripada skup S zove se **kardinalni broj** skupa S i označava sa $|S|$ ili card S.

Neka je $f : S \to T$. Kažemo da je $g : T \to S$ **inverzno preslikavanje** ili **inverz** od f ako je $gf = 1_S$ i $fg = 1_T$. Odmah se vidi da za dano preslikavanje f može postojati najviše jedno inverzno preslikavanje. Dalje, ako za $f : S \to T$ postoji inverz, onda je f bijekcija, i obratno, svaka bijekcija f dopušta inverzno preslikavanje koje se obično označava sa f^{-1}. Pojam "funkcija" uveo je Gottfried Leibniz 1692.*)

Kažemo da je skup S **konačan skup** ako S nije ekvipotentan niti s jednim svojim pravim podskupom. Kažemo da je skup S **beskonačan** ako nije konačan, tj. ako postoji pravi podskup $S' \subset S$ i bijekcija $f : S \to S'$. Prazan skup $\emptyset$ je

*) Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), njemački matematičar i filozof. Bavio se još biologijom, geologijom, jezikoslovljem, teologijom i pravom. Smatraju ga posljednjim enciklopedistom.

konačan skup i stavljamo $|\emptyset| = 0$. Kardinalan broj konačnog skupa S se još zove i **broj elemenata** od S ili **brojnost** od S. Naravno, mnoštvo je primjera konačnih skupova: skup svih studenata nekog fakulteta, skup svih stanovnika Zemlje, skup svih atoma u danas vidljivom svemiru (njegova je brojnost $\approx 10^{100}$), $\{1,2,3,4,5\}$ itd. Za razliku od tih skup $\mathbf{N}$ je beskonačan jer postoji bijekcija sa $\mathbf{N}$ na njegov pravi podskup, npr. skup svih parnih brojeva $2\mathbf{N} = \{2n | n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{N}$. Funkcija $f : \mathbf{N} \to 2\mathbf{N}, f(n) = 2n$ je bijekcija, pa je $\mathbf{N}$ beskonačan skup. Svaki nadskup od $\mathbf{N}$ je tada također beskonačan, kao i $\mathbf{N} \times S$, gdje je $S \neq \emptyset$. Iako postoji (očita) injekcija $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$, ne postoji injekcija $\mathbf{R} \to \mathbf{N}$ (to ćemo kasnije pokazati; v. Teorem 4). Za $n \in N$ je $\operatorname{card}\{1,2,\ldots,n\} = n$. Kako smo rekli, ekvipotentni skupovi S i T imaju isti kardinalni broj, tj. $\operatorname{card} S = \operatorname{card} T$ (ili $|S| = |T|$). Stoga skup S za koji postoji bijekcija $\{1,2,\ldots,n\} \to S$ zovemo **n–člani skup.** Skup koji je ekvipotentan skupu prirodnih brojeva $\mathbf{N}$ zovemo **prebrojiv skup**. Kardinalni broj prebrojivog skupa bilježi se simbolom $\aleph_0$ (alef nula, prema prvom hebrejskom slovu alef). Nadalje, kažemo da kardinalni broj skupa S *nije veći* od kardinalnog broja skupa T i pišemo $\operatorname{card} S \leq \operatorname{card} T$, ako je S ekvipotentan nekom podskupu od T, tj.

$$\operatorname{card} S \leq \operatorname{card} T :\Leftrightarrow (\exists P \subseteq T)(\operatorname{card} S = \operatorname{card} P).$$

Jasno je da za $S \subseteq T$ vrijedi $\operatorname{card} S \leq \operatorname{card} T$. Kako smo vidjeli pravi podskup parnih brojeva $2\mathbf{N} \subset \mathbf{N}$ je ekvipotentan s čitavim $\mathbf{N}$; drugi je primjer interval realnih brojeva $\langle -1, 1\rangle \subseteq \mathbf{R}$, jer je funkcija $x \mapsto \dfrac{1}{1-|x|}$ bijekcija na čitav skup realnih brojeva. Stoga možemo reći da interval $\langle -1, 1\rangle$ i čitava os realnih brojeva imaju "jednako mnogo točaka". Ako je $\operatorname{card} S \leq \operatorname{card} T$ i $\operatorname{card} S \neq \operatorname{card} T$, pišemo $\operatorname{card} S < \operatorname{card} T$. Svaki skup S za koji je $\operatorname{card} S > \operatorname{card} \mathbf{N} = \aleph_0$ zove se **neprebrojiv skup**. Sljedeći teorem pokazuje da nema "najvećeg kardinalnog broja".

TEOREM 1 (G. Cantor).*) *Za svaki skup S vrijedi* $\operatorname{card} S < \operatorname{card} \mathcal{P}(S)$, *gdje je $\mathcal{P}(S)$ partitivni skup od S.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$, tvrdnja je jasna, pa pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$. Kako $\mathcal{P}(S)$ sadrži sve jednočlane podskupove od S, slijedi da je $\operatorname{card} S \leq \operatorname{card} \mathcal{P}(S)$. Stoga treba još pokazati da je $\operatorname{card} S \neq \operatorname{card} \mathcal{P}(S)$ za $S \neq \emptyset$.

Pretpostavimo suprotno da postoji bijekcija $f : S \to \mathcal{P}(S)$. Promotrimo podskup $A = \{x \in S | x \notin f(x)\} \subseteq S$ svih elemenata $x \in S$ koji nisu elementi pridruženog podskupa $f(x) \in \mathcal{P}(S)$. Kako je $A \in \mathcal{P}(S)$, onda postoji $a \in S$ takav da je $f(a) = A$. No za element $a \in S$ nemoguće je da je $a \in A$ (zbog definicije skupa A), ali ni $a \notin A$ (opet po definiciji od A). Time smo došli u kontradikciju s principom isključenja trećeg. ■

Kardinalni broj skupa realnih brojeva se zove **kontinuum** i piše se $\operatorname{card} \mathbf{R} = \mathcal{C}$. Kasnije ćemo pokazati da je $\operatorname{card} \mathbf{N} < \operatorname{card} \mathbf{R}$, tj. $\aleph_0 < \mathcal{C}$, tj. da je skup realnih brojeva neprebrojiv.

*) Georg Ferdinand Cantor (1845–1918), njemački matematičar, jedan od osnivača teorije skupova.

Već na početku izgradnje teorije brojeva (krajem 19. st. i početkom 20. st.) postavljeno je prirodno pitanje o postojanju skupa A sa svojstvom $\aleph_0 < \operatorname{card} A < \mathcal{C}$. Raznim ispitivanjima iskristalizirala se slutnja da takav skup ne postoji. Tako je nastala čuvena **hipoteza kontinuuma.** Pokazalo se da to pitanje zadire u same osnove aksiomatske izgradnje brojeva, pa tako i čitave matematike. Problem je konačno riješio američki matematičar Paul Cohen*) 1963. Cohen je dokazao nerazrješivost hipoteze kontinuuma, pokazavši da niti nju niti njenu negaciju nije moguće dokazati u okviru općeprihvaćene aksiomatike teorije skupova.

U nekom smislu je to analogna situacija nezavisnosti Euklidovog petog postulata o paralelama od ostalih aksioma geometrije ravnine (o čemu će biti riječi u III poglavlju).

Spomenimo na kraju i ovaj teorem.

TEOREM 2 (Cantor–Bernstein).**) *Ako su S i T skupovi, onda vrijedi*

$$\operatorname{card} S \leq \operatorname{card} T \;\;\&\;\; \operatorname{card} T \leq \operatorname{card} S \Rightarrow \operatorname{card} S = \operatorname{card} T.$$

§ 3. Brojevi

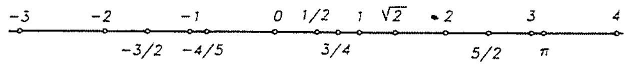
Pojam prirodnog, cijelog i racionalnog broja je u dobroj mjeri poznat (barem bi tako trebalo biti) već učenicima osnovnih škola. Pri kraju osnovnog obrazovanja učenici se susreću s brojevima kao $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, pa onda s brojem π (kao omjerom duljine kružnice i dijametra) itd. Dakle susreću se već i sa iracionalnim brojevima, čime su upoznaju i s realnim brojevima na intuitivno prihvatljivoj razini. U srednjoj se školi manipulira s realnim brojevima i na tom intuitivnom nivou za mnoge ljude prestaje bilo koji upit o tome kako zapravo stoje stvari s brojem i kako treba matematički rigorozno zasnovati realne brojeve (a time i racionalne, cijele i prirodne).

U modernoj matematici pojam realnog broja igra osnovnu ulogu, pa je nakon dobrog upoznavanja realnih (pa i kompleksnih) brojeva lakše razumjeti npr. geometriju, algebru i matematičku analizu. Osnovna svojstva realnih brojeva popisat ćemo kao aksiome jedne matematičke strukture, a potom ćemo ukratko ukazati na egzistenciju i jedinstvenost takve strukture, te ukazati na to zašto možemo na realne brojeve zaista misliti (kao što djecu od rana tako učimo) kao na točke s pravca. Dakle, da naša mentalna slika skupa realnih brojeva izgleda kao na sl. 8.

Prije nego pređemo na preciznu definiciju realnih brojeva, uzmimo da znamo što su to prirodni brojevi $\mathbf{N}$: $1, 2, 3, \ldots$, pa zatim 0 i negativni cijeli brojevi

*) Paul Cohen (1934–), američki matematičar, profesor univerziteta u Stanfordu. Godine 1966. na međunarodnom kongresu matematičara u Moskvi dobio je za rješenje hipoteze kontinuuma Fieldsovu medalju, što je jednako visoko priznanje kao Nobelova nagrada za druge discipline.

**) Felix Bernstein (1878–1956), njemački matematičar.



Sl. 8.

$-1, -2, -3, \ldots$; tj. cijeli brojevi $\mathbf{Z}: \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$, kao i racionalni brojevi $\mathbf{Q}$, tj. razlomci oblika m/n, gdje su m, n cijeli brojevi, $n \neq 0$. Ovi brojevi ne iscrpljuju sve brojeve. Npr. ne postoji racionalni broj r, takav da je $r^2 = 2$. To vodi na tzv. "iracionalne brojeve" (ne u smislu nerazumnih ili "ludih" brojeva), nego u smislu da se ne mogu prikazati kao kvocijent cijelih brojeva.

Pokažimo sada da ne postoji racionalan broj r, za koji je $r^2 = 2$. Pretpostavimo suprotno, da takav postoji i neka je $r = m/n$. Možemo tada pretpostaviti da je razlomak m/n skraćen do kraja (tj. da je jedini zajednički faktor od m i n jednak 1), jer ako nije, skratimo ga. Tada $r^2 = 2$ i $r = m/n$ povlače da je $2n^2 = m^2$, a to povlači da je m^2 paran broj, pa stoga i m paran (jer kad bi m bio neparan, tada bi takav bio i m^2). Zato je m^2 djeljiv sa 4, pa iz $m^2 = 2n^2$ slijedi da je $2n^2$ djeljiv sa 4, pa je zato n^2 paran, a to povlači da je n paran.

Dakle, naša nas je pretpostavka dovela do toga da su oba broja m i n parni, što je u suprotnosti s izborom m i n. Prema tome, ne postoji racionalan broj r za koji je $r^2 = 2$.

Napomena. Evo i drugog dokaza da $r = \sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$. Prepostavimo suprotno, tj. da $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$. Tada postoji $n \in \mathbf{N}$ tako da je $n\sqrt{2} \in \mathbf{N}$. Neka je $k \in \mathbf{N}$ najmanji broj za koji je $k\sqrt{2} \in \mathbf{N}$. Označimo $l = (\sqrt{2}-1)k = \sqrt{2}k - k$. Tada je $l \in \mathbf{N}$, jer su $k\sqrt{2}, k \in \mathbf{N}$, a $k\sqrt{2} > k$, jer je $\sqrt{2} > 1$ zbog $2 > 1$. No $l\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)k\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2} \in \mathbf{N}$, jer su $2k, k\sqrt{2} \in \mathbf{N}$, a $2k > k\sqrt{2}$, jer je $4 > \sqrt{2}$ zbog $4 > 2$.

Međutim $l\sqrt{2} < k\sqrt{2}$, jer je $\sqrt{2} < 2$, a to je u kontradikciji s izborom od k kao najmanjim prirodnim brojem za koji je $k\sqrt{2} \in \mathbf{N}$.

Inače, tu su činjenicu već poznavali starogrčki matematičari i iskoristili je u smislu da dijagonala jediničnog kvadrata nije sumjerljiva sa stranicom kvadrata.

Pogledajmo sada još malo detaljnije tu situaciju. Označimo sa A skup svih pozitivnih racionalnih brojeva r za koje je $r^2 < 2$, tj. $A = \{r \in \mathbf{Q} | r > 0, r^2 < 2\}$ i slično $B = \{r \in \mathbf{Q} | r > 0, r^2 > 2\}$. Pokažimo da niti skup A ne sadrži najveći broj, niti B sadrži najmanji broj.

Točnije, pokažimo da za svako $r \in A$ možemo naći $s \in A$ za koji vrijedi $r < s$, te slično da za svako $r \in B$ možemo naći $s \in B$ za koji je $s < r$.

U tu svrhu, svakom racionalnom broju $r > 0$ pridružimo broj

$$s = r - \frac{r^2 - 2}{r+2} = \frac{2r+2}{r+2}. \qquad (*)$$

Tada je

$$s^2 - 2 = \frac{2(r^2-2)}{(r+2)^2}. \qquad (**)$$

Sada, ako je $r \in A$, onda je $r^2 < 2$, pa $(*)$ povlači $s > r$, a $(**)$ povlači $s^2 < 2$. Dakle je $s \in A$.

Ako je $r \in B$, onda je $r^2 > 2$, pa $(*)$ povlači $0 < s < r$, a $(**)$ povlači $s^2 > 2$. Dakle je $s \in B$.

Ova diskusija pokazuje da racionalni brojevi imaju izvjesne "rupe" i to unatoč činjenici da između svaka dva racionalna broja imamo racionalnih brojeva. Naime, ako su $r < s$ takvi, onda je $r < (r+s)/2 < s$. Upravo realni brojevi ispunjavaju te "rupe".

U prethodnom primjeru, za svaki pozitivni racionalni broj r vrijedi ili $r^2 < 2$ ili $r^2 > 2$. Očito je $1^2 < 2$, $2^2 > 2$, pa promotrimo (decimalne) brojeve 1,0; 1,1; 1,2;...; 1,9; 2,0 i među njima nađimo dva susjedna od kojih prvi ima kvadrat manji od dva, a drugi kvadrat veći od dva. To su $1{,}4^2 < 2$ i $1{,}5^2 > 2$. Dalje nastavimo taj proces sa 1,40; 1,41; ...; 1,49; 1,50. Nalazimo $1{,}41^2 < 2$, $1{,}42^2 > 2$ itd. Tako dolazimo do niza brojeva

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;\ldots$$

koji "teže" prema $\sqrt{2}$. To bi onda bio realni broj $\sqrt{2}$. Kasnije ćemo te pojmove pojasniti.

3.1. Aksiomi realnih brojeva

Skup R realnih brojeva je skup na kojem su definirane dvije binarne operacije **zbrajanje** (oznaka $+$) i **množenje** (oznaka $\cdot$) i binarna relacija **manje ili jednako** (oznaka $\leq$) tako da vrijede ovi aksiomi:

(R1) $(x+y)+z = x+(y+z), \forall x,y,z \in \mathbf{R}$ (asocijativnost zbrajanja)

(R2) $\exists 0 \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, x+0 = 0+x = x$ (postojanje nule)

(R3) $\forall x \in \mathbf{R}, \exists -x \in \mathbf{R}, x+(-x) = (-x)+x = 0$ (postojanje suprotnog broja)

(R4) $x+y = y+x, \forall x,y \in \mathbf{R}$ (komutativnost zbrajanja)

(R5) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall x,y,z \in \mathbf{R}$ (asocijativnost množenja)

(R6) $\exists 1 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \forall x \in \mathbf{R}, x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (postojanje jedinice)

(R7) $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \exists x^{-1} \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ (postojanje inverznog broja)

(R8) $x \cdot y = y \cdot x, \forall x,y \in \mathbf{R}$ (komutativnost množenja)

(R9) $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \forall x,y,z \in \mathbf{R}$ (distribucija množenja prema zbrajanju)

(R10) $x \leq x, \forall x \in \mathbf{R}$ (refleksivnost $\leq$)

(R11) $x \leq y \,\&\, y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimetričnost $\leq$)

(R12) $x \leq y \,\&\, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivnost $\leq$)

(R13) $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x \leq y \vee y \leq x$ (usporedljivost)

(R14) $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z, \forall z \in \mathbf{R}$ (suglasnost $+$ i $\leq$)

(R15) $0 \leq x \,\&\, 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$ (suglasnost $\cdot$ i $\leq$)

(R16) Ako su $\emptyset \neq X, Y \subseteq \mathbf{R}$ za koje vrijedi da je $x \leq y, \forall x \in X, \forall y \in Y$, onda postoji $c \in \mathbf{R}$, tako da je $x \leq c \leq y, \forall x \in X, \forall y \in Y$ (aksiom potpunosti).

Elementi skupa $\mathbf{R}$ zovu se **realni brojevi.**

Aksiomi (R1)–(R3) kažu da je skup $\mathbf{R}$ zajedno s operacijom $+$ **grupa** (kratko se kaže sa je $(\mathbf{R},+)$ grupa), a aksiom (R4) da je to i **komutativna** ili **Abelova grupa.** Aksiomi (R5)–(R8) kažu da je $(\mathbf{R}\setminus\{0\},\cdot)$ Abelova grupa, aksiomi (R1)–(R5) i (R9) da je skup $\mathbf{R}$ zajedno s binarnim operacijama $+$ i $\cdot$ (tj. $(\mathbf{R},+,\cdot)$) **prsten,** (R8) znači da je $(\mathbf{R},+,\cdot)$ **komutativni prsten,** (R6) da taj prsten ima **jedinicu,** a zajedno (R1)–(R9) kažu da je $(\mathbf{R},+,\cdot)$ **polje.** Aksiomima (R1)–(R15) definirano je **uređeno polje** $(\mathbf{R},+,\cdot,\leq)$, a ako vrijede svi aksiomi (R1)–(R16) kažemo da je $(\mathbf{R},+,\cdot,\leq)$ **potpuno uređeno polje realnih brojeva.**

Ova formalna definicija potpuno uređenog polja realnih brojeva izgledala bi bez ikakvog smisla, pače kao plod čiste fantazije, kada ne bismo prošli stadije razvoja od zbrajanja prstića, jabuka, kockica i drugih imenovanih veličina, pa do zbrajanja apstraktnih prirodnih brojeva, kada ne bismo znali ništa o mjerenju dužina, kada ne bismo ništa znali o razlomcima, tj. racionalnim brojevima, o nesumjerljivosti dijagonale i stranice kvadrata, tj. potrebi za iracionalnim brojevima i kada ne bismo u stadiju mjerenja došli do pojmova "veće" i "manje" i kada u tom stadiju duhovnog i intelektualnog razvoja ne bismo razvili osjećaj uređaja, npr. na brojevnom pravcu itd. No, nakon toga svakome bi aksiomi (R1)–(R16) trebali izgledati sasvim prihvatljivi. Kao i za svaki apstraktni sustav aksioma kojim se opisuje neka matematička struktura, prirodno se postavljaju dva pitanja.

Prvo, da li su ti aksiomi usaglašeni, tj. da li postoji skup koji ih zadovoljava (tzv. **model**). To je pitanje **neproturječnosti aksiomatike**, odnosno pitanje egzistencije.*)

Drugo je pitanje da li ti aksiomi jednoznačno određuju matematički objekt. Ovu jednoznačnost (ili jedinstvenost) treba shvaćati ovako. Ako npr. osobe A i B neovisno svaka konstruira svoje modele realnih brojeva $\mathbf{R}_A$ i $\mathbf{R}_B$, koji zadovoljavaju aksiomima (R1)–(R16), onda mora postojati bijekcija $f : \mathbf{R}_A \to \mathbf{R}_B$ koja čuva aritmetičke operacije i uređaj, tj. vrijedi

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$
$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y).$$

U tom smislu $\mathbf{R}_A$ i $\mathbf{R}_B$ su potpuno ravnopravne realizacije (modeli) realnih brojeva (npr. $\mathbf{R}_A$ su svi beskonačni dekadski decimalni brojevi, a $\mathbf{R}_B$ sve točke na brojevnom pravcu), pa ih zovemo **izomorfnima**, a preslikavanje f **izomorfizam.** Na to pitanje ćemo se vratiti malo kasnije (v. 3.4).

Iz ovih aksioma se sada mogu dokazati sva uobičajena svojstva i pravila za računanje s realnim brojevima, poznata iz srednjoškolske matematike. Evo samo nekih.

*) O aksiomatici uopće bit će još govora na početku III pogl. Planimetrija.

1° Svaki element $x \in \mathbf{R}$ ima jedinstveni suprotni element. Zaista, ako su x_1 i x_2 suprotni elementi od x, onda je prema (R3),(R2),(R1) i (R4)

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = 0 + x_2 = x_2.$$

2° Jednadžba $a + x = b$ ima jedinstveno rješenje u $\mathbf{R}$. Zaista, element $x = b + (-a)$ jest rješenje, jer imamo

$$a + (b + (-a)) = a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b.$$

S druge strane, ako je x rješenje, onda imamo

$$a + x = b \Rightarrow a + x + (-a) = b + (-a) \Rightarrow (x + a) + (-a) = b + (-a) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + (a + (-a)) = b + (-a) \Rightarrow x + 0 = b + (-a) \Rightarrow x = b + (-a).$$

Izraz $b + (-a)$ se zapisuje kao $b - a$. Posebno, jednadžba $a + x = 0$ ima jedinstveno rješenje $x = -a$, što pokazuje da je suprotni element jednoznačno određen.

3° Slično kao u 2° vidi se i da jednadžba $a \cdot x = b, a \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ ima jedinstveno rješenje $x = b \cdot a^{-1}$ i posebno, za svaki $x \neq 0$ postoji jedinstveni inverz x^{-1} za koji se koristi i oznaka $1/x$.

4° Za svako $x \in \mathbf{R}$ vrijedi $x \cdot 0 = 0$. Zaista, iz (R6),(R9) i (R2) imamo $x + x \cdot 0 = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x \cdot (1 + 0) = x \cdot 1 = x$, pa je dakle $x + x \cdot 0 = x$, odakle zbog jednoznačnosti rješenja jednažbe $a + x = b$ izlazi $x \cdot 0 = 0$.

Sada evo nekoliko tvrdnji s nejednakošću $\leq$ ili strogom nejednakošću $<$, koja znači ovo: $x < y \Leftrightarrow x \leq y \,\&\, x \neq y$.

5° $x \leq y \,\&\, x' \leq y' \Rightarrow x + x' \leq y + y'$. Zaista, prema (R14), $x \leq y$ povlači $x + x' \leq x' + y$, a $x' \leq y'$ povlači $x' + y \leq y' + y$. Prema (R12) i (R4) sada slijedi $x + x' \leq y + y'$.

6° $0 < x \Rightarrow -x < 0$ (tj. $0 > -x$). Zbog (R14),(R2),(R3) i definicije stroge nejednakosti imamo

$$0 < x \Rightarrow 0 \leq x \,\&\, 0 \neq x \Rightarrow (-x) + 0 \leq (-x) + x = 0 \Rightarrow -x \leq 0.$$

Kad bi bilo $-x = 0$, onda bi zbog $-(-x) = x$ (dokažite to sami) slijedilo $x = 0$. Dakle je $-x < 0$.

Sada se dalje u tom stilu mogu dokazati razna druga svojstva, npr. $x < 0 \,\&\, y < 0 \Rightarrow 0 < xy$, $0 < 1$, tj. da je 1 **pozitivan broj** itd. Mi nećemo ovdje sada ulaziti u sve te detalje. Sve je to učinjeno u knjigama S. Kurepa, Uvod u matematiku, Tehnička knjiga, Zagreb, 1969 ili S. Mardešić, Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, Školska knjiga, Zagreb, 1974 ili pak S. Kurepa, Matematička analiza I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1975 iako su tamo ponešto drugačije aksiomatike i za ovu našu aksiomatiku formalno treba samo usvojiti pojmove $+$, $\cdot$ i $\leq$.

Naznačit ćemo ipak neke osnovne pojmove, ideje i činjenice.

Skup $S \subseteq \mathbf{R}$ je **odozgo (odozdo) omeđen** ako postoji $c \in \mathbf{R}$ takav da je $x \leq c$ (odn. $c \leq x$), $\forall x \in S$. Broj c se tada zove **gornja (donja) međa** od S. Skup

$S \subseteq \mathbf{R}$ je **omeđen** ako je odozgo i odozdo omeđen. Element $a \in S$ je **najveći** ili **maksimalni** (odn. **najmanji** ili **minimalni**) **element** skupa $S \subseteq \mathbf{R}$ ako je $x \leq a$ (odn. $a \leq x$), za svako $x \in S$. Oznaka za maksimalni odnosno minimalni element su redom $\max S$, odn. $\min S$.

Najmanja gornja međa skupa $S \subseteq \mathbf{R}$ se zove **supremum** skupa S, u oznaci $\sup S$, a najveća donja međa **infimum** skupa S u oznaci $\inf S$.

Osnovni princip o supremumu i infimumu je sljedeći (koji se katkada uzima i kao aksiom umjesto nekih (R1)–(R16)):

PROPOZICIJA 1. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ neprazan skup.*

(i) Ako je S odozgo omeđen, onda ima jedinstven supremum;

(ii) Ako je S odozdo omeđen, onda ima jedinstven infimum.

Dokaz. (i) Neka je $X = S$, a $Y = \{y \in \mathbf{R} | x \leq y, \forall x \in X\}$ skup svih gornjih međa od $X = S$. Po pretpostavci su $X, Y \neq \emptyset$. Tada prema aksiomu potpunosti (R16) postoji $c \in \mathbf{R}$ takav da je $x \leq c \leq y, \forall x \in X, \forall y \in Y$. Stoga je c gornja međa od X a donja međa od Y. Kao gornja međa od X, broj c je element od Y, a kao donja međa od Y slijedi da je on minimalni element od Y. Dakle je $c = \min Y = \sup X = \sup S$. Jedinstvenost supremuma slijedi odmah iz (R10).

(ii) Dokaz za infimum je sasvim analogan ili slijedi iz jednakosti $\inf S = -\sup(-S)$, gdje je $-S = \{-x | x \in S\}$. ■

Prirodni brojevi su brojevi $1, 1+1, (1+1)+1$ itd. koji se bilježe simbolima 1,2,3 itd. Ovo "itd." zahtijeva pojašnjenje kojim se uvodi osnovni **princip matematičke indukcije.** Skup svih **prirodnih brojeva** $\mathbf{N}$ je presjek svih podskupova $X_\alpha \subseteq \mathbf{R}, \alpha \in A$, sa svojstvima

$$1 \in X_\alpha, \quad \forall \alpha \in A$$
$$x \in X_\alpha \Rightarrow x+1 \in X_\alpha, \quad \forall \alpha \in A.$$

Drugim riječima $\mathbf{N}$ je najmanji podskup od $\mathbf{R}$ sa gornja dva svojstva. Iz ove definicije odmah slijedi

Princip matematičke indukcije. Ako podskup $S \subseteq \mathbf{N}$ ima ova dva svojstva

$$1 \in S$$
$$x \in S \Rightarrow x+1 \in S,$$

onda je $S = \mathbf{N}$.

Na princip matematičke indukcije vratit ćemo se još u 3.4., a posebno detaljno u §5.

Skup **cijelih brojeva** $\mathbf{Z}$ je unija skupa prirodnih brojeva, nule i suprotnih brojeva elemenata iz $\mathbf{N}$, tj. $\mathbf{Z} = (-\mathbf{N}) \cup \{0\} \cup \mathbf{N}$. Skup **racionalnih brojeva** $\mathbf{Q}$ je skup svih brojeva oblika $m \cdot n^{-1}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$.

Drugačije rečeno, skup cijelih brojeva je presjek svih podgrupa od $(\mathbf{R}, +)$ koje sadrže broj 1, a skup racionalnih brojeva je presjek svih potpolja od $(R, +, \cdot)$. **Iracionalni brojevi** čine skup $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Izvedimo sada jedno važno svojstvo brojeva, važno ne samo u teorijskom, nego i u smislu korištenja brojeva prilikom mjerenja. To je Arhimedov princip. Taj princip

se često uzima i kao aksiom (umjesto nekih od naših (R1)–(R16)), pa se često naziva i Arhimedov aksiom. No, prvo nam treba jedno važno svojstvo prirodnih brojeva.

PROPOZICIJA 2. *Neka je $S \subseteq \mathbf{N}$ (ili $\mathbf{Z}$) neprazan skup.*

(i) Ako je S odozgo omeđen, onda ima maksimalni element $\max S$;

(ii) Ako je S odozdo omeđen, onda ima minimalni element $\min S$.

Dokaz. (i) Prema Propoziciji 1 (i), $\exists! \sup S = s \in \mathbf{R}$. Prema definiciji supremuma, postoji jedinstveni prirodni broj $n \in S$, takav da je $s - 1 \leq n \leq s$. No tada je $n = \max S$, jer svi prirodni brojevi koji su veći od n, nisu manji od $n+1$, a $n+1 > s$. To znači da prirodni brojevi koji su veći od n ne pripadaju skupu S. Slično se dokazuje (ii). ■

KOROLAR 1. *Skup $\mathbf{N}$ nije odozgo omeđen, a $\mathbf{Z}$ nije omeđen niti odozgo niti odozdo.*

Dokaz. Kad bi $\mathbf{N}$ bio odozgo omeđen, onda bi postojao maksimalni prirodni broj n. To je kontradikcija jer je $n < n+1$ (zbog $0 < 1$). Slično se dokazuje tvrdnja za $\mathbf{Z}$. ■

PROPOZICIJA 3 (Arhimedov aksiom). *Neka su $a, b \in \mathbf{R}, a > 0$. Tada postoji jedinstveni cijeli broj $k \in \mathbf{Z}$, takav da je $(k-1)a \leq b < ka$.*

Dokaz. Kako $\mathbf{Z}$ nije odozgo omeđen, onda je $S = \{n \in \mathbf{Z} | \frac{b}{a} < n\} \subseteq \mathbf{Z}$ neprazan odozdo omeđen skup u $\mathbf{Z}$. Tada zbog Propozicije 2 (ii) $\exists \min S = k$, tj. $(k-1) \leq \frac{b}{a} < k$. Kako je $a > 0$ ove nejednakosti su ekvivalentne sa $(k-1)a \leq b < ka$. Jedinstvenost broja $k \in \mathbf{Z}$ slijedi iz jedinstvenosti minimalnog elementa. ■

Napomenimo da se u literaturi najčešće Arhimedov aksiom izriče samo ovako: Za $a, b \in \mathbf{R}$, $a, b > 0$ postoji $n \in \mathbf{N}$, tako da je $na > b$ (geometrijski to znači da ćemo nanošenjem male dužine na veliku kad-tad premašiti veliku).

KOROLAR 2. *Za svaki pozitivan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $n \in \mathbf{N}$, takav da je $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.*

Dokaz. Prema Arhimedovom aksiomu postoji $n \in \mathbf{Z}$, tako da je $1 < n \cdot \varepsilon$. Zbog $0 < 1$ i $0 < \varepsilon$ slijedi $0 < n$. Dakle, $n \in \mathbf{N}$ i $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. ■

KOROLAR 3. *Neka je $a \in \mathbf{R}$, $a \geq 0$, tako da je $a < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Tada je $a = 0$.*

Dokaz. Ne može biti $0 < a$ zbog Korolara 2. ■

KOROLAR 4. *Za svaka dva realna broja $a, b \in \mathbf{R}$, postoji racionalan broj $r \in \mathbf{Q}$, takav da je $a < r < b$.*

Dokaz. Prema Korolaru 2, $\exists n \in \mathbf{N}$ tako da je $0 < \frac{1}{n} < b - a$. Prema Arhimedovom aksiomu $\exists m \in \mathbf{Z}$ tako da je $\frac{m-1}{n} \leq a < \frac{m}{n}$. Tada je $\frac{m}{n} < b$, jer bi u suprotnom bilo $\frac{m-1}{n} \leq a < b \leq \frac{m}{n}$, odakle bi slijedilo $\frac{1}{n} > b - a$. Stoga je $r = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$ i $a < \frac{m}{n} < b$. ■

KOROLAR 5. *Za svako $x \in \mathbf{R}$, postoji jedinstven cijeli broj $k \in \mathbf{Z}$, takav da je $k \leq x < k+1$.*

Dokaz. Neposredno slijedi iz Arhimedovog aksioma. ■

U vezi s Korolarom 5, broj k se označava s $\lfloor x \rfloor$ i zove se **najveće cijelo** od X ("pod" od x). Prema tome, definirana je funkcija $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ sa $\mathbf{R}$ u $\mathbf{R}$. Slično se definira i **najmanje cijelo** $\lceil x \rceil$ kao najmanji cijeli broj koji je $\geq x$. Broj $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ se zove **razlomljeni dio** od x. Dakle, $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$. Očito je $\{x\} \geq 0$. (Nacrtajte grafove funkcija $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, $x \mapsto \lceil x \rceil$, $x \mapsto \{x\}$. Uočite da je $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.).

Dokažimo sada postojanje n-tog korijena pozitivnog broja.

TEOREM 1. *Za svako $a \in \mathbf{R}, a \geq 0$ i $n \in \mathbf{N}$ postoji jedinstveni broj $x \in \mathbf{R}, x \geq 0$, takav da je $x^n = a$.*

Dokaz. Za $a = 0$ je $x = 0$, pa uzmimo da je $a > 0$. Prvo, jedinstvenost je jasna, jer kad bi postojala dva broja x_1, x_2, recimo $0 < x_1 < x_2$, onda bi to povlačilo $a = x_1^n < x_2^n = a$, što je kontradikcija.

Sada dokažimo egzistenciju. Neka je $S = \{t \in \mathbf{R} | t^n < a\}$. Za broj $t = a/(1+a)$ je $0 < t < 1$, pa je $t^n < t < a$, a odavde slijedi da je $t \in S$, pa je $S \neq \emptyset$.

Za broj $t > 1 + a$ vrijedi $t^n > t > a$, pa $t \notin S$, pa je $1 + a$ gornja međa za S. Stoga postoji $x = \sup S$. Dokazat ćemo da obje nejednakosti $x^n < a$ i $x^n > a$ vode na kontradikciju, pa će slijediti $x^n = a$.

Iz identiteta $B^n - A^n = (B-A)(B^{n-1}+B^{n-2}A+\cdots+A^{n-1})$ slijedi nejednakost $B^n - A^n < (B-A)nB^{n-1}$ za $0 < A < B$.

Pretpostavimo da je $x^n < a$. Odaberimo broj h, tako da je $0 < h < 1$ i $h < \frac{a - x^n}{n(x+1)^{n-1}}$ i stavimo $A = x, B = x + h$. Tada je

$$(x+h)^n - x^n < hn(x+h)^{n-1} < hn(x+1)^{n-1} < a - x^n.$$

Tada je $(x+h)^n < a$ i $x + h \in S$. Kako je $x + h > x$, to je u kontradikciji s time da je x gornja međa od S.

Sada pretpostavimo da je $x^n > a$. Stavimo $k = \frac{x^n - a}{nx^{n-1}}$. Tada je $0 < k < x$. Ako je $t \geq x - k$ slijedi da je $x^n - t^n \leq x^n - (x-k)^n < knx^{n-1} = x^n - a$. Stoga je $t^n > a$ i $t \notin S$. Zato je $x - k$ gornja međa od S. No $x - k < x$, što proturječi tome da je X najmanja gornja međa od S. Dakle $x^n = a$. ■

n-ti **korijen** od $a \geq 0$ je jedino rješenje $x \geq 0$ jednadžbe $x^n = a$. Pišemo $x = \sqrt[n]{a}$ ili $x = a^{1/n}$. Za $n = 2$ pišemo naprosto $\sqrt{a}$ i govorimo o **korijenu** iz a.

3.2. Brojevni pravac

Kako smo već istakli, realni brojevi se geometrijskim jezikom mogu opisati kao točke na pravcu. Opišimo sada to malo podrobnije, tj. na temelju aksioma iz geometrije (v. pogl. III), uspostavimo između skupa točaka pravca L i skupa $\mathbf{R}$ jednu bijekciju $f : L \to \mathbf{R}$.

Neka je $T : L \to L$ translacija pravca L na samog sebe. To znači da postoji broj $t \in \mathbf{R}$ (koji ovisi samo o T) tako da je $f(T(x)) = f(x) + t, \forall x \in L$. Broj $f(x)$ se zove **koordinata** točke $x \in L$. Očito je $f : L \to \mathbf{R}$ bijekcija, pa se koordinata točke x često zove naprosto točka x. Pravac L zajedno s tom bijekcijom $f : L \to \mathbf{R}$ se zove **koordinatna os** ili **brojevni pravac**, a često se tako naziva i sam skup $\mathbf{R}$.

Budući da bijekcija $f : L \to \mathbf{R}$ zadaje na L koordinate, tako da se translacijom T koordinate slika točaka na L razlikuju od koordinate samih točaka za istu veličinu $t \in \mathbf{R}$, slijedi da je f potpuno određen ako znamo točku s koordinatom 0 i točku s koordinatom 1. Segment određen tim točkama zove se **jedinični segment**. Smjer određen zrakom s vrhom 0 koji sadrži točku 1 naziva se pozitivnim, a smjer gibanja (translacije) od 0 prema 1 gibanjem s lijeva na desno.

Uzmimo da translacija T prevodi ishodište $x_0 = 0$ u točku $x_1 = T(x_0)$ s koordinatom 1. Tada je $x_2 = T(x_1)$ točka s koordinatom 2, $x_3 = T(x_2)$ s koordinatom $3, \ldots, x_n = T(x_{n-1})$ s koordinatom n, a također točka $x_{-1} = T^{-1}(x_0)$ s koordinatom -1 itd. Nakon cjelobrojnih točaka, pomoću Talesovog teorema (v. pogl. III), jedinični segment možemo podijeliti na n jednakih dijelova ($n \in \mathbf{N}$), pa tako dobivamo točke s koordinatama $1/n$, a odavde lako sve točke s racionalnim koordinatama $m/n \in \mathbf{Q}$.

Preostaju tako još točke iz L čije koordinate nisu sumjerljive s 1. No svaka točka pravca rastavlja pravac na dvije zrake, a u svakoj od njih ima točaka s cijelim (i racionalnim) koordinatama (to slijedi odmah iz geometrijskog značenja Arhimedovog aksioma). Na taj način točka na L definira rastav ili **prerez** od $\mathbf{Q}$ na dva neprazna skupa X i Y točaka s racionalnim koordinatama lijeve i desne zrake. Prema aksiomu potpunosti postoji broj $c \in \mathbf{R}$, tako da je $x \leq c \leq y, \forall x \in X, \forall y \in Y$. Kako je $X \cup Y = \mathbf{Q}$, to je $\sup X = s = i = \inf Y$, jer bi u protivnom bilo $s < i$, pa bi između s i i bilo racionalnih brojeva koji nisu ni u X ni u Y. Stoga je $s = i = c$. Tako jedinstveno određen broj c korespondira polaznoj točki pravca.

Ova korespondencija koja točki pravca pridružuje njenu koordinatu daje onda model u kojem se "vidi" uređaj na $\mathbf{R}$ (koji se stoga i zove "linearni uređaj") i aksiom potpunosti (ili neprekidnsti) kojim se geometrijski iskazuje da pravac L "nema rupa". Na taj način apstraktni skup $\mathbf{R}$ dobiva intuitivni jasan geometrijski smisao.

U vezi s time spomenimo još neke pojmove. Za $a, b \in \mathbf{R}$, definiramo $\langle a, b\rangle := \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\}$ kao **interval** s krajevima a i b, $[a, b] := \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\}$ kao **segment** (ili **zatvoreni interval**), $[a, b\rangle := \{x \in \mathbf{R} | a \leq x < b\}$ i $\langle a, b] := \{x \in \mathbf{R} | a < x \leq b\}$ kao **poluotvorene intervale.** Broj $b - a$ zove se **duljina** intervala, segmenta ili poluintervala. Često trebaju skupovi poput $\langle a, +\infty\rangle := \{x \in \mathbf{R} | a < x\}$,

$[a,+\infty\rangle := \{x \in \mathbf{R} | a \leq x\}$, $\langle -\infty, a\rangle := \{x \in \mathbf{R} | x < a\}$, $\langle -\infty, a] := \{x \in \mathbf{R} | x \leq a\}$ koji se zovu **beskonačni intervali** (otvoreni, poluotvoreni). Pri tom simboli $+\infty$ (čit. "plus beskonačno") i $-\infty$ (čit. "minus beskonačno") služe za izražavanje neomeđenosti skupa $S \subseteq \mathbf{R}$ odozgo (odozdo) zapisom $\sup S = +\infty$ ($\inf S = -\infty$).

Udaljenost među brojevima $x, y \in \mathbf{R}$ mjeri se duljinom segmenta kojima su to krajevi. Uvedimo oznaku

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$|x|$ se zove **modul** ili **apsolutna vrijednost** od $x \in \mathbf{R}$. Sada se može reći da je **udaljenost** među $x, y \in \mathbf{R}$ jednaka $|x-y|$. Osnovna svojstva modula skupljena su u narednoj Propoziji.

PROPOZICIJA 4. *Za sve realne brojeve x, y, z vrijedi:*

(i) $|x| \geq 0$;

(ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$;

(iv) $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$;

(v) $|x| = \max\{x, -x\}$;

(vi) $|xy| = |x||y|$.

Nejednakost (iii) (ili (iv)) se zove **nejednakost trokuta.**

Dokaz. Dokažimo samo nejednakost trokuta. Iz definicije modula odmah dobivamo da je $-|x| \leq x \leq |x|$ i $-|y| \leq y \leq |y|$. Zbrajanjem ovih nejednakosti slijedi

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|,$$

a to je ekvivalentno sa $|x+y| \leq |x|+|y|$. Time je (iii) dokazano. Sada (iv) slijedi odmah iz (iii), jer je $x-y = (x-z)+(z-y)$. Ostala svojstva slijede neposredno iz definicije. ■

3.3. Kompleksni brojevi

Pored polja $\mathbf{R}$ realnih brojeva, ukazuje se potreba za njegovim proširenjem. Ta potreba izlazi već iz nemogućnošću rješavanja jednadžbi u polju $\mathbf{R}$. Naime, linearna jednadžba $ax + b = c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$) ima (jedinstveno) rješenje u $\mathbf{R}$, dok već kvadratna jednadžba $x^2 + 1 = 0$ nema rješenja u $\mathbf{R}$. Ta situacija je analogna onoj gdje se jednadžba $x^2 = 2$ ne može razriješiti na skupu $\mathbf{Q}$, pa smo uveli simbol $\sqrt{2}$ i promatrali brojeve $r_1 + r_2\sqrt{2}$, gdje su $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$. Tako se uvodi simbol i kao jedno rješenje jednadžbe $x^2 = -1$, pa se s tim "vanjskim" brojem povežu aritmetičke operacije iz $\mathbf{R}$ da se dobije veće polje, tj. proširenje polja $\mathbf{R}$. Pokazuje se da to

proširenje $\mathbf{C}$ polja $\mathbf{R}$ realnih brojeva osim mnogih drugih važnih svojstava ima i to svojstvo da svaka algebarska jednadžba oblika

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$ ima rješenje u $\mathbf{C}$ (to je tzv. osnovni teorem algebre, usp. pogl. II).

Formalno se **polje kompleksnih brojeva C** najjednostavnije definira kao skup $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ svih uređenih parova $(x, y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ realnih brojeva, pri čemu se govori da je x **realni**, a y **imaginarni dio kompleksnog broja** $(x, y) \in \mathbf{C}$. U skup $\mathbf{C} = \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ kompleksnih brojeva uvode se operacije zbrajanja i množenja formulama

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Nije teško provjeriti da je $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ polje. Pri tome je neutralni element za zbrajanje $0 = (0,0)$, jedinica za množenje $1 = (1,0)$, suprotni element od (x,y) jednak $-(x,y) = (-x,-y)$, a inverzni element za množenje $(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ za $(x,y) \neq (0,0)$. Podsjetimo samo da su (kao i općenito u definiciji Kartezijevog produkta), dva kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im jednake odgovarajuće komponente, tj.

$$(x,y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \& y = y'.$$

Promotrimo skup $\mathbf{R}\times\{0\} = \{(x,0) \in \mathbf{C} | x \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbf{C}$. Iz definicije zbrajanja i množenja slijedi da je $(x,0)+(y,0) = (x+y,0)$, $(x,0)\cdot(y,0) = (x\cdot y, 0)$, pa je $\mathbf{R}\times\{0\}$ zatvoren obzirom na zbrajanje i množenje, pa je to polje u stvari potpolje od $\mathbf{C}$. Uvedemo li još i uređaj $(x,0) \leq (y,0) \Leftrightarrow x \leq y$, nalazimo da $(\mathbf{R}\times\{0\}, +, \cdot, \leq)$ zadovoljava sve aksiome (R1)–(R16), pa stoga identificiramo $x \in \mathbf{R}$ s kompleksnim brojem $(x,0)$. Stoga pišemo $(x,0) = x$. Time se $\mathbf{R}$ ulaže kao $\mathbf{R}\times\{0\}$ u $\mathbf{C}$. Kompleksni broj $(0,1)$ se zove **imaginarna jedinica** i označava slovom i.

Svaki kompleksni broj $(x,y) \in \mathbf{C}$ prikazuje se jednoznačno u obliku $(x,y) = (x,0)+(0,1)(y,0)$, tj. $(x,y) = x+iy$. Iz definicije množenja kompleksnih brojeva vidimo da je $i^2 = (-1,0) = -1$, pa je $i = \sqrt{-1}$. Dakle, svaki kompleksni broj $z \in \mathbf{C}$ se može jednoznačno prikazati u obliku

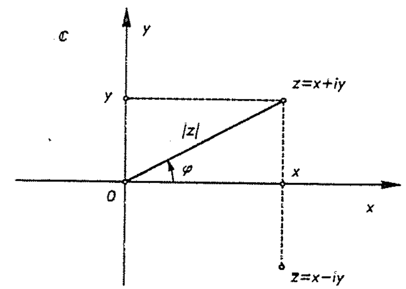
$$z = x + iy, \tag{*}$$

koji se zove **standardni oblik kompleksnog broja.** Pri tom se x zove **realni dio** kompleksnog broja z i piše se $x = \operatorname{Re} z$, a y **imaginarni dio** od z i piše se $y = \operatorname{Im} z$. Stoga je $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$.

Geometrijski se kompleksni brojevi prikazuju u tzv. kompleksnoj ili Gaussovoj ravnini (v. sl. 9).

Broj $\bar{z} = x - iy$ zove se **konjugirano kompleksni broj** broja $z = x+iy$, a realan broj $|z| = \sqrt{z\cdot\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$, zove se **modul** ili **apsolutna vrijednost** broja z. Uočite da je $\bar{\bar{z}} = z$ i $|z| = |\bar{z}|$, te $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbf{R}$.

Osnovna svojstva u vezi ovih operacija su sljedeća.



Sl. 9.

PROPOZICIJA 5. *Za* $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathrm{C}$ *vrijedi*

(*i*) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$,

(*ii*) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,

(*iii*) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

(*iv*) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (**nejednakost trokuta** *za kompleksne brojeve*).

Dokaz. Prve tri tvrdnje slijede neposredno iz definicije. Dokažimo (iv). Prvo uočimo da je za $z = a+ib \in \mathrm{C}$, $|\mathrm{Re}\, z| = |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z|$. Stoga imamo

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2.$$

No, zbog $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$ i gornje nejednakosti tada slijedi (zbog $|z| = |\overline{z}|, \forall z \in \mathrm{C}$)

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, z_1\overline{z_2} \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| = \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2.\end{aligned}$$

Dakle, $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$, a to povlači (iv). ■

Uočite da u polju C svaka kvadratna jednadžba $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$ s realnim koeficijentima ima rješenja dana poznatom formulom

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

koja su realna ako je $b^2 - 4ac \geq 0$, a inače su konjugirano kompleksna.

Vidimo dakle da je trojka $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ koja se sastoji od $\mathbf{R}^2$ s algebarskim operacijama + i · upravo jednaka polju C koje proširuje polje **R** (tj. **R** je potpolje od C) u kojem jednadžba $x^2 + 1 = 0$ ima rješenje. No u polju $(\mathrm{C}, +, \cdot)$ je nemoguće definirati uređaj $\leq$ tako da $(\mathrm{C}, +, \cdot, \leq)$ bude uređeno polje (tj. da vrijede aksiomi (R10)-(R15)). Naime, kad bi bilo tako, onda bi zbog $i \neq 0$ bilo $i > 0$ ili $i < 0$, pa bi iz aksioma slijedilo $-1 > 0$ i $1 > 0$ što je kontradikcija.

Napomenimo da se svaki kompleksan broj $z \in \mathrm{C} \setminus \{0\}$ može zapisati u **trigonometrijskom obliku** (usp. pogl. II i IV)

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

jer je (v. sl. 9) $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, gdje je $r = |z|$ modul od z, a φ tzv. **argument** broja z. Zbog periodičnosti od $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$ (v. pogl. IV) argument je određen do na višekratnik od 2π. Stoga se za argument φ broja z uzima kut φ, za koji je $0 \leq \varphi < 2\pi$ i onda je on jednoznačno određen sa z, a označava se sa $\arg z$, dok se sa $\mathrm{Arg}\, z$ označava skup $\{\varphi + 2k\pi | k \in \mathrm{Z}\}$.

3.4. Egzistencija i jedinstvenost realnih brojeva

Sada ćemo samo u grubim crtama odgovoriti na pitanja nakon popisa aksioma (R1)–(R16) o realnim brojevima. Detalje čitatelj može naći u knjizi S. Mardešić, Matematička analiza u n–dimenzionalnom prostoru, Školska knjiga, Zagreb, 1974.

Odgovor na pitanje jedinstvenosti daje sljedeći

TEOREM 2. *Ako su* $\mathbf{R}$ *i* $\mathbf{R}'$ *dva potpuno uređena polja, onda postoji jedan i samo jedan izomorfizam uređenih polja* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}'$.

Dokaz nećemo provoditi. Kažimo samo da se taj izomorfizam konstruira tako da se prvo definira na prirodnim brojevima (induktivno!), pa se proširi na cijele brojeve, a onda na racionalne da bi se pomoću aksioma potpunosti proširio na čitav **R**.

Egzistencija realnih brojeva, odnosno konstrukcija realnih brojeva može se provesti na više načina, pri čemu se pretpostavi da su prirodni brojevi "Bogom dani" (kako se jednom izrazio R. Dedekind). Pri tom na skupu N imamo funkciju **sljedbenik** $slj : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ $(slj(n) = n + 1)$, za koju vrijede **Peanovi***) **aksiomi:**

(P1) slj je injekcija čija je slika $slj(\mathrm{N}) = \mathrm{N} \setminus \{1\}$;

(P2) **princip indukcije** Ako je $S \subseteq \mathrm{N}$ podskup, takav da je $1 \in S$ i $slj(S) \subseteq S$, onda je $S = \mathrm{N}$.

Skupu N se pridoda još jedan element 0, tj. formira se skup $\mathrm{N}_0 = \{0\} \cup \mathrm{N}$ i proširi funkcija slj sa $slj(0) = 1$. Odmah se vidi da i N_0 zadovoljava analogone (P1') i (P2') Peanovih aksioma u kojima se samo 1 zamijeni s 0, a N sa N_0. Sljedeći je korak da se definira zbrajanje, uređaj i množenje u N_0. U tu svrhu valja primijetiti da je za zadavanje funkcije $f : \mathrm{N}_0 \to R$ u neki skup R dovoljno znati $f(0)$ i vrijednost $f(slj\ n)$ ako znamo $f(n)$ (zbog (P2)). Tada je zbrajanje brojem $m \in \mathrm{N}_0$ funkcija $+m : \mathrm{N}_0 \to \mathrm{N}_0$ definirana sa

$$(+m)(0) = m$$
$$(+m)(slj\ n) = slj(+m)(n)$$

*) Guiseppe Peano (1858–1932), talijanski matematičar. Bavio se matematičkom logikom i analizom.

i pišemo uobičajeno $m+n$ za $(+m)(n)$. Ovo je primjer induktivne ili rekurzivne definicije funkcije.

Uređaj se na $\mathbf{N}_0$ definira sa: $a \leq b$ u $\mathbf{N}_0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbf{N}_0$ tako da je $a+c=b$. Množenje s brojem $m \in \mathbf{N}_0$ uvodi se (opet rekurzivno) kao preslikavanje $\times m : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ definirano sa

$$(\times m)(0) = 0$$
$$(\times m)(slj\ n) = (\times m)(n) + m$$

i pišemo uobičajeno $m \times n$ ili naprosto mn za $(\times m)(n)$. U skup $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ uvodimo relaciju ekvivalencije $\sim$ sa

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a+d = b+c.$$

Kvocijentni skup

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0)/\sim$$

se zove **skup cijelih brojeva**, a klasa ekvivalencije $[(a,b)] = [a,b]$ **cijeli broj**. Unutar $\mathbf{Z}$ nađimo prvo "kopiju" od $\mathbf{N}_0$. U tu svrhu definiramo $j : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{Z}$ sa $j(a) = [a,0]$. Lako se vidi da je j injekcija, pa je $j(\mathbf{N}_0)$ "smješten" u $\mathbf{Z}$, a slika $j(\mathbf{N}_0)$ se identificira sa $\mathbf{N}_0 \subset \mathbf{Z}$ i zove skup **nenegativnih cijelih brojeva**. $j(0) = [0,0]$ bilježimo naprosto sa 0, broj $j(a) = [a,0]$ bilježimo sa a, te $[0,a]$ sa $-a$. Broj $-a (a \neq 0)$ se zove **negativan cijeli broj**, suprotan od a. Dakle, interpretacija klase $[a,b]$ je kao $a-b$ ako je $a \geq b$ ili $-(b-a)$ ako je $b \geq a$.

Sljedeći problem je proširenje zbrajanja i množenja sa kopije $j(\mathbf{N}_0)$ od $\mathbf{N}_0$ na čitav $\mathbf{Z}$. To se može učiniti ovako:

$$[a,b] + [c,d] = [a+c, b+d]$$
$$[a,b] \cdot [c,d] = [ac+bd, ad+bc].$$

Lako je provjeriti da su sve ove definicije dobre, tj. ne ovise o izboru reprezentanata u klasi ekvivalencije kao i da su ove operacije zaista proširenje operacija sa $\mathbf{N}_0$ na $\mathbf{Z}$. Uređaj na $\mathbf{Z}$ je definiran sa $a \leq b \Leftrightarrow b-a \in \mathbf{N}_0$.

Sada pređimo na konstrukciju racionalnih brojeva iz $\mathbf{Z}$. Promotrimo parove $(a,b), a,b \in \mathbf{Z}, b \neq 0$ i na njima relaciju ekvivalencije $\approx$ definiranu sa

$$(a,b) \approx (c,d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Kvocijentni skup

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\}))/\approx$$

se zove **skup racionalnih brojeva**, a klasa ekvivalencije $[\![(a,b)]\!] = [\![a,b]\!]$ **racionalan broj**. Kanonsko "smještanje" $k : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ je dano sa $k(0) = [\![0,1]\!]$, pa možemo identificirati $k(\mathbf{Z})$ sa $\mathbf{Z}$ kao podskup od $\mathbf{Q}$. Aritmetičke operacije $+$ i $\cdot$ su definirane sa

$$[\![a,b]\!] + [\![c,d]\!] = [\![ad+bc, bd]\!]$$
$$[\![a,b]\!] \cdot [\![c,d]\!] = [\![ac, bd]\!].$$

Interpretacija klase $[\![a,b]\!]$ je razlomak a/b. Ulogu nule igra $[\![0,1]\!]$ što i dalje bilježimo sa 0, a ulogu jedinice $[\![1,1]\!]$ što i dalje bilježimo sa 1. Ovim operacijama opet se proširuje $+$ i $\cdot$ sa $\mathbf{Z}$ na $\mathbf{Q}$. Skup $\mathbf{Q}$ s ovim operacijama je i polje, jer svaki $[\![a,b]\!] \neq 0$ ima inverz $[\![a,b]\!]^{-1} = [\![b,a]\!]$. Uređaj na $\mathbf{Q}$ (usklađen s onim na $\mathbf{Z}$) se dobiva tako da se zahtijeva da je $[\![a,b]\!] > 0$ (tj. pozitivan) ako su a i b istog predznaka u $\mathbf{Z}$. Na taj način$(\mathbf{Q}, +, \cdot, \leq)$ postaje uređeno polje, tj. vrijede svi aksiomi (R1)–(R15).

Jedan način da se dalje konstruira $\mathbf{R}$ jest da se u skupu $(\mathbf{Q}, \leq)$ gledaju prerezi (v. cit. knjigu S. Mardešića), no mi ćemo kasnije $\mathbf{R}$ konstruirati u istom stilu kao izvjestan kvocijentni skup pomoću nizova. Zato ćemo u idućoj točki definirati nizove i još neke potrebne pojmove, pa ćemo tada dovršiti konstrukciju polja $\mathbf{R}$.

§ 4. Niz i konvergencija niza

Neka je X bilo koji skup. **Niz** u skupu X je funkcija $x : \mathbf{N} \to X$ (ili katkada $x : \mathbf{N}_0 \to X$). **Konačni niz** od n članova je funkcija $x : \mathbf{N}_n \to X$. Vrijednost niza $x(k)$ se zove **k-ti član niza** i piše se x_k. Često se niz zapisuje kao $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ ili kratko (x_n), gdje je x_n n-ti (opći) član niza.

Tako su npr. sa $x_n = n$, $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $x_n = (-1)^n n^3$ zadani nizovi racionalnih brojeva. Niz se može zadati i pravilom kako izračunati naredne članove, poznavajući prethodne i poznavajući početak niza (tzv. induktivno ili rekurzivno zadavanje niza). Npr. **Fibonaccijev niz** (F_n) je zadan sa $F_0 = 0, F_1 = 1$, a svaki naredni član je suma prethodna dva člana, tj. $F_2 = F_0 + F_1 = 0+1 = 1$, $F_3 = F_1 + F_2 = 1+1 = 2$ itd., općenito $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$; za $n \geq 0$.

Primjer 1. Odredite n-ti član niza

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$$

(tj. niza koji po redu sadrži m članova jednakih m).

Rješenje. Neka je x_n n-ti član niza. Tada, kako je suma prvih m brojeva iz $\mathbf{N}$ jednaka $1+2+3+\ldots+m = \frac{1}{2}m(m+1)$, slijedi da je

$$x_n = m \Leftrightarrow \frac{1}{2}m(m-1) < n \leq \frac{1}{2}m(m+1) \Leftrightarrow m^2 - m + \frac{1}{4} < 2n \leq m^2 + m + \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m - \frac{1}{2} < \sqrt{2n} < m + \frac{1}{2},$$

pa je $x_n = \lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \rfloor$. ■

Sada ćemo malo pažnje posvetiti dvama vrlo korisnim nizovima realnih (ili kompleksnih) brojeva: aritmetičkom i geometrijskom nizu.

Aritmetički niz (ili progresija) je niz realnih ili kompleksnih brojeva čiji je svaki član, počev od drugog jednak prethodnom uvećanom za konstantu d, koji se zove **diferencija aritmetičkog niza.** Tako je npr. niz prirodnih brojeva $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ aritmetički niz sa diferencijom $d = 1$. Niz $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ je aritmetički niz sa $d = 2$.

Ako je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ aritmetički niz, onda je $a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$ itd. i općenito $a_n = a_1 + (n-1)d$ (dokažite to indukcijom po n).

Osnovna svojstva aritmetičkog niza su sadržana u narednoj Propoziciji.

PROPOZICIJA 1. *(1) Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) je jednak aritmetičkoj sredini susjedna dva člana.*

(2) Ako je $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ aritmetički niz od n članova, onda je suma dva člana koji su jednako udaljeni od krajeva jednaka sumi krajnja dva člana.

(3) Neka je (a_n) aritmetički niz s diferencijom d, a S_n suma prvih n članova. Tada je

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n.$$

Dokaz. (1) Zbrajanjem jednakosti $a_k = a_{k-1} + d$ i $a_k = a_{k+1} - d$ slijedi

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

(2) Parovi jednako udaljenih članova od krajeva su a_k i a_{n-k+1}. Tada je

$$a_k + a_{n-k+1} = [a_1 + (k-1)d] + [a_1 + (n-k)d] = a_1 + [a_1 + (n-1)d] = a_1 + a_n.$$

(3) Imamo

$$\left.\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ S_n &= a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 \end{aligned}\right\} +$$

pa odavde koristeći (2) slijedi

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = (a_1 + a_n)n,$$

odakle slijedi tvrdnja. ■

Tako je npr. suma aritmetičkog niza $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n+1}{2} n$, a suma aritmetičkog niza $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = \frac{1+2n-1}{2} n = n^2$.

Primjer 2. Odredite zbroj svih prirodnih brojeva između 1 i 10000 koji su djeljivi sa 11.

Rješenje. Brojevi djeljivi sa 11 čine aritmetički niz $11, 22, 33, \ldots, 9999$ s diferencijom $d = 11$. Prvi član niza je $a_1 = 11$. Neka je $a_n = 9999$. Kako je $a_n = a_1 + (n-1)d$, to imamo $9999 = 11 + (n-1) \cdot 11$. Odavde slijedi da taj niz ima $n = 909$ članova, pa je traženi zbroj jednak

$$S_{909} = \frac{909}{2}(11 + 9999) = 4549545. \blacksquare$$

Primjer 3. Između realnih brojeva a i b interpolirajte r brojeva $a_1, \ldots, a_r$ tako da $a, a_1, \ldots, a_r, b$ čine aritmetički niz. Odredite diferenciju tog niza.

Rješenje. Prema uvjetu broj b mora biti $(r+2)$-gi član tog niza, a prvi član je a. Stoga vrijedi

$$b = a + (r + 2 - 1)d,$$

gdje je sa d označena diferencija niza. Iz prethodne jednakosti slijedi

$$d = \frac{b-a}{r+1}. \blacksquare$$

Primjer 4. Mogu li brojevi $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ biti članovi istog aritmetičkog niza?
Rješenje. Neka je $a_k = \sqrt{2}, a_l = \sqrt{3}, a_m = \sqrt{5}, k, l, m \in \mathrm{N}$. Promotrimo izraz

$$\frac{a_m - a_l}{a_l - a_k}.$$

Zbog $a_m = a_1 + (m-1)d, a_l = a_1 + (l-1)d, a_k = a_1 + (k-1)d$, gdje je d diferencija niza, slijedi

$$\frac{a_m - a_l}{a_l - a_k} = \frac{m-l}{l-k},$$

tj.

$$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{m-l}{l-k}.$$

Kako je $k, l, m \in \mathrm{N}$ to odavde slijedi da je $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ racionalan broj, a lako se vidi da on to nije. Dobiveno proturječje pokazuje da navedeni brojevi ne mogu biti članovi istog aritmetičkog niza. ■

Geometrijski niz je niz realnih (ili kompleksnih) brojeva čiji je svaki član, počev od drugog jednak prethodnom pomnoženom s konstantom q, koji se zove **kvocijent geometrijskog niza.**

Ako je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ geometrijski niz, onda je $a_2 = a_1 \cdot q, a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$ itd. i općenito $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ (dokažite to indukcijom po n).

Osnovna svojstva geometrijskog niza su sadržana u narednoj Propoziciji.

PROPOZICIJA 2. *(1) Svaki član geometrijskog niza (osim prvog) je jednak geometrijskoj sredini susjedna dva člana.*

(2) U konačnom geometrijskom nizu, produkt članova koji su jednako daleko od krajeva jednak je produktu krajnja dva člana.

(3) Suma S_n prvih n članova geometrijskog niza (a_n) s kvocijentom $q \neq 1$ jednaka je

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Dokaz. (1) Množenjem jednakosti $a_k = a_{k-1}q$ i $a_k = a_{k+1}\frac{1}{q}$ slijedi

$$a_k = \sqrt{a_{k-1}a_{k+1}}.$$

(2) Imamo $a_k a_{n-k+1} = (a_1 q^{k-1})(a_1 q^{n-k}) = a_1 a_1 q^{n-1} = a_1 a_n$.

(3) Množenjem izraza $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ sa q dobivamo $S_n q = a_1 q + a_2 q + \ldots + a_n q$, pa je $S_n q = a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_n q$. Ako od posljednjeg izraza oduzmemo $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, dobivamo $S_n q - S_n = a_n q - a_1 \Rightarrow S_n(q-1) = a_1 q^n - a_1$, pa slijedi tvrdnja. ■

Primjer 5. Između realnih brojeva a i b interpolirajte brojeve $a_1, \ldots, a_r$, tako da je niz $a, a_1, \ldots, a_r, b$ geometrijski. Odredite kvocijent tog niza.

Rješenje. Prema uvjetu je b $(r+2)$-gi član niza i a prvi član. Stoga vrijedi

$$b = a \cdot q^{r+2-1},$$

gdje je sa q označen kvocijent niza. Iz prethodne jednakosti je

$$q = \sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}. \ ■$$

Primjer 6. Dokažite da je za $a, b \in \mathbb{Z}$, $a + b \neq 0$ i neparni $n \in \mathbb{N}$ broj $a^n + b^n$ djeljiv sa $a + b$.

Rješenje. Promotrimo geometrijski niz

$$a^{n-1}, -a^{n-2}b, a^{n-3}b^2, \ldots, (-1)^k a^{n-k-1}b^k, \ldots, (-1)^{n-1}b^{n-1}.$$

Prvi član tog niza je a^{n-1}, a kvocijent $q = -\frac{b}{a}$. Zbroj članova tog niza je

$$S_n = \frac{a^{n-1}\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^n - 1\right]}{-\frac{b}{a} - 1}.$$

Kako je n neparan, to je

$$S_n = \frac{a^n + b^n}{a + b},$$

tj.

$$a^n + b^n = (a+b)S_n,$$

pa je $a^n + b^n$ za neparan n djeljiv sa $a + b$. ■

Primjer 7. Prirodni broj je savršen ako je on jednak zbroju svojih djelitelja ukjučujući 1 i isključujući taj broj. Na primjer 6 je savršen broj jer je 6=1+2+3, a 1,2,3 su djelitelji od 6.

Dokažite ako je $p = 2^{n+1} - 1$ $(n \in \mathbb{N})$ prost broj, onda je $p \cdot 2^n$ savršen. Koristeći to svojstvo nađite još nekoliko savršenih brojeva.

Rješenje. Neka je $p = 2^{n+1} - 1$ prost. Tada djelitelji od $p \cdot 2^n$ jesu

$$1, 2, 2^2, \ldots, 2^n, p, 2p, 2^2p, \ldots, 2^{n-1}p,$$

a njihov je zbroj jednak

$$(1 + 2 + \ldots + 2^n) + p(1 + 2 + \ldots + 2^{n-1}) = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} + p \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} =$$
$$= 2^{n+1} - 1 + p \cdot (2^n - 1) = p + p \cdot (2^n - 1) = p \cdot 2^n.$$

Dakle zbroj djelitelja od $p \cdot 2^n$ je $p \cdot 2^n$, pa je taj broj zaista savršen.

Za $n = 2$ je $p = 7$ i to je prost broj, pa je $7 \cdot 2^2 = 28$ savršen broj. Za $n = 4$ je $p = 31$, pa je $31 \cdot 2^4 = 486$ savršen broj. ■

Niz (racionalnih, realnih ili kompleksnih) brojeva (a_n) je **konvergentan s limesom** a, što zapisujemo kao $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, ako za svaki pozitivan broj $\varepsilon > 0$ postoji broj $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Kaže se još da niz a_n **teži** prema a, i piše $a_n \to a$ za $n \to \infty$. Ako niz teži prema 0, on se zove **nul-niz**. Niz (a_n) se zove **Cauchyjev*)** ili **fundamentalan** ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Primjeri. (1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, jer je $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ za $n \geq n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, jer je $|\frac{n+1}{n} - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ za $n \geq n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

(3) Za $q > 1$ je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} = 0$. Naime, skup $A = \{q^k | k \in \mathbb{N}\}$ nije odozgo omeđen, jer bi inače postojao $s = \sup A$, pa bi po definiciji supremuma $\exists m \in \mathbb{N}$ tako da je $s/q < q^m \leq s$, što povlači $s < q^{m+1}$, suprotno pretpostavci da je $s = \sup A$. Sada $1 < q$ povlači da je $q^m < q^n$ za $m < n, m, n \in \mathbb{Z}$. Prema tome, odavde slijedi da za svako $c \in \mathbb{R}$ postoji prirodni broj $N \in \mathbb{N}$ takav da $n > N$ povlači $c < q^n$. Za $\varepsilon > 0$ uzmimo $c = 1/\varepsilon$. Tada postoji broj $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n > n_0$ vrijedi $1/q^n < \varepsilon$.

(4) Za $|q| < 1$ je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. To sada odmah slijedi iz (3).

(5) Niz $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ je Cauchyjev niz (pri tom je $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, a $0! = 1$). Da to dokažemo, prvo pokažimo da za $m > n \geq 1$ vrijedi

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{m!} < \frac{1}{n!} \tag{*}$$

Za $m = n + 1$ tvrdnja je očita, pa uzmimo $m \geq n + 2$. Tada je

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{m!} =$$
$$= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+3)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (n+2)}\right] \leq$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}\right].$$

*) Augustin Louis Cauchy (1789–1857), francuski matematičar, dao je veliki doprinos izgradnji i osuvremenjavanju matematičke analize.

Suma geometrijskog niza u uglatoj zagradi je $< 1/(1-\frac{1}{n+2})$, pa slijedi

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots+\frac{1}{m!}<\frac{1}{(n+1)!}\left[1/\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right]=$$
$$=\frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}=\frac{n+2}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{n!}.$$

Kako je $n+2<(n+1)^2$ za $n\geq 1$, slijedi $(*)$.

Sada za $\varepsilon>0$, uzmimo $n_0\in\mathbf{N}$, tako da je $\frac{1}{n_0!}<\varepsilon$. (Zbog $\frac{1}{n_0!}\leq\frac{1}{n_0}$, dovoljno je opet uzeti $n_0=\left\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor+1$.) Tada zbog $(*)$ slijedi da je $|a_m-a_n|<\varepsilon$ za $m,n\geq n_0$. ■

PROPOZICIJA 3. *Ako je niz konvergentan, onda je Cauchyjev.*

Dokaz. Neka je (a_n) konvergentan niz s limesom a. Neka je $\varepsilon>0$. Tada $\exists n_0\in\mathbf{N}$, tako da je $|a_n-a|<\varepsilon/2$ za $n>n_0$. Iz nejednakosti trokuta dobivamo tada da je za $m,n\geq n_0$:

$$|a_m-a_n|=|(a_m-a)+(a-a_n)|\leq|a_m-a|+|a-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Dakle, $m,n\geq n_0\Rightarrow|a_m-a_n|<\varepsilon$. Stoga je (a_n) Cauchyjev niz. ■

Ovaj dokaz možemo parafrazirati tako da kažemo da su "brojevi koji su bliski istom broju i međusobno bliski".

Još jedan koristan kriterij za konvergenciju je ovaj.

PROPOZICIJA 4 ("kriterij sendviča"). *Ako su $(a_n),(b_n),(c_n)$ tri niza realnih brojeva za koje je $a_n\leq b_n\leq c_n$ za svako n (ili počev od nekog mjesta), pa ako nizovi (a_n) i (c_n) konvergiraju nekom broju α, onda je i (b_n) konvergentan niz koji teži istom broju α.*

Dokaz. Neka je dakle $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\alpha$ i neka je $\varepsilon>0$. Tada postoje $n_1,n_2\in\mathbf{N}$, takvi da je $\alpha-\varepsilon<a_n$ za $n\geq n_1$ i $c_n<\alpha+\varepsilon$ za $n\geq n_2$. Tada za $n_0=\max\{n_1,n_2\}$ imamo $\alpha-\varepsilon<a_n\leq b_n\leq c_n<\alpha+\varepsilon$, pa je $|b_n-\alpha|<\varepsilon$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$. ■

Napomenimo ovdje da je funkcija $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ **neprekidna u točki** $x_0\in\mathbf{R}$ ako iz $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ slijedi $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$, tj. ako "lim i f komutiraju". f je **neprekidna** ako je neprekidna u svakoj točki. Ekvivalentno se može reći da je f neprekidna funkcija u $x_0\in\mathbf{R}$, ako $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, tako da $|x-x_0|<\delta\Rightarrow$ $\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Funkcija $f:S\to\mathbf{R}$, gdje je $S\subseteq\mathbf{R}$ je **neprekidna** na S ako je neprekidna u svakoj točki iz S.

Sada ćemo u osnovnim crtama naznačiti konstrukciju (tj. egzistenciju) polja $\mathbf{R}$ realnih brojeva ako znamo polje racionalnih brojeva. Ideja je vrlo prirodna i, ustvari, već smo je naznačili na samom početku, a sastoji se u tome da se realni broj shvati kao limes nekog niza racionalnih brojeva. Preciznije, postupit ćemo ovako.

Označimo sa $\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ skup svih nizova racionalnih brojeva (kao što nam je B^A oznaka za skup svih preslikavanja $A\to B$). Nama će biti zanimljivi konvergentni (i nul-) nizovi kao i Cauchyjevi nizovi racionalnih brojeva. Vrijedi

PROPOZICIJA 5. *(i) Ako su (a_n) i (b_n) dva niza racionalnih brojeva i $r\in\mathbf{Q}$, te ako $a_n\to a, b_n\to b$, onda niz $a_n+b_n\to a+b$, a $ra_n\to ra$.*
(ii) Ako su (a_n) i (b_n) Cauchyjevi nizovi, onda su takvi i (a_n+b_n) i (ra_n).

Dokaz. Dokažimo npr. *(i)*. Neka je $\varepsilon>0$. Tada $\exists n_1,n_2\in\mathbf{N}$ tako da $n\geq n_1\Rightarrow|a_n-a|<\varepsilon/2$, a $n\geq n_2\Rightarrow|b_n-b|<\varepsilon/2$. Iz nejednakosti trokuta tada slijedi

$$|a_n+b_n-(a+b)|\leq|a_n-a|+|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

za $n\geq n_0=\max\{n_1,n_2\}$.

Druga tvrdnja je trivijalna za $r=0$, pa uzmimo $r\neq 0$. Za dano $\varepsilon>0$ postoji $n_0\in\mathbf{N}$ tako da je $|a_n-a|<\varepsilon/|r|$ za $n\geq n_0$. Stoga je $|r||a_n-a|<\varepsilon$, odnosno $|ra_n-ra|<\varepsilon$ za $n\geq n_0$. ■

Označimo sada sa $\mathcal{N}(\mathbf{Q}),\mathcal{K}(\mathbf{Q}),\mathcal{C}(\mathbf{Q})\subseteq\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ redom skup svih nizova racionalnih brojeva koji su nul-nizovi, konvergentni nizovi i Cauchyjevi nizovi. Iz prethodne Propozicije slijedi $\mathcal{N}(\mathbf{Q})\subseteq\mathcal{K}(\mathbf{Q})\subseteq\mathcal{C}(\mathbf{Q})\subseteq\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$. Intuitivno, na $\mathbf{Q}$ možemo gledati kao na niz točaka na pravcu s rupama između njih. No, Cauchyjev niz a izgleda kao da teži ili točki ili rupi i to teži istoj točki ili rupi kao što teži $a+b$, gdje je b nul-niz. Ova ideja vodi na preciznu definiciju.

U skupu Cauchyjevih nizova $\mathcal{C}(\mathbf{Q})$ uvodimo relaciju $\sim$ ovako:

$$a=(a_n)\sim b=(b_n)\Leftrightarrow a-b=(a_n-b_n)\in\mathcal{N}(\mathbf{Q}).$$

Lako se vidi da je $\sim$ relacija ekvivalencije.

Skup **realnih brojeva** $\mathbf{R}$ se definira kao kvocijentni skup

$$\mathbf{R}=\mathcal{C}(\mathbf{Q})/\sim.$$

Za niz $a=(a_n)\in\mathcal{C}(\mathbf{Q})$, neka je $\{a\}=\{a_n\}$ pripadna klasa ekvivalencije. Ako je $r\in\mathbf{Q}$ racionalan broj, neka je $\underline{r}=(r,r,r,\ldots)$ konstantni niz. Tada klasa $\{\underline{r}\}$ sadrži točno one nizove iz $\mathcal{K}(\mathbf{Q})$ koji konvergiraju prema r. Pokazuje se da preslikavanje $\ell:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}$ definirano sa $\ell(r)=\{\underline{r}\}$ "smještava" $\mathbf{Q}$ u $\mathbf{R}$. Zbrajanje i množenje u $\mathbf{R}$ se definira formulama

$$\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$$
$$\{a_n\}\cdot\{b_n\}=\{a_n\cdot b_n\}.$$

Pokazuje se da su ovo dobre definicije, te da je $(\mathbf{R},+,\cdot)$ polje čija je nula $\{\underline{0}\}$, a jedinica $\{\underline{1}\}$, koje sadrži $\mathbf{Q}$ kao potpolje. Uređaj se definira ovako. Neka su $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$. Tada se definira $\alpha\leq\beta\Leftrightarrow\exists(a_n),(b_n)\in\mathcal{C}(\mathbf{Q}),\alpha=\{a_n\},\beta=\{b_n\}$ i $\exists n_0\in\mathbf{N}$ tako da je

$$a_n\leq b_n\quad\text{za}\quad n\geq n_0.$$

Pokazuje se da je $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ uređeno polje. Da je to i potpuno polje slijedi iz ovog važnog teorema (za dokaz v. citirane knjige S. Mardešića ili S. Kurepe).

TEOREM 1. $\mathcal{K}(\mathbf{R}) = \mathcal{C}(\mathbf{R})$, *tj. svaki Cauchyjev niz u* $\mathbf{R}$ *konvergira nekom elementu iz* $\mathbf{R}$.

4.1. Decimalni zapis realnih brojeva

Kao što je poznato iz srednje škole, svaki se realni broj može zapisati u obliku decimalnog broja (tj. pozicionog broja s bazom 10). To se obično u školi radi samo za racionalne brojeve. Tako je npr.

$$245{,}3091 = 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 10^{-4}.$$

Mi ćemo sada dokazati da se svaki realni broj može (gotovo) jedinstveno zapisati kao beskonačni decimalni broj. U tu svrhu treba nam pojam reda.

Red je uređeni par $((a_n), (s_n))$ dvaju nizova brojeva (realnih ili kompleksnih), pri čemu je (s_n) **niz parcijalnih suma** niza (a_n), tj. $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Oznaka za taj red je

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ili} \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots.$$

Kažemo da je red **konvergentan** ako je niz parcijalnih suma (s_n) konvergentan i ako je $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konvergira** prema s ili da je **suma** reda jednaka s i pišemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Ako red nije konvergentan, kažemo da je **divergentan.**

Tako je npr. red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ konvergentan red sa sumom 2. Općenito, za $|q| < 1$, tzv. **geometrijski red**

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

je konvergentan, jer iz propozicije 2 slijedi da je limes niza parcijalnih suma jednak $1/(1-q)$. Red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ je konvergentan, jer je niz parcijalnih suma $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ Cauchyjev niz (v. prethodni Primjer), a prema prethodnom teoremu,

svaki Cauchyjev niz realnih brojeva konvergira u $\mathbf{R}$. Suma tog reda obilježava se sa e i približno iznosi $e \approx 2{,}7182818284590\ldots$, a zove se **baza prirodnih logaritama.** Ovaj prikaz broja e je u obliku beskonačnog decimalnog broja. Prvo podsjetimo da je realni broj d **decimalni broj** ako je u obliku

$$d = \frac{m}{10^n}$$

za neke $m, n \in \mathbf{Z}, n \geq 0$. Označimo sa $C = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ skup cifara ili znamenaka u dekadskom sustavu.

TEOREM 2. *Svaki realni broj x ima jedinstven prikaz u obliku*

$$\boxed{x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n},} \qquad (*)$$

gdje su $a_n \in C$ i ne postoji $p \in \mathbf{N}$ takav da je $a_n = 9$ za sve $p > n$.

Dokaz. Za najveće cijelo $\lfloor x \rfloor$ broja $x \in \mathbf{R}$ vrijedi $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, pa stoga $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$, što nakon množenja s 10 daje $0 < 10(x - \lfloor x \rfloor) < 10$ i očito taj broj iz $[0, 10\rangle$ možemo jedinstveno zapisati kao $a_1 + a_1'$, gdje je $a_1 \in C$ i $0 \leq a_1' < 1$; pri čemu je $a_1 = \lfloor 10(x - \lfloor x \rfloor) \rfloor$. Dakle je

$$10(x - \lfloor x \rfloor) = a_1 + a_1', \qquad a_1 \in C,\ 0 \leq a_1' < 1.$$

Odavde slijedi

$$0 \leq x - \lfloor x \rfloor - \frac{a_1}{10} < \frac{1}{10},$$

pa je

$$0 \leq 10^2 \left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{a_1}{10} \right) < 10.$$

Prema istom receptu je stoga

$$10^2 \left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{a_1}{10} \right) = a_2 + a_2', \qquad a_2 \in C,\ 0 \leq a_2' < 1,$$

odakle je

$$0 \leq x - \lfloor x \rfloor - \frac{a_1}{10} - \frac{a_2}{10^2} < \frac{1}{10^2}.$$

Ako su brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in C$ već određeni tako da je

$$0 \leq x - \lfloor x \rfloor - \frac{a_1}{10} - \frac{a_2}{10^2} - \ldots - \frac{a_n}{10^n} < \frac{1}{10^n},$$

onda množenjem ove nejednakosti s 10^{n+1} dobivamo

$$0 \leq 10^{n+1} \left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{a_1}{10} - \ldots - \frac{a_n}{10^n} \right) < 10,$$

što povlači

$$10^{n+1}\left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{a_1}{10} - \ldots - \frac{a_n}{10^n}\right) = a_{n+1} + a'_{n+1}, \quad a_{n+1} \in C,\ 0 \le a'_{n+1} < 1.$$

Odavde je

$$0 \le x - \lfloor x \rfloor - \frac{a_1}{10} - \ldots - \frac{a_n}{10^n} - \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^{n+1}}.$$

Na taj način je (induktivno) dokazana egzistencija niza $(a_n), a_n \in C$, takvog da za svako $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$\left| x - \lfloor x \rfloor - \frac{a_1}{10} - \ldots - \frac{a_n}{10^n} \right| < \frac{1}{10^n}. \qquad (**)$$

Odavde iz kriterija o sendviču za nizove slijedi $(*)$.

Dokažimo da za tako dobiveni niz (a_n) ne postoji broj $p \in \mathbf{N}$ sa svojstvom da je $a_n = 9$ za svako $n > p$. U protivnom bismo imali

$$x = \lfloor x \rfloor + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_p}{10^p} + \frac{9}{10^{p+1}}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots\right) =$$
$$= \lfloor x \rfloor + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_p}{10^p} + \frac{1}{10^p},$$

što je u kontradikciji s $(**)$ za $n = p$. ∎

Drugačije i kraće se ovaj dokaz koji je usko vezan uz algoritam dijeljenja prirodnih brojeva može ovako izreći. Neka je zadan x, npr. $x > 0$. Neka je $a_0 = \lfloor x \rfloor$. Ako smo već našli $a_0, a_1, \ldots, a_n$, neka je a_{n+1} najveći cijeli broj tako da je

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \le x.$$

Označimo sa $S = \{a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \mid n \in \mathbf{N}_0\}$. Tada je $x = \sup S$.

Ako je x prirodan broj, onda on ima jedinstven zapis

$$x = A_m \cdot 10^m + A_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + A_1 \cdot 10 + A_0,$$

gdje su $A_m, A_{m-1}, \ldots, A_1, A_0 \in C$. Umjesto ovoga pišemo

$$x = A_m A_{m-1} \ldots A_1 A_0$$

i kažemo da je to **dekadski zapis** ili **zapis broja x u dekadskom brojevnom sustavu.** Brojevi $A_m, A_{m-1}, \ldots, A_1, A_0$ su **znamenke** ili **cifre broja x**. (Npr. $7064 = 7 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 4$).

Ako je $x \ge 0$ bilo koji realni broj, onda iz $(*)$ slijedi da je x oblika

$$x = A_m \cdot 10^m + \ldots + A_1 \cdot 10 + A_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots,$$

što kratko zapisujemo u obliku

$$x = A_m \ldots A_1 A_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots . \qquad (+)$$

Za (+) kažemo da je **decimalni zapis realnog broja x**. Pri tome su A_m, $A_{m-1}, \ldots, A_1, A_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ **znamenke** ili **cifre** broja x. Svaka znamenka stoji na imenovanom decimalnom mjestu (poziciji). A_0 stoji na mjestu jedinica (A_0 je znamenka jedinica, x ima A_0 jedinica), A_1 stoji na mjestu desetica (A_1 je znamenka desetica, x ima A_1 desetica), A_2 stoji na mjestu stotica (A_2 je znamenka stotica ili x ima A_2 stotica), itd., dok a_1 stoji na mjestu desetina (a_1 je znamenka desetina, x ima a_1 desetina) itd.

Ako za broj $x \ge 0$ postoji prirodni broj p takav da je $a_n = 0$ za $n > p$, onda je x oblika

$$x = A_m \cdot 10^m + \ldots + A_1 \cdot 10 + A_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_p}{10^p},$$

pa je x decimalni broj i njegov decimalni zapis je $x = A_m \ldots A_1 A_0, a_1 a_2 \ldots a_p$, iako bismo ga prema (+) trebali pisati kao $x = A_m \ldots A_1 A_0, a_1 a_2 \ldots a_p 000 \ldots$

Kao što znamo dijeljenje broja 1 s brojem 3 vodi na

$$\left| \frac{1}{3} - \frac{3}{10} - \frac{3}{10^2} - \ldots - \frac{3}{10^n} \right| < \frac{1}{10^n}, \qquad \frac{1}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n},$$

pa je

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$$

decimalni zapis broja 1/3. To se kraće zapisuje $1/3 = 0{,}\dot{3}$ ili kao $0{,}\overline{3}$ ili $0{,}(3)$, što znači da se znamenka 3 stalno ponavlja. Slično je kod dijeljenja 5:7. Dobiva se $5/7 = 0{,}\overline{714285} = 0{,}714285\,714285\,71\ldots$, tj. skupina nadvučenih cifara stalno se ponavlja.

U daljem ćemo promatrati samo brojeve x iz intervala $\langle 0, 1 \rangle$. Decimalni zapis broja x je **periodičan** ako je oblika

$$x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n b_1 \ldots b_p b_1 \ldots b_p \ldots = 0, a_1 \ldots a_n \overline{b_1 \ldots b_p}. \qquad (++)$$

Broj p je **duljina perioda**, a $b_1 \ldots b_p$ **period.**

TEOREM 3. *Realan broj $x \in \langle 0, 1 \rangle$ je racionalan ako i samo ako je njegov decimalni zapis periodičan.*

Dokaz. Neka je x zapisan u obliku (++). To znači da je

$$x = \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10} + \frac{1}{10^n}\left(\frac{b_1}{10} + \ldots + \frac{b_p}{10^p}\right) + \frac{1}{10^{n+p}}\left(\frac{b_1}{10} + \ldots + \frac{b_p}{10^p}\right) + \ldots =$$
$$= \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \left(\frac{b_1}{10} + \ldots + \frac{b_p}{10^p}\right)\frac{1}{1 - 10^{-p}},$$

odakle slijedi da je x racionalan broj.

Sada dokažimo obratno. Neka je $x = a/b, a, b \in \mathbf{N}, a < b$. Neformalno možemo ovako rezimirati. Dijeljenjem a sa b, mogući ostaci su $0, 1, \ldots, b-1$. Ako se nakon konačno koraka dobiva 0 kao ostatak, onda je $x = a/b$ decimalni broj. U protivnome se algoritam dijeljenja nastavlja bez kraja i bar jedan od brojeva $1, \ldots, b-1$ se pojavljuje kao ostatak u svakih b koraka, pa je decimalni zapis od $x = a/b$ periodičan (pratite ovo na konkretnom primjeru, npr. 5/7).

Preciznije se gornje razmatranje ovako može provesti. Određivanje decimalnog zapisa broja x koje je dano u dokazu prethodnog teorema, u slučaju broja $x = a/b$, odgovara dijeljenju broja a sa b. Tako u ovom slučaju dobivamo odgovarajuće jednakosti kao u dokazu teorema 2.

$$10 \cdot \frac{a}{b} = a_1 + a_1', \quad a_1 \in C, \quad 0 \le a_1' < 1,$$

što daje $10a = a_1 \cdot b + a_1' \cdot b$. Dakle, $a_1' \cdot b$ je ostatak u prvom koraku dijeljenja broja $10 \cdot a$ sa b. Analogno iz druge jednakosti u prethodnom dokazu slijedi da je $a_2' \cdot b$ ostatak u drugom koraku tog dijeljenja, i općenito da je $a_{n+1}' \cdot b$ ostatak u $(n+1)$–ovom koraku dijeljenja a sa b. Ako je $a_{n+1}' = 0$ za neko n, onda izlazi da je

$$10^{n+1}\left(\frac{a}{b} - \frac{a_1}{10} - \ldots - \frac{a_n}{10^n} - \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}\right) = 0,$$

što pokazuje da je a/b decimalni broj, pa je periodičan.

Ako je $a_i' \neq 0$ za svako i, onda postoje brojevi $k, p \in \mathbb{N}$, takvi da je

$$a_{p+k} \cdot b = a_k' \cdot b.$$

Tada je

$$\begin{aligned} a_{p+k+1} + a_{p+k+1}' &= 10 \cdot 10^{p+k}\left(\frac{a}{b} - \frac{a_1}{10} - \ldots - \frac{a_{p+k}}{10^{p+k}}\right) = 10 \cdot a_{p+k}' = \\ &= 10 \cdot a_k' = 10^k\left(\frac{a}{b} - \frac{a_1}{10} - \ldots - \frac{a_k}{10^k}\right) = a_{k+1} + a_{k+1}'. \end{aligned}$$

Odavde je $a_{p+k+1} - a_{k+1} = a_{k+1}' - a_{p+k+1}'$. Lijeva strana je cijeli broj, a desna između 0 i 1. Stoga je $a_{p+k+1}' = a_{k+1}'$ i $a_{p+k+1} = a_{k+1}$. Slično se dobije da je $a_{i+p} = a_i$ za svako $i > k$, pa $x = a/b$ ima periodički decimalni zapis duljine perioda p. ■

Brojevi

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n^2}, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$$

su iracionalni, jer im decimalni zapisi nisu periodični. U stvari, broj y je transcendentan (kao što su to e i π). Može se pokazati da je svaki broj oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$$

transcendentan, ako je $a_n = 0$ ili 1 i pri tome je $a_n = 1$ za beskonačno mnogo indeksa n (o transcendentnim brojevima v. pogl. II).

Napomenimo da je u upotrebi i ova terminologija. Za $x \in \mathbb{R}$ se kaže da je
a) *beskonačan decimalan broj* kada se misli na njegov decimalni zapis (+);
b) *beskonačan decimalni razlomak* ako je $x \in \langle 0, 1\rangle$, a misli se na decimalni zapis $x = 0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots$;
i c) *periodički decimalni razlomak* ako je $x \in \langle 0, 1\rangle$, a misli se na zapis $x = 0, a_1a_2 \ldots a_n\overline{b_1 \ldots b_p}$ toga broja.

Svaki broj $x \in \langle 0, 1\rangle$ se može u decimalnom zapisu $0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots$ zapisati tako da ne postoji broj p takav da je $a_n = 0$ za svako $n > p$ (npr. $0{,}3 = 0{,}3\overline{0} = 0{,}2\overline{9}$ su periodički zapisi broja 0,3). Jasno je da nakon nekog mjesta mogu dolaziti samo devetke, tj. može postojati broj p takav da je $a_n = 9$ za svako $n \ge p$. Nazovimo takav prikaz broja x **standardni decimalni zapis broja** x. Da je takav zapis potpuno određen brojem x izlazi iz ove leme.

LEMA 1. *Ako su $x = 0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots$ i $y = 0, b_1b_2 \ldots b_n \ldots$ standardni decimalni zapisi brojeva $x, y \in \langle 0, 1\rangle$, onda je $x = y \Leftrightarrow a_n = b_n \forall n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je $x = y$, tj.

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots.$$

Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da je $a_k \neq 0$ i $b_k \neq 0$ za svako $k \ge m$. Tada je $|a_k - b_k| < 9$, za $k \ge m$, pa je

$$|a_1 - b_1| \le \frac{|a_2 - b_2|}{10} + \frac{|a_3 - b_3|}{10^2} + \ldots < \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots = 1.$$

Iz $|a_1 - b_1| < 1$ slijedi $a_1 = b_1$. Slično se sada dokaže da je $a_2 = b_2$ i općenito da je $a_n = b_n$, za svako $n \in \mathbb{N}$. ■

Primjer 8. Decimalni broj $0{,}3\dot{1}\dot{4}$ (znamenke 1 i 4 se ponavljaju) zapišite u obliku racionalnog broja.

Rješenje. Imamo redom

$$\begin{aligned} 0{,}3\dot{1}\dot{4} = 0{,}3141414\ldots &= \frac{3}{10} + \frac{14}{10^3} + \frac{14}{10^5} + \frac{14}{10^7} + \ldots \\ &= \frac{3}{10} + \frac{14}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \ldots\right). \end{aligned}$$

Izraz u zagradi je beskonačni geometrijski red s prvim članom $a_1 = 1$ i kvocijentom $q = 1/10^2$, pa je njegov zbroj

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{100}{99}.$$

Dakle je

$$0{,}3\dot{1}\dot{4} = \frac{3}{10} + \frac{14}{10^3} \cdot \frac{100}{99} = \frac{311}{990}.$$

Sada dokažimo davno najavljenu tvrdnju da realnih brojeva "ima više" od prirodnih brojeva. Vrijedi ovaj teorem.

TEOREM 4 (G. Cantor). *Skup realnih brojeva je neprebrojiv.*

Dokaz. Neka je $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ bilo koji niz realnih brojeva iz intervala $I = \langle 0, 1 \rangle$ i pretpostavimo da je $n \mapsto x_n$ injekcija sa N u I. Brojeve $x_1, x_2, \ldots$ napišimo u standardnom decimalnom zapisu.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n}\ldots \\ x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n}\ldots \\ x_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}\ldots a_{3n}\ldots \\ &\vdots \\ x_n &= 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots a_{nn}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sada, pomoću ove "tablice" brojeva (a_{ij}) definiramo broj

$$x = 0, a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots,$$

tako da je za svako $n \in \mathrm{N}, a_n \neq 0, a_n \neq 9$ i $a_n \neq a_{nn}$. Prema prethodnoj lemi je $x \neq x_1, x \neq x_2, \ldots, x \neq x_n, \ldots$. Budući da je $x \in I$ i da je $x \neq x_n$ za svako $n \in \mathrm{N}$, to injekcija $n \mapsto x_n$ sa N u I nije surjekcija. Dakle, ne postoji ni surjekcija sa N u **R**. Stoga skupovi N i **R** nisu bijektivni. Ovaj postupak poznat je pod nazivom **Cantorov dijagonalni postupak.** ∎

Napomenimo da se umjesto baze 10 mogu brojevi zapisati i s drugim bazama. Napose je korisna baza 2, pa se tada govori o **binarnom zapisu** broja 2. Često se brojevi implementiraju u računalo kao binarni brojevi. Prelazak sa dekadskog u binarni sustav i obratno ćemo podrobnije opisati u pogl. II (Hornerov algoritam), no evo samo jedan primjer. Uzmimo npr. dekadski broj 123. Tada njegov binarni zapis dobijemo ovako. Zbog

$$123 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

imamo da je $(123)_{10} = (1111011)_2$.

§ 5. Matematička indukcija

Zamislimo situaciju da 50 ljudi čeka u redu (npr. za kinokarte) i pretpostavimo da ako se bilo kojoj osobi iz tog reda priopći neka obavijest (npr. o stanju s kartama) ona će tu informaciju prenijeti i osobi iza nje u tom redu. Pretpostavimo da smo prvoj osobi u redu priopćili neku informaciju. Tada će prva osoba u redu saopćiti tu informaciju drugoj osobi, druga osoba trećoj itd. pa će na kraju sve osobe u tom

redu doznati tu obavijest. Ista će se stvar, naravno, dogoditi i za bilo koji drugi broj osoba u redu. Razmotrimo sada beskonačni analogon te situacije. Zamislimo da su svi prirodni brojevi napisani u poretku $1, 2, 3, \ldots$ i pretpostavimo ako bilo koji član iz tog "reda" ima svojstvo P, onda i sljedeći član ima to svojstvo. Pretpostavimo da prvi član (s rednim brojem 1) ima svojstvo P. Tada možemo zaključiti da svi članovi imaju svojstvo P.

Primjer 1. Neka realan broj x ima svojstvo P ako je $\operatorname{tg} \pi x = 0$. Primijetimo da nemaju svi realni brojevi svojstvo P, npr. $x = \frac{1}{3}$ nema. Međutim ako neki $x \in \mathbf{R}$ ima svojstvo P, onda $x + 1$ ima svojstvo P. Zaista

$$\operatorname{tg}(x+1)\pi = \operatorname{tg}(x\pi + \pi) = \frac{\operatorname{tg} x\pi + \operatorname{tg} \pi}{1 - \operatorname{tg} x\pi \operatorname{tg} \pi} = \frac{0+0}{1 - 0 \cdot 0} = 0.$$

Uočimo da $x = 1$ ima svojstvo P. Odatle zaključujemo da svi prirodni brojevi imaju svojstvo P (što još ne znači da neki drugi brojevi nemaju to svojstvo). ∎

Primjer 2. Neka prirodan broj ima svojstvo P ako vrijedi

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

tj. kažimo da za $n \in \mathrm{N}$ vrijedi $P(n)$ ako vrijedi (1). Očito da $P(1)$ vrijedi, jer $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Pretpostavimo da vrijedi $P(k)$. To znači da je

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Pokažimo sada da vrijedi $P(k+1)$. Imamo

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) &= (1 + 2 + 3 + \ldots + k) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \\ &= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \end{aligned}$$

čime je dokazano da i $P(k+1)$ vrijedi. Prema tome, iz dviju tvrdnji
1. vrijedi $P(1)$,
2. ako vrijedi $P(k)$, onda vrijedi $P(k+1)$,

zaljučujemo da $P(n)$ vrijedi za svako $n \in \mathrm{N}$, tj. formula (1) vrijedi za svako $n \in \mathrm{N}$. ∎

Takva metoda dokazivanja u matematici zove se dokaz matematičkom indukcijom. Podsjetimo da **princip matematičke indukcije** glasi ovako. Neka je $S \subseteq \mathrm{N}$ podskup skupa prirodnih brojeva s ova dva svojstva:

$$1 \in S$$
$$(\forall n \in \mathrm{N}) n \in S \Rightarrow n + 1 \in S.$$

Tada je $S = \mathrm{N}$.

U primjenama, kada želimo dokazati da neka formula ili svojstvo $F(n)$ u kojoj dolazi $n \in \mathrm{N}$ vrijedi za sve $n \in \mathrm{N}$, uzimamo da je skup S skup svih $n \in \mathrm{N}$ za koje vrijedi formula ili svojstvo $F(n)$, pa ako dokažemo da je $1 \in S$ i da $n \in S \Rightarrow$ $\Rightarrow n+1 \in S$, onda prema principu matematičke indukcije zaljučujemo da je $S = \mathrm{N}$, tj. da formula ili svojstvo $F(n)$ vrijedi za svako $n \in \mathbb{N}$. Obično se činjenica da vrijedi $F(1)$, tj. da je $1 \in S$ zove **baza indukcije**, a činjenica da iz $F(k)$ slijedi $F(k+1)$, tj. $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$ zove **korak indukcije**.

Primjer 3. Dokažimo matematičkom indukcijom da za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi formula

$$F(n): 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{2}$$

Rješenje. $F(1)$ je točno, jer je $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{2}$. Pretpostavimo da je $F(k)$ točno pa pokušajmo dokazati $F(k+1)$. Počinjemo izrazom $1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2$, koji želimo izračunati. Prema pretpostavci indukcije (tj. da vrijedi $F(k)$), znamo kolika je suma prvih k članova te sume. Dakle,

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right] = (k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6},$$

čime smo dokazali $F(k) \Rightarrow F(k+1)$. Prema principu matematičke indukcije zaključujemo da $F(n)$ vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$, tj. formula (2) za sve $n \in \mathbb{N}$. ∎

Primjer 4. Označimo sa $F(n)$ svojstvo prirodnog broja n, ako vrijedi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{5}\right)^n \geq 1 + \frac{1}{5}n \tag{3}$$

(ili što je ekvivalentno: $6^n \geq (n+5)5^{n-1}$). Dokažite to svojstvo.

Rješenje. Za $n=1$, $F(1)$ jest: $1+\frac{1}{5} \geq 1+\frac{1}{5}$, što je točno. Pretpostavimo da vrijedi $F(k): \left(1+\frac{1}{5}\right)^k \geq 1+\frac{k}{5}$. Tada za $k+1$ pišemo

$$\left(1+\frac{1}{5}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{5}\right)^k\left(1+\frac{1}{5}\right) \geq \left(1+\frac{k}{5}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)$$

$$= 1 + \frac{k}{5} + \frac{1}{5} + \frac{k}{25} = 1 + \frac{k+1}{5} + \frac{k}{25} > 1 + \frac{k+1}{5}.$$

Ove nejednakosti pokazuju da $F(k) \Rightarrow F(k+1)$. Matematičkom indukcijom smo time dokazali da (3) vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$. ∎

Dokazivanje metodom matematičke indukcije (ili kratko: indukcijom) ima nekoliko nedostataka. Prvi je taj da se njome provjeravaju formule koje smo obično naslutili iz nekih drugih razloga. No u većini slučajeva kada razumijemo te "prave razloge" zbog kojih bi formula trebala vrijediti, tada možemo naći i izravan dokaz te formule. Drugi nedostatak je taj da, ako je formula već i dokazana indukcijom, ne možemo iz tog dokaza često vidjeti što zapravo ta formula kaže ili kamo vodi.

Mnogi identiteti i nejednakosti koje ovise o prirodnom broju dokazuju se indukcijom. Osnovna je ideja matematičke indukcije bila poznata još u starogrčkoj matematici. Još je Euklid dokazao da ima beskonačno mnogo prostih brojeva, dokazavši ako ih ima n, da ih mora biti i $(n+1)$ (v. pogl. VII). Međutim, umjesto

da to formulira izravno, on je ideju indukcije "skrio" u dokazu kontradikcijom. Metodu matematičke indukcije kao tehniku dokazivanja prvi je eksplicitno formulirao Francesco Maurolycus (1494–1575). Obimno se njome koristio Blaise Pascal*) u svojim metodama rada s binomnim koeficijentima, a na moderan način u aksiomatsku izgradnju realnih brojeva prvi je princip matematičke indukcije uveo Giuseppe Peano (usp. 3.4).

Dokažimo indukcijom poznatu **binomnu formulu**. Prvo nam treba pojam **binomnog koeficijenta**. Za cijele brojeve $n, k \geq 0$ definiramo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!},$$

pri čemu je $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k$ (čita se "k **faktorijela**"), $0! := 1$. Broj $\binom{n}{k}$ se čita "n povrh k" i kaže na koliko se načina od n predmeta može izabrati njih k. Očito je

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1} = n, \binom{n}{n} = 1.$$

Lako je provjeriti da binomni koeficijenti imaju ova svojstva (učinite to sami) $\binom{n}{k} = 0$ za $k > n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. Ova posljednja jednakost zove se **Pascalova formula**.

TEOREM 1 (Binomna formula). *Za kompleksne brojeve a i b i prirodan broj n vrijedi*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

ili kraće

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Dokaz. Matematičkom indukcijom po n. Za $n=1$ formula je točna jer je

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1 = a+b.$$

Pretpostavimo da formula vrijedi za n i dokažimo je za $n+1$. Imamo $(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n$, a to je prema induktivnoj pretpostavci dalje jednako

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k =$$

$$= a\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right) =$$

*) Blaise Pascal (1623–1662), francuski matematičar, fizičar, filozof i pisac. Konstruirao je prvi računar, tzv. aritmometar.

tj. da formula ili svojstvo $F(n)$ vrijedi za svako $n \in \mathrm{N}$. Obično se činjenica da vrijedi $F(1)$, tj. da je $1 \in S$ zove **baza indukcije**, a činjenica da iz $F(k)$ slijedi $F(k+1)$, tj. $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$ zove **korak indukcije.**

Primjer 3. Dokažimo matematičkom indukcijom da za svako $n \in \mathrm{N}$ vrijedi formula

$$F(n): 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (2)$$

Rješenje. $F(1)$ je točno, jer je $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{2}$. Pretpostavimo da je $F(k)$ točno pa pokušajmo dokazati $F(k+1)$. Počinjemo izrazom $1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2$, koji želimo izračunati. Prema pretpostavci indukcije (tj. da vrijedi $F(k)$), znamo kolika je suma prvih k članova te sume. Dakle,

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$
$$= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right] = (k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6} =$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6},$$

čime smo dokazali $F(k) \Rightarrow F(k+1)$. Prema principu matematičke indukcije zaključujemo da $F(n)$ vrijedi za sve $n \in \mathrm{N}$, tj. formula (2) za sve $n \in \mathrm{N}$. ■

Primjer 4. Označimo sa $F(n)$ svojstvo prirodnog broja n, ako vrijedi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{5}\right)^n \geq 1 + \frac{1}{5}n \qquad (3)$$

(ili što je ekvivalentno: $6^n \geq (n+5)5^{n-1}$). Dokažite to svojstvo.

Rješenje. Za $n = 1, F(1)$ jest: $1+\frac{1}{5} \geq 1+\frac{1}{5}$, što je točno. Pretpostavimo da vrijedi $F(k): \left(1+\frac{1}{5}\right)^k \geq 1+\frac{k}{5}$. Tada za $k+1$ pišemo

$$\left(1+\frac{1}{5}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{5}\right)^k\left(1+\frac{1}{5}\right) \geq \left(1+\frac{k}{5}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)$$
$$= 1+\frac{k}{5}+\frac{1}{5}+\frac{k}{25} = 1+\frac{k+1}{5}+\frac{k}{25} > 1+\frac{k+1}{5}.$$

Ove nejednakosti pokazuju da $F(k) \Rightarrow F(k+1)$. Matematičkom indukcijom smo time dokazali da (3) vrijedi za sve $n \in \mathrm{N}$. ■

Dokazivanje metodom matematičke indukcije (ili kratko: indukcijom) ima nekoliko nedostataka. Prvi je taj da se njome provjeravaju formule koje smo obično naslutili iz nekih drugih razloga. No u većini slučajeva kada razumijemo te "prave razloge" zbog kojih bi formula trebala vrijediti, tada možemo naći i izravan dokaz te formule. Drugi nedostatak je taj da, ako je formula već i dokazana indukcijom, ne možemo iz tog dokaza često vidjeti što zapravo ta formula kaže ili kamo vodi.

Mnogi identiteti i nejednakosti koje ovise o prirodnom broju dokazuju se indukcijom. Osnovna je ideja matematičke indukcije bila poznata još u starogrčkoj matematici. Još je Euklid dokazao da ima beskonačno mnogo prostih brojeva, dokazavši ako ih ima n, da ih mora biti i $(n+1)$ (v. pogl. VII). Međutim, umjesto

da to formulira izravno, on je ideju indukcije "skrio" u dokazu kontradikcijom. Metodu matematičke indukcije kao tehniku dokazivanja prvi je eksplicitno formulirao Francesco Maurolycus (1494–1575). Obimno se njome koristio Blaise Pascal*) u svojim metodama rada s binomnim koeficijentima, a na moderan način u aksiomatsku izgradnju realnih brojeva prvi je princip matematičke indukcije uveo Giuseppe Peano (usp. 3.4).

Dokažimo indukcijom poznatu **binomnu formulu.** Prvo nam treba pojam **binomnog koeficijenta.** Za cijele brojeve $n, k \geq 0$ definiramo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!},$$

pri čemu je $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k$ (čita se "k **faktorijela**"), $0! := 1$. Broj $\binom{n}{k}$ se čita "n povrh k" i kaže na koliko se načina od n predmeta može izabrati njih k. Očito je

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1} = n, \binom{n}{n} = 1.$$

Lako je provjeriti da binomni koeficijenti imaju ova svojstva (učinite to sami) $\binom{n}{k} = 0$ za $k > n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. Ova posljednja jednakost zove se Pascalova formula.

TEOREM 1 (Binomna formula). *Za kompleksne brojeve a i b i prirodan broj n vrijedi*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

ili kraće

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Dokaz. Matematičkom indukcijom po n. Za $n = 1$ formula je točna jer je

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1 = a+b.$$

Pretpostavimo da formula vrijedi za n i dokažimo je za $n+1$. Imamo $(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n$, a to je prema induktivnoj pretpostavci dalje jednako

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k =$$
$$= a\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right) =$$

*) Blaise Pascal (1623–1662), francuski matematičar, fizičar, filozof i pisac. Konstruirao je prvi računar, tzv. aritmometar.

Nejednakost $G \leq A$ točna je prema Teoremu 2, a $K \leq x_n = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je očito. Time je korolar dokazan. ∎

Vratimo se indukciji. Vrlo je važno uočiti da bez jednog od dva koraka: baze ili koraka indukcije, zaključak ne mora vrijediti. Nadalje moramo prvo provjeriti metodu dokaza za male vrijednosti od n; $n = 1$, a katkada i za $n = 2$, kako pokazuje sljedeći paradoks.

Primjer 5. Neka je $P(n)$ izjava: "Ako društvo od n ljudi sadrži bar jednog plavokosog, onda su svi ljudi u tom društvu plavokosi." Treba "dokazati" da su svi ljudi plavokosi.

"Dokaz". $P(1)$ je očito točno, jer ono kaže: "Ako društvo od jednog čovjeka sadrži plavokosog, onda su svi ljudi u tom društvu plavokosi." Pretpostavimo sada da znamo da je $P(k)$ točno za neko $k \in \mathrm{N}$. Tada ćemo "dokazati" da je također $P(k+1)$ točno. Uzmimo društvo od $k+1$ ljudi i označimo ih sa $N_1, N_2, \ldots, N_{k+1}$ te uzmimo da je N_1 plavokos. Isključimo za moment osobu N_{k+1} iz razmatranja. Što preostaje je društvo od k ljudi: $N_1, N_2, \ldots, N_k$ od kojih je N_1 plavokos, pa su prema pretpostavci indukcije (jer $P(k)$ vrijedi) svi oni plavokosi, tj. $N_1, N_2, \ldots, N_k$ su plavokosi. Sada vratimo osobu N_{k+1} natrag u razmatranje, a isključimo osobu N_1. Ovaj put opet preostaje k osoba $N_2, N_3, \ldots, N_k, N_{k+1}$. To društvo opet sadrži plavokosog N_2. Opet, jer smo prepostavili da vrijedi $P(k)$, svi su oni $N_2, N_3, \ldots, N_{k+1}$ plavokosi. Pokazali smo, dakle, da ako u društvu od $k+1$ osoba postoji plavokosi, da su onda svi u tom društvu plavokosi. To je upravo $P(k+1)$. Prema tome, "pokazali smo":
$P(1)$ je točno, te ako je $P(k)$ točno, onda je $P(k+1)$ točno. Prema tome $P(n)$ je točno za svako n. Ljudsko društvo sadrži bar jednog plavokosog čovjeka, pa su svi njegovi članovi plavokosi, tj. svi su ljudi plavokosi. To, međutim, očito nije točno. Pogreška je u našoj primjeni induktivne pretpostavke. Kad smo promatrali skup $\{N_2, N_3, \ldots, N_{k+1}\}$, tvrdili smo da je N_2 plavokos. No, uzmimo da je $k = 1$. Tada je $N_{k+1} = N_2$, a taj nije u skupu $\{N_1, N_2, \ldots, N_k\}$, pa nije pokazano da je on plavokos. Drugim riječima, pokazali smo da $P(k)$ povlači $P(k+1)$ samo za $k > 1$, a nismo pokazali da $P(1) \Rightarrow P(2)$. Kad bi postojao svijet u kojem je $P(2)$ istinit, tj. "u svakom društvu od dvoje ljudi, ako je jedan od njih plavokos, onda je i drugi plavokos", onda se lako vidi da su $P(3), P(4), \ldots, P(n), \ldots$, također istiniti. ∎

Nadalje, imamo ovaj **generalizirani princip matematičke indukcije.** Neka je $n_0 \in \mathrm{N}_0$ te neka je $S \subseteq \mathrm{N}_0$ skup s ova dva svojstva:

$$n_0 = \min S \in S$$
$$(\forall n \in \mathrm{N}_0) n \geq n_0 \quad \& \quad n \in S \Rightarrow n+1 \in S.$$

Tada je

$$S = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\} = \{n \in \mathrm{N}_0 | n \geq n_0\}.$$

Također, vrijedi sljedeći oblik **principa matematičke indukcije za konačne skupove.** Neka je $n_0 \in \mathrm{N}$ te neka je $S \subseteq \mathrm{N}_{n_0} = \{1, 2, \ldots, n_0\}$ s ova dva svojstva:

$$1 \in S$$
$$(n \in S \quad \& \quad n+1 \in \mathrm{N}_{n_0}) \Rightarrow n+1 \in S.$$

Tada je $S = \mathrm{N}_{n_0} = \{1, 2, \ldots, n_0\}$.

Katkad se služimo ovako formuliranim principom matematičke indukcije.

Neka je $S \subseteq \mathrm{N}$ sa svojstvima:

$$\exists n_0 \in \mathrm{N}, n_0 \in S \quad \&$$
$$(\forall n \in \mathrm{N})(k < n, k \in S) \Rightarrow n \in S.$$

Tada je $S = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\}$.

Primjer 6. Svaki prirodan broj $n \geq 2$ može se napisati kao produkt prostih brojeva. (**Prost broj** $p \geq 2$ je takav prirodan broj koji je djeljiv samo s 1 i p).

Dokaz. Tu je baza indukcije $n_0 = 2$, i to je prost broj. Pretpostavimo sada da je $n \geq 2$ i pretpostavimo da se svaki od brojeva $2, 3, 4, \ldots, n-1$ može napisati kao produkt prostih brojeva. Želimo dokazati da se i n može tako napisati. Ako je n prost broj nemamo što dokazivati. Ako n nije prost, onda postoji r koji ga dijeli, tj. $s = n/r$, pa stoga $n = rs$, gdje su r i $s < n$. Po pretpostavci r i s se mogu zapisati kao produkti prostih brojeva. Njihovim množenjem dobivamo da se i n može napisati kao produkt prostih brojeva. ∎

Principom indukcije služimo se i tada kada želimo definirati neko preslikavanje $x : \mathrm{N} \to S$ u skup S. Svako takvo preslikvanje zove se **niz** u S, a $x(n)$ se obično označava sa x_n i zove **opći** ili **n-ti član niza** x s **indeksom** n. Niz se obično označava sa $(x_n), n \in \mathrm{N}$ ili naprosto sa $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Vrijedi

Princip definicije indukcijom (ili **rekurzijom**). Neka je S skup, $a \in S$, te neka je za svako $n \in \mathrm{N}$ dano preslikavanje $f_n : S \times S \times \ldots \times S \to S$. Tada postoji jedinstveni niz (x_n) u S takav da je

$$x_1 = a \tag{8}$$

$$x_{n+1} = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{za svako } n \in \mathrm{N}. \tag{9}$$

Posebno, ako f_n ovisi samo o varijabli x_n, tj. ako je $f_n(x_1, \ldots, x_n) = f_n(x_n)$, onda zapravo imamo za svako $n \in \mathrm{N}$ preslikavanje $f_n : S \to S$, pa postoji jedinstven niz u N takav da je $x_1 = a$ i $x_{n+1} = f_n(x_n)$, za svako $n \in \mathrm{N}$. (9) se zove **rekurzivna formula** (ili **relacija**) za niz (x_n). Za dokaz vidi cit. knjigu S. Mardešića.

Neka je $S = \mathrm{N}, a = 1$ i neka je $f_n : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ dano sa $f_n(p) = p \cdot (n+1)$. Zaključujemo da postoji jedinstven niz u N, takav da je $x_1 = 1$, te $x_{n+1} = f_n(x_n) = x_n(n+1), n \in \mathrm{N}$. Očito je $x_2 = 1 \cdot 2, x_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3, \ldots$, općenito $x_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Oznaka za $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ je $n!$ i čita se n **faktorijela** kao što je bilo prije spomenuto. Po definiciji se stavlja da je $0! := 1$.

Sada ćemo precizno opisati što je to **suma** od m članova: $\sum_{i=1}^{m} x_i$, gdje su $x_1, \ldots, x_m$ dani brojevi. Neka je $S = \mathrm{R}$ (ili C ili bilo koji skup u kojem imamo asocijativno zbrajanje), $m \in \mathrm{N}$ i za $n \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ neka je $f_n : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, f_n(x) = x + x_{n+1}$, a neka je $x_1 = a$. Tada postoji jedno jedino preslikavanje $g : \{1, 2, \ldots, m-1\} \to \mathrm{R}$ tako da je za svako $n \in \{1, \ldots, m-1\}$, $g(1) = x$, $g(n+1) = f_n(g(n)) = g(n) + x_{n+1}$. Napose, posve je određen broj $g(m) \in \mathrm{R}$. Taj broj $g(m)$ ovako pridružen m-torki $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{R}^m$ označava se sa $\sum_{i=1}^{m} x_i$

ili sa $x_1 + \ldots + x_m$. U toj oznaci gornja rekurzivna formula postaje $\sum_{i=1}^{1} = x_1$, $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = (\sum_{i=1}^{n} x_i) + x_{n+1}$. Općenitije, mogu se promatrati sume

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} x_{i_1,i_2,\ldots,i_k}.$$

Ovdje se govori da se sumira po $i_1, i_2, \ldots, i_k$ od 1 do n, bez ikakvih ograničenja, tj. i_1 ide slobodno od 1 do n, a istovremeno i_2 ide od 1 do n itd. Tako je npr. $\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} x_{i_1,i_2,\ldots,i_k} = \sum_{i_1=1}^{n}(\sum_{i_2,\ldots,i_k=1}^{n} x_{i_1,i_2,\ldots,i_k})$. No katkad imamo i ograničenje, npr. da je $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k$. Tada se takva suma zapisuje ovako:

$$\sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k = 1}^{n} x_{i_1,i_2,\ldots,i_k}.$$

Analogno se definiraju **produkti** $\prod_{i=1}^{n} x_i$ brojeva $x_1, \ldots, x_n$.

Primjer 7. $S = \mathrm{N}, a = 1$ i neka je $f_n : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ dano formulom $f_n(p) = p + (n+1)^3$. Tada postoji jedinstven niz u N, takav da je $x_1 = 1$, te $x_{n+1} = f_n(x_n) = x_n + (n+1)^3$, $n \in \mathrm{N}$. Očito je $x_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$. Da izračunamo x_n, postupamo ovako: uvrstimo u formulu $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ redom vrijednosti za $k = n, n-1, \ldots, 2, 1$ i dobivene izraze zbrojimo (tzv. "**teleskopiranje**"). Tada imamo

$$\left.\begin{aligned}
(n+1)^4 &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1\\
n^4 &= (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1\\
&\vdots\\
(k+1)^4 &= k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1\\
k^4 &= (k-1)^4 + 4(k-1)^3 + 6(k-1)^2 + 4(k-1) + 1\\
&\vdots\\
2^4 &= 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1.
\end{aligned}\right\} +$$

Kod tog zbrajanja svaki član k^4 na desnoj strani se dokida s članom k^4 na lijevoj strani naredne jednakosti. Stoga preostaje

$$(n+1)^4 = 1^4 + 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

Sume $\sum_{k=1}^{n} k$ i $\sum_{k=1}^{n} k^2$ izračunali smo ranije i one iznose redom $\frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Nakon uvrštavanja i sređivanja dobivamo

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 . \blacksquare$$

Primjer 8. Pretpostavimo da se broj insekata neke njihove kolonije udvostručuje svake godine. Kolonija je započeta s 10 insekata. Koliko će biti insekata nakon n godina?

Rješenje. Označimo s a_n traženi broj insekata nakon n godina. Zadano je da je $a_0 = 10$. Budući da se kolonija podvostručuje godišnje, proizilazi da je $a_1 = 20$, $a_2 = 40$, $a_3 = 80$. Iz ovih nekoliko prvih vrijednosti slutimo da bi i općenito moglo biti $a_n = 2^n \cdot 10$. Zaista, $a_0 = 2^0 \cdot 10 = 10$. Pretpostavimo da je $a_n = 2^n \cdot 10$. Budući da se godišnje kolonija podvostručuje, imamo da je $a_{n+1} = 2 \cdot a_n = 2(2^n \cdot 10) = 2^{n+1} \cdot 10$. $\blacksquare$

O metodi rekurzije čitatelj može više naći u knjizi D. Veljan, Kombinatorika s teorijom grafova, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

Nejednakost A-G, $A \geq G$

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

Dokaz indukcijom:

Neka pretpostavka vrijedi za $n-1$ nenegativnih brojeva, $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$.

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{x_1 \cdots x_{n-1}} \quad \text{vrijedi}$$

$$A = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}, \quad G = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

$$x_1 = \frac{x_1+\dots+x_1}{n} \leq A \leq \frac{x_n+\dots+x_n}{n} = x_n$$

$x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, (x_1+x_n-A)$ - promatramo ovaj niz

$x_1+x_n-A \geq 0$

po pretpostavci je

$$\left(\frac{x_2+x_3+\dots+x_{n-1}+(x_1+x_n-A)}{n-1}\right)^{n-1} \geq x_2 x_3 \cdots x_{n-1}(x_1+x_n-A)$$

budući da je $x_1+x_2+\dots+x_n = nA \Rightarrow$

$$\frac{(n-1)A^{n-1}}{n-1} \geq x_2 x_3 \cdots x_{n-1}(x_1+x_n-A)$$

$$A^{n-1} \geq x_2 x_3 \cdots x_{n-1}(x_1+x_n-A)$$

$A - x_1 \geq 0$, $x_n - A \geq 0 \Rightarrow$

$(A-x_1)(x_n-A) \geq 0 \Rightarrow Ax_n - A^2 - x_1x_n + Ax_1 \geq 0$

$\Rightarrow A(x_n+x_1-A) \geq x_1 x_n$

$$A^n \geq x_2 x_3 \cdots x_{n-1}[A(x_1+x_n-A)] \geq x_1 \cdots x_n$$

$\Rightarrow A^n \geq x_1 \cdots x_n = G^n \Rightarrow$

$A \geq G$

II. POLINOMI I NEKE ELEMENTARNE FUNKCIJE

Već se u osnovnoj školi dobro upoznajemo s linearnim polinomima, ili točnije polinomima prvog stupnja. To je funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana formulom $f(x) = ax + b$, pri čemu su $a \neq 0$ i b zadani realni brojevi. Kasnije se u srednjoj školi upoznajemo s kvadratnim polinomom ili polinomom drugog stupnja. To je funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdje su $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, zadani brojevi.

Najčešće se kao razlog proučavanju takvih polinoma na školskom nivou navode rješavanja jednadžbi tipa $ax + b = 0$, $ax^2 + bx + c = 0$ itd. Cilj je ovog poglavlja da se sustavno upoznamo s ovim i polinomima višeg stupnja kao i polinomima s više varijabli. No kao prvo ćemo obraditi sustave linearnih jednadžbi.

§ 1. Sustavi linearnih jednadžbi

Sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice x, y ima oblik

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases} \tag{1}$$

Pri tom su $a, b, c, d, \alpha, \beta$ zadani (obično realni ili kompleksni) brojevi. Pomnožimo li prvu jednadžbu s d, drugu s $-b$ i rezultate zbrojimo, dobivamo

$$(ad - bc)x = \alpha d - \beta b, \tag{2}$$

a množenjem prve jednadžbe s $-c$ i druge s a, pa rezultate zbrojimo, dobivamo

$$(ad - bc)y = \beta a - \alpha c \tag{3}$$

Ako je $ad - bc \neq 0$, onda iz (2) i (3) slijedi

$$x = \frac{\alpha d - \beta b}{ad - bc}, \qquad y = \frac{\beta a - \alpha c}{ad - bc}. \tag{4}$$

Struktura sustava (1) i njegova rješenja (4) navodi nas da uz sustav (1) promotrimo shemu

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{5}$$

i broj

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{6}$$

Za shemu (5) kažemo da je **kvadratna matrica drugog reda**. Brojevi a, c čine prvi, a brojevi b, d drugi **stupac** matrice A. Brojevi a, b čine prvi, a brojevi c, d drugi **redak** matrice A. Nadalje, brojevi a, d čine **glavnu**, a brojevi b, c sporednu **dijagonalu** matrice A. Dakle, determinanta $\det A$ se računa tako da se od produkta članova na glavnoj dijagonali oduzme produkt članova na sporednoj dijagonali. Rješenje (4) sustava (1) pomoću determinante možemo dakle ovako zapisati

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}. \tag{7}$$

Matrica (5) zove se **matrica koeficijenata** sustava (1). U nazivniku rješenja x, y sustava (1) dolazi **determinanta sustava** (1). U brojniku izraza (7) rješenja x dolazi determinanta koja se iz A dobiva zamjenom prvog stupca s α, β, a za rješenje y se drugi stupac zamijeni s α, β.

Lako je provjeriti na osnovu definicije determinante da vrijede slijedeća svojstva:

1) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \lambda b \\ c & \lambda d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} a + \lambda c & b + \lambda d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Svojstvo 1) možemo ovako protumačiti: ako stupci (reci) zamijene mjesta, determinanta mijenja predznak, a svojstvo 3) kaže da se determinanta množi brojem tako da se jedan redak ili jedan stupac pomnoži tim brojem, dok 4) kaže da determinanta ne mijenja vrijednost ako retku (ili stupcu) dodamo drugi redak (stupac) pomnožen nekim brojem.

PROPOZICIJA 1. *Sustav jednadžbi (1) ima rješenje za svaki izbor brojeva α, β ako i samo ako je determinanta sustava različita od nule, tj.* $\det A \neq 0$.

Dokaz. Neka je $\det A \neq 0$, a α i β zadani brojevi. Tada se lako provjeri da su

$$x = \frac{\alpha d - \beta b}{\det A}, \qquad y = \frac{\beta a - \alpha c}{\det A}$$

rješenja sustava (1).

Dokažimo obrat. Uzmimo da je $\alpha = 1$, $\beta = 0$ i neka su x, y pripadna rješenja, tj. $ax + by = 1$, $cx + dy = 0$, a za $\alpha = 0$, $\beta = 1$, neka su x' i y' pripadna rješenja, tj. $ax' + by' = 0$, $cx' + dy' = 1$. Ova potonja jednakost pokazuje da c i d ne mogu

biti istovremeno jednaki nuli, pa je $c^2 + d^2 > 0$. Iz (2) i (3) se odmah dobiva da je $x \det A = d$, $y \det A = -c$, odakle slijedi $\det A \neq 0$. ■

Za sustav od tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice, obično se te nepoznanice označavaju s x, y i z, ali mi ćemo ih označavati radije s x_1, x_2 i x_3. Tada taj sustav ima oblik

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \alpha \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = \beta \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = \gamma. \end{cases} \tag{8}$$

Da riješimo ovaj sustav, tj. da izračunamo x_1, x_2, x_3 pomoću zadanih brojeva (koeficijenata) $a_1, a_2, \ldots, c_3, \alpha, \beta, \gamma$ možemo postupiti ovako. Posljednje dvije jednadžbe možemo ovako zapisati

$$b_2x_2 + b_3x_3 = \beta - b_1x_1$$
$$c_2x_2 + c_3x_3 = \gamma - c_1x_1.$$

Odavde prema (7) (smatrajući za moment kao da nam je x_1 poznat) dobivamo

$$\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} \beta - b_1x_1 & b_3 \\ \gamma - c_1x_1 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & b_3 \\ \gamma & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} x_1$$
$$\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} b_2 & \beta - b_1x_1 \\ c_2 & \gamma - c_1x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & \beta \\ c_2 & \gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_2 & b_1 \\ c_2 & c_1 \end{vmatrix} x_1.$$

Odavde nakon kraćeg računanja, a postupajući slično kao pri rješavanju sustava (1) nalazimo da x_1, x_2, x_3 iz (8) imaju isti oblik razlomaka s istim nazivnikom danim s izrazom

$$\begin{aligned} a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 &= \\ = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) &= \\ = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}&. \end{aligned} \tag{9}$$

To nas navodi na ideju da uz sustav jednakosti (8) promatramo shemu

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \tag{10}$$

i broj $\det A$ definiran desnom stranom jednakosti (9). Shema oblika (10) se zove **kvadratna matrica trećeg reda**, a broj $\det A$ se zove **determinanta** matrice A. Brojevi a_1, a_2, a_3 čine prvi **redak** od A i slično se promatraju drugi i treći redak, kao i **stupci** matrice A, a brojevi a_1, b_2, c_3 **glavnu dijagonalu**. Matrica (10) se zove **matrica sustava** (8). Rješenje sustava (8) je dano sa

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}, \tag{11}$$

gdje je $D = \det A$, pri čemu pretpostavljamo da je $D \neq 0$. D_1 je determinanta matrice dobivene tako da se prvi stupac od A zamijeni stupcem α, β, γ, D_2 nastaje iz A zamjenom drugog stupca sa α, β, γ, a D_3 zamjenom trećeg stupca sa α, β, γ. Formule (11) zovu se **Cramerovo pravilo** za rješavanje sustava (8). Elegantni dokaz Cramerovog pravila slijedi iz opće teorije, pa ovdje nećemo provesti sve detalje (v. S. Kurepa, Uvod u linearnu algebru, Školska knjiga, Zagreb, 1975). Cramerovo pravilo, naime, vrijedi općenito za sustav od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica (vidi također K. Horvatić, Linearna algebra (skripta), Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1991.).

I za sustav (8) vrijedi analogna tvrdnja Propozicije 1, naime da sustav (8) ima rješenje za svaki izbor brojeva α, β, γ ako i samo ako je determinanta sustava $\det A \neq 0$. Isto tako vrijede i analogna svojstva za determimantu matrice trećeg reda onim svojstvima 1) – 4) za determinantu drugog reda. Dokazi ovih tvrdnji nisu teški, pa ih ne provodimo, a osnivaju se na **razvoju determinante** trećeg reda po jednom retku ili stupcu. Pišemo li determinantu matrice kao tu shemu brojeva stavljenu između dviju crta, dobivamo tako npr. razvoj determinante (10) po prvom retku

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \tag{12}$$

tj. a_1 množimo s determinantom matrice drugog reda preostale nakon izbacivanja retka i stupca u kojem je a_1 itd. Sve do sada navedeno može se poopćiti na sustave od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica, ali mi nećemo u to detaljno ulaziti, nego ćemo samo ukazati na jednu efikasnu metodu rješavanja linearnih sustava jednadžbi. To je tzv. **Gaussova metoda** (ili **metoda eliminacije**), koja je vrlo primjenjiva i za rad na računalu, jer pored najmanjeg broja operacija ta metoda daje i najmanju grešku u računanju. Pored ove ima i drugih metoda pogodnih za računalo.

Uzmimo općeniti **sustav** od m **linearnih jednadžbi** s n nepoznanica:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\;\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Pri tome su a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots n)$ zadani realni (ili kompleksni) brojevi, koji se zovu **koeficijenti**, a $b_1, \ldots, b_m$ također zadani realni (kompleksni) brojevi koji se zovu **slobodni članovi**. $x_1, \ldots, x_n$ su **nepoznanice**. **Rješenje** tog sustava je uređena n-torka $(c_1, \ldots, c_n)$ brojeva, ako zamjenom $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ (13) prelazi u jednakosti među brojevima. (13) je **homogeni** sustav ako su svi $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, a inače **nehomogen**. Dva sustava tipa (13) s eventualno različitim brojem jednadžbi su **ekvivalentni** ako im se podudaraju skupovi rješenja, tj. ako je svako rješenje prvog ujedno rješenje drugog sustava i obratno. Tako npr. množenjem jedne jednadžbe brojem $\alpha \neq 0$ dobivamo sustav

ekvivalentan polaznom. Ako sustav (13) nema rješenja, kažemo da je **nemoguć** (npr. ako je $a_{i1} = \cdots = a_{in} = 0$, a $b_i \neq 0$, onda je očito (13) nemoguć sustav). Ako sustav (13) ima rješenje, kažemo da je **moguć**, **suglasan** ili **konzistentan**. Homogen sustav je suglasan, jer je $x_1 = \cdots = x_n = 0$ jedno rješenje tog sustava, koje se zove **trivijalno rješenje**.

Sada pređimo na opis Gaussove metode. Uzmimo da je $a_{11} \neq 0$ (ako nije, nađimo u prvom stupcu koeficijent $a_{1j} \neq 0$) pa iz prve jednadžbe u (13) izračunamo (eliminiramo) x_1:

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}}, \tag{14}$$

pa to uvrstimo u ostale jednadžbe. Tada (13) prelazi u (ekvivalentni) sustav

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ &\;\vdots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{mn}^{(1)}x_n &= b_m^{(1)}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Pri tome je

$$a_{ik}^{(1)} = a_{ik} - a_{i1}\frac{a_{1k}}{a_{11}}, \quad b_i^{(1)} = b_i - a_{i1}\frac{b_1}{a_{11}} \quad (i = 2, \ldots, m;\ k = 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Napomenimo da je to isto kao da smo prvu jednadžbu množili sa a_{i1}/a_{11} i rezultat množenja oduzeli od i-te jednadžbe $(i = 2, \ldots, m)$.

Ako svi koeficijenti bar jedne od posljednjih $m - 1$ jednadžbi sustava (15) iščezavaju, a pripadni slobodni član nije nula, onda je sustav (15), pa stoga i sustav (13) nemoguć. Ako pak to nije slučaj, onda iz druge jednadžbe u (15) eliminiramo npr. x_2 i to uvrstimo u treću, četvrtu, ..., m–tu jednadžbu. Takvim uzastopnim eliminacijama nalazimo da je (13) ili nemoguć ili dobivamo sustav tipa

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2k}^{(1)}x_k + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ &\;\vdots \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k + \cdots + a_{kn}^{(k-1)}x_n &= b_k^{(k-1)} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

pri čemu je $a_{11} \neq 0, a_{22}^{(1)} \neq 0, \cdots, a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$.

Sada se sustav (17) riješi "idući odozdo prema gore". Ako je $k = n$, onda (17), pa time i (13) ima jedinstveno rješenje. Ako je $k < n$, onda (17), pa time i (13) ima beskonačno mnogo rješenja. U tom se slučaju nepoznanice $x_1, \ldots, x_k$ izražavaju pomoću nepoznanica $x_{k+1}, \ldots, x_n$, a ove su potpuno slobodne. Može se reći da

(17) rješavamo tako da $x_{k+1}, \dots, x_n$ prebacimo na drugu stranu i onda pripadni "trokutasti" sustav rješavamo odozdo prema gore po nepoznanicama $x_k, \dots, x_2, x_1$.

Primjer 1. Riješite metodom eliminacije sustav

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & & -x_3 & +x_4 = & 3 \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & -x_4 = & 2 \\ 5x_1 & & & -3x_4 = & -6 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = & 2 \end{array}$$

Rješenje. Sukcesivnom eliminacijom kako je gore opisano dobivamo redom sustave.

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & & -x_3 & +x_4 = & 3 \\ & 3x_2 & +x_3 & -3x_4 = & -4 \\ & & 5x_3 & -8x_4 = & -21 \\ & x_2 & +2x_3 & = & -1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrrrl} x_1 & & -x_3 & +x_4 = & 3 \\ & 3x_2 & +x_3 & -3x_4 = & -4 \\ & & 5x_3 & -8x_4 = & -21 \\ & & (5/3)x_3 & +x_4 = & 1/3 \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & & -x_3 & +x_4 = & 3 \\ & 3x_2 & +x_3 & -3x_4 = & -4 \\ & & 5x_3 & -8x_4 = & -21 \\ & & & x_4 = & 2. \end{array}$$

Odavde redom dobivamo $x_4 = 2, x_3 = -1, x_2 = 1, x_1 = 0$. ■

Primjer 2. Riješite sustav od 4 jednadžbe s 5 nepoznanica

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +x_5 = & 3 \\ -2x_1 & & +x_3 & +x_4 & -5x_5 = & -2 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +6x_4 & +5x_5 = & 3 \\ -x_1 & -2x_2 & +5x_3 & -10x_4 & -9x_5 = & -3. \end{array}$$

Rješenje. Opet izrazimo x_1 iz prve jednadžbe i to uvrstimo u preostale tri jednadžbe. Dobivamo

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +x_5 = & 3 \\ & 4x_2 & +7x_3 & +5x_4 & -3x_5 = & 4 \\ & & -4x_3 & +4x_4 & +4x_5 = & 0 \\ & & 8x_3 & -8x_4 & -8x_5 = & 0. \end{array}$$

Budući da su posljednje dvije jednadžbe ekvivalentne, posljednju možemo ispustiti, pa dobivamo ekvivalentni sustav

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +x_5 = & 3 \\ & 4x_2 & +7x_3 & +5x_4 & -3x_5 = & 4 \\ & & -x_3 & +x_4 & +x_5 = & 0. \end{array}$$

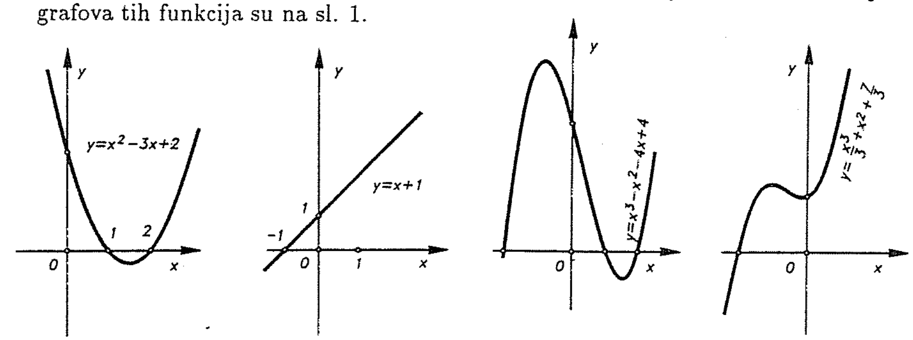
Ovaj sustav rješavamo po x_1, x_2, x_3 smatrajući x_4 i x_5 danim i to odozdo prema gore; $x_3 = x_4 + x_5$. Stavimo li ovo u drugu jednadžbu dobivamo $x_2 = -3x_4 - x_5 + 1$. Stavimo li ove izraze u prvu jednadžbu slijedi $x_1 = x_4 - 2x_5 + 1$. Opće rješenje našeg sustava je stoga $x_1 = a - 2b + 1$, $x_2 = -3a - b + 1$, $x_3 = a + b$, $x_4 = a$, $x_5 = b$, gdje su a, b proizvoljni "parametri". ■

Pored Gaussove metode postoje i mnoge druge, još efikasnije za rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Takvi sustavi se mogu zapisati u matričnom obliku i na njih se mogu primijeniti razne metode linearne algebre.

§ 2. Prsten polinoma u jednoj varijabli

2.1. Pojam polinoma. Prsten polinoma

S tako jednostavnim i korisnim funkcijama kao što su polinomi susrećemo se već u srednjoj školi, gdje se uglavnom uče samo polinomi prvog, drugog i eventualno trećeg stupnja, tj. $f(x) = ax+b$, $g(x) = ax^2+bx+c$, $h(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, gdje su a, b, c, d zadani realni brojevi ($a \neq 0$). To su dakle funkcije sa $\mathbf{R}$ u $\mathbf{R}$. Primjeri grafova tih funkcija su na sl. 1.



Sl. 1.

Važnost polinoma je i u tome što se pomoću njih mogu dobro aproksimirati mnoge druge složene funkcije

Def: Funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zadana formulom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1}$$

gdje su $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ zadani brojevi, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$, zove se **polinom** n**-tog stupnja** (nad $\mathbf{R}$). Brojevi a_i, $i = 0, 1, \dots, n$ zovu se **koeficijenti** polinoma f. Koeficijent a_n se zove **vodeći koeficijent** od f, a koeficijent a_0 **slobodni član** od f. Broj n se zove **stupanj** od f. To zapisujemo kao st $f = n$ ili katkad deg $f = n$. Ako je $a_n = 1$, polinom f se zove **normiran polinom**. Zapis (1) se zove **kanonski zapis** polinoma f. Ako je $f(x) = 0$, za sve $x \in \mathbf{R}$, onda se f zove **nulpolinom** i piše $f = 0$. Nulpolinom je jedini polinom za koji se stupanj ne definira (ili se katkad stavlja st $0 = -\infty$). Nulpolinom zapisujemo kao $f = 0$, a polinom f zadan formulom $f(x) = a$, $a \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ se zove **konstantni polinom**, ili kraće **konstanta**. Stupanj konstante je nula.

Drugi zapis za (1) je

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.} \tag{2}$$

Skup svih polinoma $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ označavamo sa $\mathbf{R}[x]$ i zovemo **prsten polinoma** u jednoj varijabli x nad $\mathbf{R}$.

Podsjetimo se da je **prsten** skup P na kojem su definirane dvije algebarske operacije zbrajanje $+$ i množenje $\cdot$, tj. $+ : P \times P \to P$, $\cdot : P \times P \to P$, pri čemu vrijede ova svojstva:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\forall a, b, c \in P$ (asocijativnost zbrajanja)
2. $\exists 0 \in P$, tako da je $0 + a = a + 0 = a$, $\forall a \in P$ (neutralni element)
3. $\forall a \in P$, $\exists -a \in P$, tako da je $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (suprotni element)
4. $a + b = b + a$, $\forall a, b \in P$ (komutativnost zbrajanja)
5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall a, b, c \in P$ (asocijativnost množenja)
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (distributivnost slijeva i zdesna).

Prsten P je **prsten s jedinicom** ako postoji element $e \in P$, tako da je $a \cdot e = e \cdot a = a$, $\forall a \in P$. Element e se zove **jedinica** u P. Prsten je **komutativan** ako je $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a, b \in P$.

Skup $\mathbf{R}[x]$ je prsten, jer imamo prirodne definicije zbrajanja i množenja polinoma. Naime, neka su $f, g \in \mathbf{R}[x]$. Tada definiramo

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Detaljnije, ako su $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ i neka je npr. $n \geq m$. Tada je

$$(f + g)(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + (a_m + b_m) x^m + \cdots + \\ +(a_1 + b_1) x + a_0 + b_0 \tag{3}$$

$$(f \cdot g)(x) = a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) x^{n+m-1} + \cdots + \\ +(a_0 b_1 + a_1 b_0) x + a_0 b_0 \tag{4}$$

ili

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k, \quad \text{gdje je} \quad c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j. \tag{5}$$

Funkcija $x \mapsto a x^k$, $a \neq 0$, $k \in \mathbf{N}$ zove se **monom** stupnja k. Očito je svaki polinom zbroj monoma. Monome nekog polinoma zovemo još i **članovima polinoma**. Sada formule za zbrajanje i množenje možemo riječima izreći ovako. *Dva se polinoma zbrajaju tako da se zbroje njihovi članovi istog stupnja.*

Dva se polinoma množe tako da se svaki član jednog polinoma pomnoži sa svakim članom drugoga, a dobiveni produkti zbroje.

Očito je da je st funkcija koja svakom polinomu $f \neq 0$ pridružuje st f, pa je dakle st : $\mathbf{R}[x] \backslash \{0\} \to \mathbf{N}_0$ sa svojstvima st $(f \cdot g) = \text{st}\, f + \text{st}\, g$, st $(f + g) \leq \max\{\text{st}\, f, \text{st}\, g\}$. Uočite također da za kompoziciju polinoma $f \circ g$ polinoma vrijedi $\text{st}(f \circ g) = \text{st}\, f \cdot \text{st}\, g$. Lako je provjeriti da je prsten polinoma $\mathbf{R}[x]$ obzirom na zbrajanje i množenje polinoma zaista prsten i to komutativan prsten s jedinicom. Ulogu jedinice ima polinom $e \in \mathbf{R}[x]$ definiran sa $e(x) = 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Isto tako lako je provjeriti da ako je $\mathbf{P}$ bilo koji komutativan prsten s jedinicom 1, da je onda skup $\mathbf{P}[x]$ svih polinoma nad $\mathbf{P}$, tj. izraza oblika

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

gdje su $a_i \in \mathbf{P}$, također komutativni prsten, koji se zove **prsten polinoma** nad $\mathbf{P}$ u varijabli x. Zbrajanje i množenje se definira na isti način.

Od posebnog su interesa tako prsten polinoma $\mathbf{Z}[x]$ nad cijelim brojevima $\mathbf{Z}$, prsten polinoma $\mathbf{Q}[x]$ nad poljem racionalnih brojeva i prsten polinoma $\mathbf{C}[x]$ nad poljem $\mathbf{C}$ kompleksnih brojeva. No mi ćemo se i dalje uglavnom baviti sa $\mathbf{R}[x]$.

Dva polinoma $f, g \in \mathbf{R}[x]$ su **jednaka**, ako su jednake kao funkcije, tj. $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ su jednake ako je $f(x) = g(x)$ za svako $x \in \mathbf{R}$.

Sada želimo karakterizirati jednakost polinoma pomoću njihovih koeficijenata. No prvo nam treba teorem o nulpolinomu.

TEOREM 1 (o nulpolinomu). *Polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ jest nulpolinom ako i samo ako je $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, tj. ako su mu svi koeficijenti nula.*

Dokaz. Ako su svi $a_i = 0$, onda je jasno $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Dokažimo obrat. Pretpostavimo da je $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ i pretpostavimo da nisu svi koeficijenti a_i jednaki nula. Neka je $m \geq 0$ takav da je $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$ i $a_m \neq 0$. Stavimo li $p = n - m$ i $b_0 = a_m$, $b_1 = a_{m+1}, \ldots, b_p = a_{m+p} = a_n$, dobivamo

$$f(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m+1} + \cdots + b_p x^{m+p} = 0, \ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Podijelimo li ovo sa x^m $(x \neq 0)$ slijedi da je

$$b_0 + b_1 x + \cdots + b_p x^p = 0, \ \forall x \in \mathbf{R} \backslash \{0\}.$$

Označimo $M = \max\{|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_p|\} > 0$. Uzmimo sada za vrijednosti $x \in \langle 0, 1/2 \rangle$. Tada imamo redom

$$|b_0| = |b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_p x^p| \leq |b_1| x + |b_2| x^2 + \ldots + |b_p| x^p \leq$$
$$\leq M x (1 + x + \cdots + x^{p-1}) \leq M x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) =$$
$$= M x \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 M x \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \leq 2 M x.$$

Odatle zaključujemo da je

$$\frac{|b_0|}{2M} \le x, \qquad \forall x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle.$$

Uzmemo li za x redom $x = \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^k}, \ldots$ slijedi

$$\frac{|b_0|}{2M} \le \frac{1}{2^k}, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Prema narednoj lemi zaključujemo da je $b_0 = 0$, što je u kontradikciji s našom pretpostavkom da je $b_0 = a_m \ne 0$. ■

LEMA 1. *Neka su $a, b \in R$, $0 \le a < b$ i $a \le \frac{1}{2^n} b$, za sve $n \in \mathbf{N}$ Tada je $a = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $a > 0$. Prema Arhimedovom aksiomu (v. pogl. I), slijedi da postoji $m \in \mathbf{N}$ tako da je $ma > b$. Tada zbog $m < 2^m$ za $m \in \mathbf{N}$ (što slijedi lagano indukcijom) dobivamo

$$b < ma < 2^m a \le b, \qquad \text{tj.} \qquad b < b,$$

što je kontradikcija. ■

Na drugi način se teorem o nulpolinomu može dokazati tako da se u jednakost $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ uvrsti redom $x = 0, 1, 2, \ldots, n$. Tada se dobiva sustav homogenih linearnih jednadžbi po $a_0, a_1, \ldots, a_n$, čija determinanta ima na (i,j)-tom mjestu broj $(i-1)^{j-1} (i, j = 1, 2, \ldots, n+1)$. Iz linearne algebre je poznato da je ta determinanta (tzv. Vandermondeova determinanta) različita od nule, pa stoga taj homogeni sustav ima jedinstveno rješenje $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$. Čitatelja kojeg zanimaju detalji iz linearne algebre, upućujemo na K. Horvatić, Linearna algebra (skripta), Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1991.

Uočite da teorem o nulpolinomu ne mora vrijediti nad konačnim poljima. Npr. za polje $\mathbf{Z}_3$ (vidi pogl. VIII), polinom $f(x) = x^3 + 2x \in \mathbf{Z}_3[x]$ ima svojstvo da je $f(0) = f(1) = f(2) = 0$, pa je $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{Z}_3$, a f nije nulpolinom nad $\mathbf{Z}_3$. Još jednostavniji je primjer polja $\mathbf{Z}_2$ (gdje je $1+1=0$) i polinom $g(x) = x^2 + x \in \mathbf{Z}_2[x]$ za koji je $g(0) = g(1) = 0$. No ipak, teorem o nulpolinomu vrijedi i za polinome s koeficijentima iz $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ i $\mathbf{C}$.

Sada dokažimo teorem o jednakosti polinoma.

TEOREM 2 (o jednakosti polinoma). *Polinomi*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad i \quad g(x) = \sum_{l=0}^{m} b_l x^l, \qquad \boxed{a_n \ne 0, \quad b_m \ne 0,}$$

$a_i, b_j \in \mathbf{R}$, su jednaki ako i samo ako je $m = n$ i $a_j = b_j$, za sve $j = 0, 1, \ldots, n$.

Dokaz. Ako je $m = n$ i $a_j = b_j$ za sve $j = 0, 1, \ldots, n$, onda je očito $f(x) = g(x)$, za svaki $x \in \mathbf{R}$.

Obratno, pretpostavimo da je $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$ i pokažimo da je $m = n$ i $a_j = b_j$ za svaki $j = 0, 1, \ldots, n$.

Pretpostavimo suprotno, da je $m \ne n$ i neka je određenosti radi $n > m$. Tada za sve $x \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0,$$

odakle slijedi da za sve $x \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$a_n x^n + \cdots + (a_m - b_m) x^m + (a_{m-1} - b_{m-1}) x^{m-1} + \cdots + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0) = 0.$$

Prema teoremu o nulpolinomu dobivamo odatle da je $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{m+1} = 0$, $a_m = b_m$, $a_{m-1} = b_{m-1}, \ldots, a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $a_n \ne 0$. Dakle je $m = n$. Tada $f = g$ povlači $(a_n - b_n)x^n + \cdots + (a_0 - b_0) = 0$, a odatle opet po teoremu o nulpolinomu $a_n = b_n, \ldots, a_0 = b_0$. ■

Zbog ovog teorema, polinom je jednoznačno određen sa svojim koeficijentima. Stoga polinom f možemo identificirati sa nizom svojih koeficijenata:

$$f = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots), \qquad a_i \in \mathbf{R}$$

gdje je $n = \operatorname{st} f$ posljednji član za koji je $a_n \ne 0$, a nakon toga dolaze same nule. Uz naznačeno zbrajanje i množenje polinoma, varijablu x možemo shvatiti kao $x = (0, 1, 0, 0, \ldots)$. Tada je $x^2 = (0, 0, 1, 0, \ldots), \ldots, x^n = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$. Identificiramo li niz $(a, 0, 0, \ldots)$ s brojem $a \in \mathbf{R}$, te $(0, 0, \ldots, 0, a, 0, \ldots) = a x^n = x^n a$, možemo pisati

$$\begin{aligned} f &= (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) = (a_0, \ldots, a_{n-1}, 0, 0, \ldots) + a_n x^n = \\ &= (a_0, \ldots, a_{n-2}, 0, 0, \ldots) + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \ldots = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n. \end{aligned}$$

Na taj način dolazimo opet do kanonskog zapisa polinoma.

Primjer 1. Odredite $f(x) \in \mathbf{R}[x]$, ako je $f(x-2) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$.

Rješenje. Zbog teorema o jednakosti polinoma slijedi da $f(x)$ mora biti kubni polinom (tj. stupnja 3), pa dakle postoje $A, B, C, D \in \mathbf{R}$ takvi da je

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Odatle slijedi da mora biti

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 5 = A(x-2)^3 + B(x-2)^2 + C(x-2) + D. \qquad (*)$$

Sređivanjem i izjednačavanjem koeficijenata (opet prema teoremu o jednakosti polinoma) dobivamo ovaj sustav linearnih jednadžbi $A = 1$, $-6A + B = -6$, $12A - 4B + C = 11$, $-8A + 4B - 2C + D = -5$, a odavde $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 1$.

Traženi je polinom stoga $f(x) = x^3 - x + 1$. ■

Ova metoda se zove metoda neodređenih koeficijenata.

Napomenimo da smo u gornjem primjeru mogli postupiti i tako da u jednakost $(*)$ koja vrijedi za svako $x \in \mathbf{R}$ uvrstimo npr. $x = 0, \pm 1, 2$, odakle bi opet dobili $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 1$.

Primjer 2. Neka je $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinom za koji znamo da za svaki racionalan broj $r \in \mathbb{Q}$ poprima racionalnu vrijednost $f(r)$. Dokažite da su svi koeficijenti od f racionalni brojevi, tj. da je $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

Rješenje. Neka je $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Odaberimo $n+1$ proizvoljnih ali različitih racionalnih brojeva $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$, pa izračunajmo vrijednosti $f(r_i)$. Tada dobivamo sustav linearnih jednadžbi za $a_0, a_1, \ldots, a_n$:

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1 r_1 + \cdots + a_n r_1^n = f(r_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 r_{n+1} + \cdots + a_n r_{n+1}^n = f(r_{n+1}). \end{array}$$

Determinanta tog sustava je Vandermondeova determinanta $D = \prod_{i<j}(r_j - r_i) \neq 0$, pa taj sustav ima jedinstveno rješenje. Kako su svi slobodni članovi tog sustava racionalni brojevi, to iz Kramerovog pravila ili iz Gaussove metode eliminacije slijedi da su i brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ racionalni, pa je $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. ∎

Djeljivost polinoma

Sada ćemo u prstenu polinoma $\mathbb{R}[x]$ uvesti pojam djeljivosti. Za polinom f kažemo da je **djeljiv polinomom** $g \neq 0$, ako postoji polinom h, st $h > 0$, takav da je $f = g \cdot h$. U tom je slučaju st f = st g + st h.

TEOREM 3 (o dijeljenju s ostatkom). *Za svaka dva polinoma $f, g \in \mathbb{R}[x]$, $g \neq 0$ postoje jedinstveni polinomi $q, r \in \mathbb{R}[x]$ takvi da vrijedi*

$$\boxed{f = g \cdot q + r.}$$

U slučaju da je $r \neq 0$, tada vrijedi st $r <$ st g.

Dokaz. *Jedinstvenost.* Pretpostavimo da za dane f i g postoje polinomi q, r i polinomi q', r' takvi da je $f = g \cdot q + r$ i $f = g \cdot q' + r'$, st $r <$ st g, st $r' <$ st g. Iz tih jednakosti slijedi oduzimanjem $g \cdot q + r = g \cdot q' + r'$

$$(q - q')g + (r - r') = 0. \quad g(q-q') + (r-r') = 0 \tag{6}$$

Pretpostavimo obrnuto da je $q \neq q'$, pa stoga st $(q - q') \geq 0$. U tom slučaju je prvi član u jednadžbi (6) stupnja $\geq$ st g, jer je st $(q-q')g$ = st $(q-q')$ + st $g \geq$ st g.

S druge strane iz pretpostavke st $r <$ st g i st $r' <$ st g slijedi st $(r - r') <$ st g, što je moguće jedino u slučaju $r = r'$, čime je jedinstvenost dokazana.

Egzistencija. Pokažimo da postoje q i r. Razlikujemo dva slučaja.

a) st $f <$ st g.

U ovom slučaju jednakost $f = gq + r$ zadovoljavaju polinomi $q = 0$ i $r = f$ i očito je st $r <$ st g.

b) st $f \geq$ st g.

Neka su kanonski zapisi od f i g dani sa

$$\begin{array}{ll} f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, & a_n \neq 0 \\ g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, & b_m \neq 0. \end{array}$$

$\Longrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f_1(x)}{g(x)} + \dfrac{a_n}{b_m} x^{n-m}$

Definirajmo polinom f_1 ovako:

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g(x). \ (*) \tag{7}$$

Neka je n_1 = st f_1. Očito je $n_1 < n$ i neka je kanonski zapis od f_1:

$$f_1(x) = d_{n_1}^{(1)} x^{n_1} + \cdots + d_0^{(1)}.$$

Gornji indeks (1) označava da su d–ovi koeficijenti od f_1. Ako je $n_1 \geq m$ postupak nastavimo i formiramo polinom f_2 ovako:

$$f_2(x) = f_1(x) - \frac{d_{n_1}^{(1)}}{b_m} x^{n_1 - m} g(x). \tag{8}$$

Očito je opet n_2 = st $f_2 <$ st $f_1 = n_1$ i neka je

$$f_2(x) = d_{n_2}^{(2)} x^{n_2} + \cdots + d_0^{(2)}.$$

Ako je $n_2 \geq m$ formiramo na isti način f_3 ovako:

$$f_3(x) = f_2(x) - \frac{d_{n_2}^{(2)}}{b_m} x^{n_2 - m} g(x). \tag{9}$$

Opet je n_3 = st $f_3 <$ st $f_2 = n_2$ itd.
Stupnjevi polinoma $f, f_1, f_2, f_3 \ldots$ čine padajući niz, pa nastavljajući taj postupak dobivamo polinom

$$f_k(x) = f_{k-1}(x) - \frac{d_{n_{k-1}}^{(k-1)}}{b_m} x^{n_{k-1} - m} g(x), \tag{10}$$

takav da je ili st $f_k < m$ ili $f_k(x) = 0$. Zbrajanjem jednakosti (7),(8),(9), (10) dobivamo

$$f(x) = \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{d_{n_1}^{(1)}}{b_m} x^{n_1 - m} + \cdots + \frac{d_{n_{k-1}}^{(k-1)}}{b_m} x^{n_{k-1} - m} \right) g(x) + f_k(x). \tag{11}$$

Označimo li izraz u okrugloj zagradi sa $q(x)$, te stavimo li $r(x) = f_k(x)$, dobivamo

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \qquad \text{st } r < \text{st } g. \ ∎$$

Ako je $r \neq 0$ u teoremu o dijeljenju polinoma, polinom q se zove **nepotpuni kvocijent** polinoma f i g, a polinom r **ostatak** pri dijeljenju polinoma f sa g. Ako je $r = 0$, onda se q zove **kvocijent** polinoma f i g i pišemo $q = f/g$. Polinom f je **djeljiv** polinomom g ako je ostatak $r = 0$, pa je dakle $f = g \cdot q$. U tom slučaju je g **mjera** ili **divizor** od f i to zapisujemo sa $g | f$. Učite da ako su $f, g \in \mathbb{Q}[x]$, onda su također $q, r \in \mathbb{Q}[x]$.

Sada ćemo nekim primjerima pokazati kako se može shematizirati algoritam dijeljenje polinoma iz dokaza teorema o dijeljenju i kako se taj teorem može primijeniti.

Primjer 3. Neka je $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 22x^2 - 24x + 10$, $g(x) = x^2 - 2x + 3$. Odredite kvocijent q i ostatak r pri dijeljenju f sa g.

Rješenje. Imamo ovu shemu

$$\begin{array}{llllll}
(3x^4 & -10x^3 & +22x^2 & -24x & +10) : (x^2-2x+3) = 3x^2-4x+5 & \\
\underline{-3x^4} & \underline{\mp 6x^3} & \underline{\pm 9x^2} & & & \\
 & -4x^3 & +13x^2 & -24x & & \longleftarrow \text{ to je } f_1 \\
 & \underline{\mp 4x^3} & \underline{\pm 8x^2} & \underline{\mp 12x} & & \\
 & & 5x^2 & -12x & +10 & \longleftarrow \text{ to je } f_2 \\
 & & \underline{-5x^2} & \underline{\mp 10x} & \underline{\pm 15} & \\
 & & & -2x & -5 & \longleftarrow \text{ to je } f_3 = r.
\end{array}$$

Dakle, nepotpuni kvocijent je $q(x) = 3x^2 - 4x + 5$, a ostatak $r(x) = -2x - 5$, pa je $3x^4 - 10x^3 + 22x^2 - 24x + 10 = (x^2 - 2x + 3)(3x^2 - 4x + 5) - 2x - 5$. ■

Primjer 4. Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{100} + 3x^{99} + x^2 - 3x + 9$ polinomom $g(x) = x^2 + 2x - 3$.

Rješenje. Ostatak pri dijeljenju mora biti polinom najviše prvog stupnja, pa je traženi $r(x)$ oblika $r(x) = Ax + B$. Tada imamo

$$x^{100} + 3x^{99} + x^2 - 3x + 9 = (x^2 + 2x - 3)q(x) + Ax + B.$$

Ova jednakost vrijedi za svako $x \in \mathbf{R}$, pa uvrstimo $x = 1$, $x = -3$ tj. točke u kojima je $x^2 + 2x - 3 = 0$. Dobivamo sustav jednadžbi $27 = -3A + B$, $11 = A + B$, dakle $A = -4$, $B = 15$, pa je $r(x) = -4x + 15$. ■

Primjer 5. Odredite ostatak $r(x)$ pri dijeljenju polinoma $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ polinomom $g(x) = x^4 + x^2 + 1$, ako $f(x)$ pri dijeljenju polinomom $g_1(x) = x^2 + x + 1$ daje ostatak $r_1(x) = -x + 1$, a pri dijeljenju polinomom $g_2(x) = x^2 - x + 1$ daje ostatak $r_2(x) = 3x + 5$.

Rješenje. Očito je $r(x)$ polinom stupnja ≤ 3, $r(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, a $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$. Imamo

$$f(x) = g_1(x)q_1(x) + r_1(x) = g_2(x)q_2(x) + r_2(x) = g(x)q(x) + r(x).$$

Uočite nadalje da je $(x-1)g_1(x) = x^3 - 1$, a $(x+1)g_2(x) = x^3 + 1$. Neka su α_1, α_2 rješenja jednadžbe $g_1(x) = x^2 + x + 1 = 0$, a β_1, β_2 rješenja jednadžbe $g_2(x) = x^2 - x + 1 = 0$. Tada je $\alpha_i^3 = 1$, $\alpha_i^2 = -\alpha_i - 1$, $\beta_j^3 = -1$, $\beta_j^2 = \beta_j - 1$, $(i, j = 1, 2)$. Stoga uvrstimo li u gornju jednakost $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$, $x = \beta_1$, $x = \beta_2$ redom dobivamo. (Ustvari zbog $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$, $\beta_1 + \beta_2 = 1$ dovoljno je uvrstiti samo $x = \alpha_1$, $x = \beta_1$):

$$\begin{aligned}
-\alpha_1 + 1 = r(\alpha_1) &= A\alpha_1^3 + B\alpha_1^2 + C\alpha_1 + D = \\
&= A + B(-\alpha_1 - 1) + C\alpha_1 + D = (C - B)\alpha_1 + A - B + D \\
3\beta_1 + 5 = r(\beta_1) &= A\beta_1^3 + B\beta_1^2 + C\beta_1 + D = \\
&= -A + B(\beta_1 - 1) + C\beta_1 + D = (C + B)\beta_1 - A - B + D.
\end{aligned}$$

Odatle (zbog $\alpha_1, \beta_1 \notin \mathbf{Q}$) slijedi da mora biti $C - B = -1$, $C + B = 3$, $A - B + D = 1$, $-A - B + D = 5$, a odatle $A = -2$, $B = 2$, $C = 1$, $D = 5$, pa je $r(x) = -2x^3 + 2x^2 + x + 5$. ■

Posebno je važno i korisno dijeljenje polinoma linearnim polinomom $g(x) = x - \alpha$. Neka je

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \qquad a_0 \neq 0$$

polinom n-tog stupnja nad $\mathbf{R}$, a $g(x) = x - \alpha$ linearni polinom, $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom postoje jedinstveni polinomi $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}$ i $r(x)$, takvi da je

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + r(x),$$

pri čemu je $r(x) = r$ (konstanta), $r \in \mathbf{R}$. Uvrstimo li u prethodnu jednakost f i g, dobivamo

$$\begin{aligned}
a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = b_0x^n + (b_1 - \alpha b_0)x^{n-1} + (b_2 - \alpha b_1)x^{n-2} + \cdots + \\
+ (b_{n-1} - \alpha b_{n-2})x + r - \alpha b_{n-1}.
\end{aligned}$$

Prema teoremu o jednakosti polinoma odatle slijedi

$$b_0 = a_0,\ b_1 - \alpha b_0 = a_1,\ b_2 - \alpha b_1 = a_2, \ldots, b_{n-1} - \alpha b_{n-2} = a_{n-1},\ r - \alpha b_{n-2} = a_n.$$

Odavde dobivamo

$$b_0 = a_0,\ b_1 = \alpha b_0 + a_1,\ b_2 = \alpha b_1 + a_2, \ldots, b_{n-1} = \alpha b_{n-2} + a_{n-1},\ r = \alpha b_{n-1} + a_n.$$

Te nam formule omogućuju da za zadane polinome f i $g(x) = x - \alpha$ postepeno nađemo koeficijente $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ i ostatak r. Na tim se formulama temelji izračunavanje koeficijenata po tzv. Hornerovoj shemi (algoritmu).

	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
α	$\underbrace{a_0}_{b_0}$	$\underbrace{\alpha a_0 + a_1}_{b_1}$	$\underbrace{\alpha b_1 + a_2}_{b_2}$	$\ldots$	$\underbrace{\alpha b_{n-2} + a_{n-1}}_{b_{n-1}}$	$\underbrace{\alpha b_{n-1} + a_n}_{r}$

U prvi redak upišemo redom koeficijente polinoma f, a na prvo mjesto drugog retka upišemo slobodni član polinoma $g(x) = x - \alpha$ s promijenjenim predznakom, tj. α. Na drugo mjesto upišemo a_0, a ostale članove u drugom retku dobivamo ovako: α pomnožimo s a_0 i tome dodamo a_1 i tako dobijemo b_1. Zatim tako dobiveni b_1 pomnožimo s α i tome dodamo a_2 i tako dobijemo b_2 itd., sve dok ne dobijemo r kojega upišemo u shemi ispod a_n. Na taj način dobijemo sve koeficijente kvocijenta q i ostatak r.

Primjer 6. Hornerovim algoritmom podijelite polinom $f(x) = 3x^5 - x^4 + 7x^2 + 2x - 6$ polinomom $g(x) = x - 2$.

Rješenje.

	3	-1	0	7	2	-6
2	3	$2 \cdot 3 - 1 = 5$	$2 \cdot 5 + 0 = 10$	$2 \cdot 10 + 7 = 27$	$2 \cdot 27 + 2 = 56$	$2 \cdot 56 - 6 = 106$

Kvocijent je dakle, $q(x) = 3x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 27x + 56$, a ostatak $r = 106$. ■

Hornerova shema pogodna je za izračunavanje vrijednosti polinoma $f(x)$ za $x = \alpha$. Naime, iz $f(x) = (x-\alpha)g(x) + r$ za $x = \alpha$ dobivamo $r = f(\alpha)$, tj. ostatak pri dijeljenju polinoma f sa $x - \alpha$ jednak je vrijednosti polinoma f za $x = \alpha$.

Ako je f polinom n-tog stupnja, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, onda uvrštavanjem $x = \alpha$, za računanje vrijednosti polinoma $f(\alpha) = a_0\alpha^n + a_0\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n$ trebamo $n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ množenja i n zbrajanja, a za računanje vrijednosti $r = f(\alpha)$ Hornerovim algoritmom treba samo n množenja i n zbrajanja. Dakle, Hornerov algoritam je mnogo efikasniji od običnog uvrštavanja $x = \alpha$ u $f(x)$, a to je vrlo važno za velike n pogotovu za programiranje na računalima.

Primjer 7. Ako je $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x - 6$, izračunajte $f(5)$.

Rješenje. Imamo

	3	−7	0	2	−6
5	3	$5\cdot3-7=8$	$5\cdot8+0=40$	$5\cdot40+2=202$	$5\cdot202-6=1004$

pa je $f(5) = 1004$. ■

Drugačije se Hornerova shema može i ovako shvatiti. Da se izračuna vrijednost polinoma $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_0$, napišemo ga u obliku

$$f(x) = ((\cdots((a_0x + a_1)x + a_2)x + \cdots +)x + a_n.$$

Iz osnovnih jednakosti u Hornerovom algoritmu za $\alpha = 2$ dobivamo

$$r = 2^na_0 + 2^{n-1}a_1 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n.$$

Ako je, dakle, $(a_0a_1\ldots a_n)_2$ binarni ili dijadski zapis nekog broja, onda je ostatak pri dijeljenju polinoma f sa $g(x) = x - \alpha$ jednak dekadskom zapisu tog broja.

Primjer 8. a) Binarni broj $(10011001)_2$ napišite u dekadskom sustavu. b) Dekadski broj 5264 napišite u binarnom sustavu.

Rješenje. a)

	1	0	0	1	1	0	0	1
2	1	2	4	9	19	38	76	153

Dakle, $(10011001)_2 = 153$.

b) Algoritam za ovaj prijelaz je ovakav. Neka je $m_1 = \max\{n \mid 2^n \le 5264\}$, $m_2 = \max\{n|2^n \le 5264 - 2^{m_1}\}$, $m_3 = \max\{n|2^n \le 5264 - 2^{m_1} - 2^{m_2}\}$ itd. U našem je slučaju $m_1 = 12$, $m_2 = 10$, $m_3 = 7$, $m_4 = 4$. Stoga je $(5264)_2 = 1\cdot2^{12} + 1\cdot2^{10} + 1\cdot2^7 + 1\cdot2^4 = 1010010010000$. ■

Primjer 9. Pomoću Hornerovog algoritma razvijte polinom $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ po potencijama od $x + 1$.

Rješenje. f treba napisati u obliku:

$$f(x) = A(x+1)^4 + B(x+1)^3 + C(x+1)^2 + D(x+1) + E.$$

Odmah vidimo da je E vrijednost polinoma f za $x = -1$, pa E nalazimo pomoću Hornerovog algoritma. Iz prethodne jednakosti slijedi:

$$\frac{f(x)}{x+1} = A(x+1)^3 + B(x+1)^2 + C(x+1) + D + \frac{E}{x+1}.$$

Polinom $g(x) = A(x+1)^3 + B(x+1)^2 + C(x+1) + D$ jest nepotpuni kvocijent pri dijeljenju polinoma f polinomom $x \mapsto x+1$. Slobodni član D tog polinoma jest vrijednost polinoma za $x = -1$, pa i D možemo odrediti pomoću Hornerovog algoritma i postupak nastavimo. Konkretno, to izgleda ovako:

	1	2	−3	−4	1
−1	1	1	−4	0	1
−1	1	0	−4	4	
−1	1	−1	−3		
−1	1	−2			
−1	1				

Uokvireni brojevi jesu traženi koeficijenti, tj. $A = 1$, $B = -2$, $C = -3$, $D = 4$, $E = 1$, pa imamo rastav:

$$f(x) = (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1. \ ■$$

Najveća zajednička mjera polinoma

Neka su $f, g \in \mathbf{R}[x]\backslash\{0\}$ dva polinoma. Polinom h se zove **zajednička mjera (zajednički divizor)** polinoma f i g ako su f i g djeljivi sa h. Zajednička mjera d polinoma f i g je **najveća zajednička mjera** (ili **najveći zajednički divizor**) od f i g ako je d djeljiv sa svakom zajedničkom mjerom od f i g.

Lako se možemo uvjeriti primjerom da ovako definirana najveća zajednička mjera nije jedinstveno određena. Npr. za $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$ i $g(x) = 6x^2 + 7x - 5$, polinom $h(x) = 2x - 1$ jest zajednička mjera, jer je $f(x) = (2x-1)(x^2 + x + 1)$, a $g(x) = (2x-1)(3x+5)$, pa su f i g djeljivi sa h, a očito je $h(x)$ i najveća zajednička mjera, jer bi inače f bio djeljiv sa g. Međutim, polinom $h_1(x) = x - \frac{1}{2}$ je također najveća zajednička mjera od f i g, jer su f i g djeljivi sa h_1:

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2x + 2), \qquad g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(6x + 10).$$

Vidimo, dakle, da ako je h neka zajednička mjera od f i g, onda je to i λh, $\lambda \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$. Stoga dogovorno uzimamo da je najveća zajednička mjera normiran polinom. U tom je slučaju ona jednoznačno određena. Tako definirana najveća zajednička mjera polinoma f i g označava se sa $M(f,g)$ (ili katkad $n.z.m.(f,g)$).

U gornjem je primjeru stoga $M(f,g) = x - \frac{1}{2}$.

Dokažimo sada egzistenciju i jedinstvenost najveće zajedničke mjere.

TEOREM 4 (o najvećoj zajedničkoj mjeri). *Za svaka dva polinoma $f, g \in \mathbf{R}[x]$, $f, g \neq 0$ postoji jedinstveno određena najveća zajednička mjera $M(f,g)$.*

Dokaz. *Jedinstvenost.* Neka su r i r' dvije najveće zajedničke mjere od f i g. Kako je $r = M(f,g)$, to je r djeljiv sa r', a kako je $r' = M(f,g)$, to je r' djeljiv sa

r. Stoga postoje polinomi q i q', st $q \geq 0$, st $q' \geq 0$, takvi da je

$$r = r'q', \qquad r' = rq. \tag{$*$}$$

Iz svih jednakosti slijedi da je st $r \leq$ st r' i st $r' \leq$ st r, pa je st $r =$ st r'. Ovo i relacija ($*$) povlače da su q i q' konstante, tj. brojevi. Kako su r i r' normirani, slijedi da su to q i q', pa je $q = q' = 1$. Stoga je $r = r'$.

Egzistencija. Postojanje najveće zajedničke mjere ćemo dokazati koristeći tzv. **Euklidov algoritam**, koji se sastoji od uzastopne primjene teorema o dijeljenju s ostatkom.

Uzmimo da je st $f \geq$ st g. Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom postoje i jednoznačno su određeni polinomi q_1 i r_1 takvi da je

$$f = gq_1 + r_1, \qquad \text{st}\, r_1 < \text{st}\, g.$$

Primijenimo sada opet taj teorem na polinome g i r_1. Postoje jedinstveni polinomi q_2 i r_2 takvi da je

$$g = r_1q_2 + r_2, \qquad \text{st}\, r_2 < \text{st}\, r_1.$$

Postupak nastavimo za par r_1, r_2, pa postoje polinomi q_3 i r_3 takvi da je

$$r_1 = r_2q_3 + r_3, \qquad \text{st}\, r_3 < \text{st}\, r_2.$$

Nastavljajući postupak, dolazimo do niza ostataka $r_1, r_2, r_3, \ldots$ čiji stupnjevi strogo padaju, pa stoga jednom moramo doći do ostatka $r_k \neq 0$ takvog da je u jednakosti

$$r_{k-1} = r_kq_{k+1} + r_{k+1}, \qquad \text{ostatak} \quad r_{k+1} = 0.$$

Imamo, dakle, ovaj skup jednakosti

$$\begin{aligned} f &= gq_1 + r_1 \\ g &= r_1q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3 \\ &\;\vdots \\ r_{k-3} &= r_{k-2}q_{k-1} + r_{k-1} \\ r_{k-2} &= r_{k-1}q_k + r_k \\ r_{k-1} &= r_kq_{k+1}. \end{aligned} \tag{$**$}$$

Iz posljednje jednakosti ($**$) vidimo r_k dijeli r_{k-1}, tj. $r_k|r_{k-1}$, a iz pretposljednje da $r_k|r_{k-2}$, pa dalje $r_k|r_{k-3}$ itd. Zaključujemo da $r_k|r_3$ i $r_k|r_2$, pa iz treće slijedi da $r_k|r_1$, iz druge da $r_k|g$, a iz prve da r_k dijeli f, tj. $r_k|f$. Prema tome slijedi da je r_k mjera od f i g. Preostaje dokazati da je r_k **najveća zajednička mjera** od f i g. U tu svrhu neka je d bilo koja mjera od f i g. Treba pokazati da d dijeli r_k. Prema pretpostavci, d dijeli f i g. Iz prve jednakosti ($**$) slijedi

$$r_1 = f - gq_1,$$

pa dakle, d dijeli r_1. Na isti način iz druge jednakosti u ($**$) slijedi

$$r_2 = g - r_1q_2,$$

pa dakle, d dijeli r_2. Nastavljajući postupak, zaključujemo redom iz ($**$) da d dijeli i r_k. (Ako r_k nije normiran, podijelimo sve koeficijente s najstarijim pa dobivamo normiran polinom r_k.) Dakle, r_k je najveća zajednička mjera od f i g, tj. $r_k = M(f,g)$. Time je teorem dokazan. ∎

Euklidov algoritam dakle radi tako da prvo podijelimo f sa g, pri čemu dobivamo ostatak r_1, zatim podijelimo g sa r_1 i dobijemo ostatak r_2, pa dalje podijelimo r_1 sa r_2 i dobijemo ostatak r_3, te postupak nastavimo sve dok ne dođemo do prvog k takvog da je $r_{k+1} = 0$. Ostatak r_k (normiran) tada je najveća zajednička mjera polinoma f i g. Mi ćemo se još vratiti na Euklidov algoritam u pogl. VIII gdje se isti postupak primjenjuje za nalaženje $n.z.m$ dvaju cijelih brojeva (u stvari je Euklid upravo to učinio). Uočimo da iz ($**$) slijedi da se najveća zajednička mjera $M(f,g)$ može pisati u obliku linearne kombinacije od f i g, tj.

$$M(f,g) = uf + vg,$$

gdje su $u, v \in \mathbf{R}[x]$. Posebno, za **relativno proste polinome**, tj. za $f, g \in \mathbf{R}[x]$ za koje je $M(f,g) = 1$ postoje polinomi u, v takvi da je

$$uf + vg = 1,$$

odnosno preciznije $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Primjer 10. Pomoću Euklidova algoritma odredite najveću zajedničku mjeru polinoma $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ i $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.

Rješenje. Najprije podijelimo f sa g:

$$\begin{array}{l} (x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1) : (x^3 - 2x^2 + x - 2) = x + 3 \\ \underline{\pm x^4 \mp 2x^3 \pm x^2 \mp 2x} \\ \quad 3x^3 + x^2 + 3x + 1 \\ \quad \underline{\pm 3x^3 \mp 6x^2 \pm 3x \mp 6} \\ \qquad 7x^2 \qquad + 7 \end{array}$$

Dakle,

$$f(x) = (x+3)g(x) + r_1(x) \quad \text{i} \quad r_1(x) = 7x^2 + 7.$$

Sada podijelimo g sa r_1:

$$\begin{array}{l} (x^3 - 2x^2 + x - 2) : (7x^2 + 7) = \frac{1}{7}x - \frac{2}{7}. \\ \underline{\pm x^3 \qquad \pm x} \\ \quad -2x^4 \qquad -2 \\ \quad \underline{\mp 2x^2 \qquad \mp 2} \\ \qquad\qquad 0. \end{array}$$

Dakle, $r_2(x) = 0$, pa je $r_1(x) = 7x^2 + 7$. Stoga je najveća zajednička mjera $M(f,g) = x^2 + 1$. ∎

2.2. Nultočke polinoma i algebarske jednadžbe

Polinome smo definirali kao realne ili kompleksne funkcije. Odsada ćemo uglavnom pod polinomom razumijevati preslikavanje $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ koje je zadano formulom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ kompleksni brojevi. Skup svih takvih polinoma je prsten $\mathbb{C}[x]$ i sve što je rečeno o polinomima iz $\mathbb{R}[x]$ vrijedi i za polinome iz $\mathbb{C}$.

Nultočka polinoma $f \in \mathbb{C}[x]$ je svaki kompleksni broj α za koji je $f(\alpha) = 0$. Ako je α realan broj, onda se α zove **realna nultočka**, a ako je $\alpha \in \mathbb{C}$, **kompleksna nultočka**. Katkad se za nultočku kaže da je **korijen polinoma**.

TEOREM 5 (Bézout). *Broj α je nultočka polinoma f ako i samo ako je f djeljiv polinomom $g(x) = x - \alpha$.*

$g(x)=(x-\alpha)q(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x=\alpha$, $g(\alpha)=0$

Dokaz. Neka je polinom f djeljiv polinomom $g(x) = x - \alpha$. Prema definiciji djeljivosti, postoji polinom q takav da je $f(x) = (x - \alpha)q(x)$. Ta jednakost mora biti istinita za svako x, pa mora vrijediti i za $x = \alpha$. Uvrštavanjem $x = \alpha$ dobivamo da je tada $f(\alpha) = 0$, pa je α nultočka od f.

Obrnuto, neka je α nultočka od f, tj. $f(\alpha) = 0$. Prema teoremu o djeljivosti s ostatkom postoje jedinstveni polinomi q i r = konstanta tako da je $f(x) = (x-\alpha)q(x) + r$. Ovo također vrijedi za svako x, pa uvrštavanjem $x = \alpha$ dobivamo $f(\alpha) = r$. Po pretpostavci je $f(\alpha) = 0$, pa je stoga $r = 0$, što znači da je $f(x) = (x - \alpha)q(x)$, tj. f je djeljiv polinomom $g(x) = x - \alpha$. ■

Primjer 11. Provjerite da je $\alpha = -3$ nultočka polinoma $f(x) = x^3 + 4x^2 + +8x + 15$ i nađite ostale nultočke tog polinoma.

Rješenje. Hornerovim postupkom možemo lako provjeriti da je $f(-3) = 0$:

	1	4	8	15
−3	1	1	5	0

Po Teoremu je f djeljiv sa $g(x) = x + 3$. Dakle, $f(x) = (x+3)(x^2 + x + 5)$. Sada se lako riješi kvadratna jednadžba $x^2 + x + 5 = 0$, čija su rješenja $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{19}}{2}$. Stoga je $f(x) = (x+3)(x - \frac{1 - i\sqrt{19}}{2})(x + \frac{1 + i\sqrt{19}}{2})$. ■

Ako je polinom f djeljiv polinomom $g(x) = (x - \alpha)^k$, $k \in \mathbb{N}$, a nije djeljiv polinomom $h(x) = (x - \alpha)^{k+1}$ onda kažemo da je $x = \alpha$ **k–struka nultočka** od f ili da je **kratnost (višestrukost)** nultočke $x = \alpha$ jednaka k.

Primjer 12. Odredite kratnost nultočke $x = 1$ polinoma $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - -2x + 1$.

Rješenje. Da je $x = 1$ zaista nultočka od f može se provjeriti npr. Hornerovim postupkom. Dijeljenjem f sa $x - 1$ dobijemo $f(x) = (x-1)(x^4 - x^3 + x - 1)$. Sada se opet lako provjeri da je $g(1) = 0$, gdje je $g(x) = x^4 - x^3 + x - 1$, pa se dijeljenjem dobiva da je $g(x) = (x-1)(x^3+1)$, odakle slijedi da je $f(x) = (x-1)^2(x^3+1)$. Kako $x = 1$ nije nultočka polinoma $h(x) = x^3 + 1$, h nije djeljiv sa $x - 1$, pa zaključujemo da je $x = 1$ dvostruka nultočka od f. ■

Primjer 13. Polinom $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ poprima u pet različitih cijelih vrijednosti vrijednost 5. Dokažite da f nema cjelobrojnih nultočaka. Da li f može poprimiti vrijednost prostog broja p?

Rješenje. Neka su $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{Z}$ takvi da je $f(c_i) = 5$. Tada je $f(x) - 5 = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)(x - c_4)(x - c_5)g(x)$, gdje je $g \in \mathbb{Z}[x]$. Pretpostavimo da je $a \in \mathbb{Z}$ nultočka od f. Tada je $-5 = (a - c_1)(a - c_2)(a - c_3)(a - c_4)(a - c_5)g(a)$. Tada bi broj -5 imao barem pet različitih cijelih djelitelja, a ima ih samo četiri $(\pm 1, \pm 5)$. Isti takav dokaz vrijedi za p. ■

Derivacija polinoma i Taylorova formula

Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ polinom. **Derivacijom f' polinoma** f nazivamo polinom

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

Ako je f konstantni polinom, onda je $f'(x) = 0$.

Derivacija f' polinoma f zove se još i **prva derivacija** polinoma f. Uz to, upotrebljava se i termin **derivacija prvog reda**.

Primjer 14. Za polinom $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 18$ derivacija $f'(x)$ jest

$$f'(x) = 6x^2 + 6x + 1.$$

Dakle, ako je f polinom n-tog stupnja, onda je f' polinom, i to $(n-1)$-vog stupnja. Dakle, i f' ima derivaciju. Tu derivaciju označavamo sa f'' i zovemo **drugom derivacijom polinoma** f. Druga derivacija polinoma f zove se i **derivacija drugoga reda od** f.

Primjer 15. Za polinom $f(x) = x^8 - x^5 + 4x$ odredite $f''(x)$.

Najprije je

$$f'(x) = 8x^7 - 5x^4 + 4,$$

a zatim i

$$f''(x) = 56x^6 - 20x^3.$$

Kako je f'' polinom, posve je određena i njegova **treća derivacija** $f''' = (f'')'$ i općenito **n-ta derivacija**:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Upotrebljavaju se i nazivi **derivacija trećeg reda** i, općenito, **derivacija n-tog reda**.

Primjer 16. Odredite derivacije polinoma

$$f(x) = x^6 - 2x^5 + x^3 + x - 5.$$

Rješenje. Imamo redom:

$$f'(x) = 6x^5 - 10x^4 + 3x^2 + 1,$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 30x^4 - 40x^3 + 6x,\\
f'''(x) &= 120x^3 - 120x^2 + 6,\\
f^{(4)}(x) &= 360x^2 - 240x,\\
f^{(5)}(x) &= 720x - 240,\\
f^{(6)}(x) &= 720,\\
f^{(7)}(x) &= f^{(8)}(x) = \ldots = 0.
\end{aligned}$$

Derivacija polinoma ima svojstva:

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g', \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad f, g \in \mathbf{R}[x] \tag{1}$$
$$(fg)' = f'g + fg', \quad \forall f, g \in \mathbf{R}[x]; \tag{2}$$
$$(f^k)' = k \cdot f^{k-1} \cdot f', \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad f \in \mathbf{R}[x]. \tag{3}$$

gdje je sa f^k označen produkt $f \cdot f \cdots f$ od k faktora.
Dokažimo (1). Neka je

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{4}$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0. \tag{5}$$

Pretpostavimo, određenosti radi, da je $n \geq m$.
Za $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ odatle slijedi

$$\alpha f + \beta g = \alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + (\alpha a_m + \beta b_m)x^m + \cdots$$
$$\cdots + (\alpha a_1 + \beta b_1)x + (\alpha a_0 + \beta b_0).$$

Prema definiciji derivacije, imamo:

$$(\alpha f + \beta g)' = n\alpha a_n x^{n-1} + (n-1)\alpha a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + m(\alpha a_m + \beta b_m)x^{m-1} + \cdots$$
$$\cdots + (\alpha a_1 + \beta b_1). \tag{6}$$

U drugu ruku je

$$\alpha f' + \beta g' = \alpha(n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1) +$$
$$+\beta(m b_m x^{m-1} + (m-1)b_{m-1}x^{m-2} + \cdots + b_1).$$

Konačno je

$$\alpha f' + \beta g' = n\alpha a_n x^{n-1} + (n-1)\alpha a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + (\alpha a_1 + \beta b_1). \tag{7}$$

Iz (6) i (7) slijedi:

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g',$$

i svojstvo (1) je dokazano.
Dokažimo sada (2). Tu formulu dokazujemo u tri koraka.

1. Za funkcije $f(x) = x^n$ i $g(x) = x^m$ vrijedi:

$$f'(x) = nx^{n-1}, \; g'(x) = mx^{m-1}, \quad \text{a odatle dobivamo:}$$

$$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = nx^{n-1}x^m + x^n m x^{m-1} = (n+m)x^{n+m-1}.$$

Nadalje, iz

$$f(x) \cdot g(x) = x^{n+m} \quad \text{deriviranjem slijedi:}$$
$$(f \cdot g)' = (n+m)x^{n+m-1}, \quad \text{pa dobivamo:}$$
$$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = (f \cdot g)'(x),$$

tj. u ovom posebnom slučaju (2) vrijedi.
2. Neka je polinom f dan sa (4) i neka je $g(x) = x^m$. Tada imamo $(f \cdot g)'(x) = (a_n x^{n+m} + \cdots + a_1 x^{m+1} + a_0 x^m)'$.
Odatle, zbog (1), dobivamo:

$$(f \cdot g)'(x) = (n+m)a_n x^{n+m-1} + \cdots + (m+1)a_1 x^m + m a_0 x^{m-1} =$$
$$= m(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)x^{m-1} + (n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1)x^m =$$
$$= f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x),$$

pa i u ovom posebnom slučaju (2) vrijedi.
3. Neka su f i g dani sa (4) i (5), tada je

$$(fg)(x) = b_m x^m f(x) + \cdots + b_1 x f(x) + b_0 f(x).$$

Sada, zbog (1) i 1. i 2, slijedi:

$$(fg)'(x) = m b_m x^{m-1} f(x) + \cdots + 2b_2 x f(x) + b_1 f(x) +$$
$$+ b_m x^m f'(x) + \cdots + b_1 x f'(x) + b_0 f'(x) =$$
$$= f(x)(m b_m x^{m-1} + \cdots + 2b_2 x + b_1) + f'(x)(b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0) =$$
$$= f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x).$$

Time je (2) dokazano.
Formula (3) slijedi iz (2) totalnom indukcijom. Stavimo li, naime u (2) $f = g$, dobit ćemo

$$(f^2)' = 2f \cdot f',$$

a to je (3) za $k = 2$. Neka je (3) istinito za prirodni broj k. Tada imamo:

$$(f^{k+1})' = (f^k \cdot f)' = (f^k)' f + f^k \cdot f'.$$

Prema pretpostavci indukcije, odatle slijedi:

$$(f^{k+1})' = k \cdot f^{k-1} f' \cdot f + f^k \cdot f' = k \cdot f^k \cdot f' = (k+1) f^k \cdot f',$$

i formula (3) je dokazana.

Primijetimo da derivacijom polinoma f dobijemo polinom f', dakle da je derivacija preslikavanje koje svakom polinomu pridružuje polinom, pa je ovdje posrijedi preslikavanje $D : \mathbf{R}[x] \to \mathbf{R}[x]$ (ili $D : \mathbf{C}[x] \to \mathbf{C}[x]$), koje je definirano formulom $D(f) = f'$. Iz (1), (2) i (3) slijedi da D ima svojstva:

$$\begin{aligned} D(\alpha f + \beta g) &= \alpha D(f) + \beta D(g), \\ D(f \cdot g) &= D(f) \cdot g + f \cdot D(g), \\ D(f^k) &= k \cdot f^{k-1} \cdot D(f). \end{aligned}$$

Pokažimo sada na primjerima kako se primjenjuju pravila (teoremi) (1) – (3).

Primjer 17. Za polinom $f(x) = (x^2+1)(x^3+x^2+1)$ nađite f'.

Rješenje. Primijenivši pravilo (2), dobivamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(x^3+x^2+1) + (x^2+1)(3x^2+2x) = \\ &= 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 4x. \end{aligned}$$

Primjer 18. Odredite derivaciju polinoma

$$f(x) = (2x-1)^3(x^2+x+1).$$

Rješenje. Primjenom (2) i (3) dobivamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(2x-1)^2 \cdot 2 \cdot (x^2+x+1) + (2x-1)^3(2x+1) \\ &= (2x-1)^2(10x^2+6x+5). \end{aligned}$$

Interesantna je veza derivacije polinoma i njegovih višestrukih nultočaka. O tome govori teorem 6.

TEOREM 6. *Ako je α nultočka polinoma f kratnosti $k \geq 2$, onda je α nultočka od f', i to kratnosti $k-1$.*

Dokaz. Ako je α nultočka od f kratnosti k, onda f dopušta prikaz oblika $f(x) = (x-\alpha)^k \cdot q(x)$, gdje je $q(x)$ polinom koji nije djeljiv sa $x - \alpha$, $q(\alpha) \neq 0$. Deriviranjem prethodne jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= k(x-\alpha)^{k-1} \cdot q(x) + (x-\alpha)^k \cdot q'(x) = \\ &= (x-\alpha)^{k-1}[k \cdot q(x) + (x-\alpha) \cdot q'(x)], \end{aligned}$$

pa je α zaista nultočka od f', i to kratnosti $k-1$, jer je $[k \cdot q(x) + (x-\alpha)q'(x)]\,(\alpha) \neq 0$. ■

Odatle neposredno slijedi

TEOREM 7. *α je dvostruka nultočka polinoma f ako je α nultočka polinoma $M(f, f')$, a nije nultočka polinoma f'', tj. $f''(\alpha) \neq 0$.*

Primjer 19. Primjenom Teorema 7 odredite dvostruku nultočku polinoma $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 8x + 4$.

Rješenje. Prema Teoremu 7, dvostruka nultočka od f jest nultočka polinoma $M(f, f')$. Euklidovim algoritmom nalazimo da je $M(f, f') = x - 2$. Dakle, $x = 2$ je bar dvostruka nultočka. No ona je dvostruka zato što nije ujedno nultočka od $f''(x) = 12x^2 - 30x + 18$. ■

Teorem 7 može se poopćiti, tj. α je trostruka nultočka od f ako i samo ako je α nultočka od $M(f, f', f'')$, a nije nultočka od f''', tj. $f'''(\alpha) \neq 0$. Generalizirajte i dokažite! Ovdje pod $M(f, f', f'')$ razumijevamo polinom najvećega mogućega stupnja, koji dijeli polinome f, f' i f''.

Primjer 20. Nađite trostruku nultočku polinoma

$$f(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 2.$$

Rješenje. Derivacije su od f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 8x + 5, \\ f''(x) &= 20x^3 + 24x^2 + 12x + 8. \end{aligned}$$

Nadalje, $M(f, f', f'') = x + 1$, pa je $x = -1$ bar trostruka nultočka. Kako je $f'''(x) \neq 0$, to je $x = -1$ trostruka nultočka. ■

Primjer 21. Pokažite da polinom $f(x) = x^n - 1$ nema višestrukih nultočaka.

Rješenje. Iz $f(x) = x^n - 1$ slijedi: $f'(x) = nx^{n-1}$. f' ima nultočku $x = 0$, ali $x = 0$ nije nultočka od f, dakle f nema višestrukih nultočaka. ■

Primjer 22. Dokažite da polinom $f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ nema višestrukih nultočaka.

Rješenje. Lako se vidi da je $f(x) = f'(x) + \frac{x^n}{n!}$. Pretpostavimo da je α višestruki korijen polinoma $f(x)$. Tada iz $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ slijedi da je $\frac{\alpha^n}{n!} = 0$, a odavde $\alpha = 0$. Međutim, $\alpha = 0$ nije korijen polinoma $f(x)$. ■

Vidjeli smo da se pomoću Hornerova algoritma svaki polinom može razviti po potencijama od od $x - a$. Postoji eksplicitna formula koja daje razvoj polinoma $f \in \mathbf{R}[x]$ n-tog stupnja po potencijama od $x - a$. Ona ima oblik:

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \end{aligned} \qquad (*)$$

Formula $(*)$ zove se **Taylorova formula**. Da bismo dokazali $(*)$, pretpostavimo da f dopušta razvoj oblika:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + a_n(x-a)^n \qquad (**)$$

Direktnim računom odatle slijedi:

$$f(a) = a_0, \quad f'(a) = 1! \cdot a_1, \quad f''(a) = 2! \cdot a_2, \ldots, f^{(n)}(a) = n! \cdot a_n.$$

Odatle pak slijedi:

$$a_0 = f(a), \quad a_1 = \frac{f'(a)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \cdots, a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Ako to uvrstimo u (**), dobivamo (*).

Primjer 23. Polinom $f(x) = x^3 + 1$ razvijte po potencijama od $x + 1$.

Rješenje. Kako je $f(-1) = 0$, $f'(-1) = 3$, $f''(-1) = -6$, $f'''(-1) = 6$, Taylorova formula daje:

$$f(x) = \frac{3}{1!}(x+1) - \frac{6}{2!}(x+1)^2 + \frac{6}{3!}(x+1)^3,$$

odnosno

$$f(x) = 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3.$$

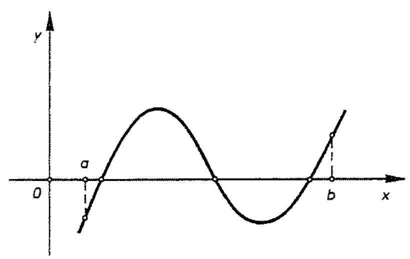
2.3. Osnovni teorem algebre

Ako je zadan polinom $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ sa

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \qquad n \geq 1, \; a_i \in \mathbf{C}$$

$i = 0, 1, \ldots, n$, onda se postavlja pitanje ima li on nultočaka. O tome govori "osnovni teorem algebre" koji kaže da je odgovor pozitivan. Prvi strogi dokaz tog teorema dao je C. F. Gauss 1799, a pridjev "osnovni" je taj teorem dobio još u vrijeme kad su se rješavanja algebarske jednadžbe smatrala glavnim poslom algebraičara pa i matematičara uopće.

Podsjetimo da ne mora svaki realni polinom $f \in \mathbf{R}[x]$ imati realnu nultočku; npr. $f(x) = x^2 + 1$, ali osnovni teorem algebre kaže da svaki kompleksni polinom $f(x) \in \mathbf{C}[x]$ ima (kompleksnu) nultočku. Svi dokazi tog teorema osnivaju se na nekim rezultatima iz matematičke analize. Prvenstveno, svi dokazi koriste činjenicu da je polinom neprekidno preslikavanje.



Sl. 2.

Poznata je i gotovo elementarna ova činjenica iz analize, koja je intuitivno i geometrijski jasna. Ako je $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija i ako je $f(a)f(b) < 0$

(tj. $f(a)$ i $f(b)$ imaju suprotne predznake), onda postoji točka $x_0 \in \langle a, b \rangle$ takva da je $f(x_0) = 0$. Drugim riječima graf funkcije $x \mapsto y = f(x)$ siječe os x između a i b (v. sl. 2). (Ta se činjenica zove Bolzano-Weierstrassov teorem v. S. Kurepa, Matematička analiza II, Tehnička knjiga, Zagreb, 1975; u toj knjizi se može naći i jedan dokaz osnovnog teorema algebre). Dokažimo sada na temelju ove činjenice jedan specijalni slučaj osnovnog teorema algebre. Prvo nam treba ova lema. (Pisat ćemo z umjesto varijable x da naglasimo da je z kompleksan broj.)

LEMA 2 (o modulu najstarijeg člana). *Neka je $f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$ polinom stupnja $n \geq 1$ s kompleksnim koeficijentima. Tada postoji pozitivan broj $r \in \mathbf{R}$ takav da vrijedi*

$$|z| > r \Rightarrow |a_0z^n| > |a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n|.$$

Dokaz. Stavimo $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$ i $r = \frac{M}{|a_0|} + 1$. Ako je $|z| > r \geq 1$, onda slijedi da je $|a_0| > \frac{M}{|z|-1}$. Odavde zbog pravila za računanje s modulima kompleksnih brojeva (v. pogl. I) imamo da je za $|z| > r$:

$$|a_0z^n| = |a_0|\,|z|^n > \frac{M|z|^n}{|z|-1} > \frac{M(|z|^n - 1)}{|z|-1} = M(|z|^{n-1} + \cdots + |z| + 1) \geq$$

$$\geq |a_1|\,|z|^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}|\,|z| + |a_n| = |a_1z^{n-1}| + \cdots + |a_{n-1}z| + |a_0| \geq$$

$$\geq |a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_1|. \; \blacksquare$$

KOROLAR 1. *Neka je f polinom stupnja $n \geq 1$ s realnim koeficijentima. Tada za sve dovoljno velike $x \in \mathbf{R}$ po apsolutnoj vrijednosti, predznak (realnog) broja $f(x)$ podudara se s predznakom najstarijeg člana a_0x^n.*

Dokaz. To slijedi neposredno iz prethodne leme. $\blacksquare$

TEOREM 8. *Polinom f s realnim koeficijentima neparnog stupnja ima bar jednu realnu nultočku.*

Dokaz. Kako je stupanj n polinoma f neparan broj, to vodeći član a_0x^n od f poprima za pozitivne i negativne vrijednosti varijable x različite predznake. Uzmimo sada vrijednosti od x dovoljno velike po apsolutnoj vrijednosti. Prema Korolaru slijedi da tada i $f(x)$ ima različite predznake. Neka je npr. $a_0 > 0$. Neka je r iz Leme 2. Tada je $f(-r) < 0$ a $f(r) > 0$. Kako je f neprekidan, to iz činjenice koju smo naveli prije Leme 2 (Bolzanov teorem), slijedi da postoji $c \in \langle -r, r \rangle$ za koje je $f(c) = 0$. Slično se dokazuje u slučaju $a_0 < 0$. $\blacksquare$

Za dokaz osnovnog teorema algebre, podsjetimo prvo da se svaki kompleksni broj $z \neq 0$ može zapisati (v. pogl. II) kao

$$z = re^{i\varphi}.$$

TEOREM 9 (osnovni teorem algebre). *Svaki polinom* (* * *)

$$f(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$$

stupnja $n \geq 1$ s kompleksnim koeficijentima ima nultočku u $\mathbf{C}$.

Skica dokaza. Možemo očito pretpostaviti da je $a_n = 1$. Neka je $\mu = \inf_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|$. Kako je $f(z) = z^n[1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}]$, to je

$$|f(z)| \geq |z|^n \left[1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|z|^n}\right].$$

Slično kao u dokazu Leme 2 slijedi da postoji realan broj $R > 0$, tako da $|z| > R$ povlači $|f(z)| > \max\{1, 2\mu\}$. Odavde i iz definicije infimuma slijedi da postoji niz točaka (z_k) u krugu $|z| \leq R$ tako da je $0 < |f(z_k)| - \mu < 1/k$, $k \in \mathbb{N}$.

Dokažimo da u $\mathbb{C}$ (zapravo već u tom krugu) postoji točka z_0 za koju je $|f(z_0)| = \mu$. Neka je $z_k = x_k + iy_k$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je $\max\{|x_k|, |y_k|\} \leq |z_k| \leq R$, pa su nizovi realnih brojeva (x_k) i (y_k) omeđeni. No , svaki omeđeni niz ima konvergentni podniz (činjenica iz analize!). Stoga, neka je (x_{k_l}) konvergentni podniz od (x_k), pa onda neka je $(y_{k_{l_m}})$ konvergentni podniz od (y_{k_l}). Tako dobivamo konvergentni niz kompleksnih brojeva $z_{k_{l_m}} = x_{k_{l_m}} + iy_{k_{l_m}}$, čiji je limes $\lim_{m\to\infty} z_{k_{l_m}} = \lim_{m\to\infty} x_{k_{l_m}} + i \lim_{m\to\infty} y_{k_{l_m}} = x_0 + iy_0 = z_0$. Budući da $|z_k| \to |z_0|$ kada $k \to \infty$, slijedi da je $|z_0| \leq R$. Da izbjegnemo nepotrebne trostruke indekse, možemo pretpostaviti da već sam niz (z_k) konvergira. Kako je polinom $f(z)$ neprekidan u točki $z_0 \in \mathbb{C}$ slijedi da je $\lim_{k\to\infty} f(z_k) = f(z_0)$. No tada slijedi da je $|f(z_0)| = \lim_{k\to\infty} |f(z_k)| = \mu$.

Dokažimo da je $\mu = 0$. Pretpostavimo suprotno da je $\mu > 0$. Kako je $f(z_0) \neq 0$, to je $g(z) = \frac{f(z+z_0)}{f(z_0)}$ polinom n-tog stupnja. Očito je $g(0) = 1$ i kako se u točki z_0 dostiže infimum od $|f(z)|$, slijedi da je $|g(z)| = \frac{|f(z+z_0)|}{|f(z_0)|} \geq 1$. Zbog $g(0) = 1$, polinom $g(z)$ je oblika

$$g(z) = 1 + b_k z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \cdots + b_n z^n,$$

gdje je $|b_k| \neq 0$ i $1 \leq k \leq n$. Neka je $b_k = \rho e^{i\psi}$ i neka je $\varphi = \frac{\pi - \psi}{k}$. Tada je $b_k \cdot (e^{i\varphi})^k = \rho e^{i\psi} e^{i(\pi-\psi)} = \rho e^{i\pi} = -\rho = -|b_k|$. Neka je sada $z = re^{i\varphi}$. Tada imamo

$$\begin{aligned}|g(re^{i\varphi})| &\leq |1 + b_k z^k| + (|b_{k+1} z^{k+1}| + \cdots + |b_n z^n|) = \\ &= |1 - r^k |b_k|| + r^{k+1}(|b_{k+1}| + \cdots + |b_n| r^{n-k-1}) = \\ &= 1 - r^k(|b_k| - r|b_{k+1}| - \cdots - r^{n-k}|b_n|) < 1,\end{aligned}$$

gdje je $r > 0$ dovoljno mali broj. No $|g(z)| \geq 1$ za $z \in \mathbb{C}$. To je kontradikcija, pa slijedi da je $\mu = 0$, te stoga $f(z_0) = 0$ ∎

U knjizi A. I. Kostrikin, Vvedenie v algebru, Nauka, Moskva, 1977 može se naći gotovo algebarski dokaz osnovnog teorema algebre, a iz analize se koristi samo Bolzano–Weierstrassov teorem.

Navodimo sada neke posljedice osnovnog teorema algebre.

TEOREM 10. *Svaki polinom $f(x) \in \mathbb{C}[x]$-n-tog stupnja može se na jedinstven način prikazati u obliku produkta n linearnih faktora.*

Točnije, ako je a_0 vodeći koeficijent polinoma f, a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nultočke od f, onda vrijedi

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n).$$

Dokaz. Prema osnovnom teoremu algebre, polinom f ima bar jednu nultočku. Označimo je sa α_1. Prema Bézoutovu teoremu, f je djeljiv sa $g_1(x) = x - \alpha_1$, tj. postoji polinom f_1 takav da vrijedi:

$$f(x) = (x - \alpha_1) f_1(x).$$

Ako je f_1 konstantni polinom, onda je $f_1 = a_0$, a ako je f_1 bar prvog stupnja, onda zaključujemo, opet na temelju osnovnog teorema algebre, da i polinom f_1 ima bar jednu nultočku. Prema Bézoutovu teoremu, postoji rastav:

$$f_1(x) = (x - \alpha_2) \cdot f_2(x).$$

Uvrstimo li f_1 u prethodnu jednakost, dobit ćemo:

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) f_2(x).$$

Nastavljanjem tog postupka slijedi da se f može napisati kao produkt polinoma

$$f_1(x) = x - \alpha_1,\ f_2(x) = x - \alpha_2, \ldots, f_n(x) = (x - \alpha_n) \cdot \beta.$$

Usporedba sa f daje:

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n), \tag{$*$}$$

i postojanje rastava je dokazano.

Dokažimo sada i njegovu jedinstvenost.

Pretpostavimo da osim prikaza $(*)$ postoji i prikaz:

$$f(x) = b_0(x - \beta_1)(x - \beta_2) \ldots (x - \beta_n). \tag{$**$}$$

Prema $(*)$, mora biti:

$$a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) = b_0(x - \beta_1)(x - \beta_2) \ldots (x - \beta_n). \tag{$+$}$$

Kada bi sada nultočka α_i bila različita od svih β_j, $j = 1, \ldots, n$ onda bi $(+)$ za $x = \alpha_i$ lijeva strana bila jednaka nuli, a desna različita od nule. Prema tome, svaki α_i jednak je nekom β_j, i obratno. Stoga je i $b_0 = a_0$.

Treba još vidjeti ovo: ako je α_i k-struka nultočka od $(*)$, onda je i pripadni β_j k-struka nultočka polinoma $(**)$. To se pokazuje kontradikcijom. Pretpostavimo da je α_i k-struka nultočka od $(*)$, a pripadni β_j p-struka nultočka od $(**)$. Kada bi bilo $k > p$, onda bismo dijeljenjem $(+)$ sa $(x - \alpha_i)^k$ dobili jednakost u kojoj je lijeva strana djeljiva sa $x - \alpha_i$, a desna nije. Na isti se način vidi da pretpostavka $k < p$ također vodi kontradikciji. Prema tome je $k = p$ i jednoznačnost rastava je dokazana. ∎

TEOREM 11. *Svaki polinom f stupnja $n \geq 1$ ima točno n nultočaka, ako svaku od njih brojimo onoliko puta kolika je njezina kratnost.*

Dokaz. Ako je α_1 k_1-struka nultočka, α_2 k_2-struka, $\ldots, \alpha_p$ k_p-struka, i ako među nultočkama $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ nema jednakih, tada f možemo napisati ovako:

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot (x-\alpha_2)^{k_2} \ldots (x-\alpha_p)^{k_p}, \qquad (*)$$

pri čemu je $k_1+k_2+\cdots+k_p = n$. Dokazat ćemo da je svaki od brojeva k_i, $i = 1, \ldots, p$ jednak kratnosti nultočke α_i. Pretpostavimo da je kratnost nultočke α_i jednaka m_i. Tada je $k_i \leq m_i$. Kada bi bilo $k_i < m_i$, tada bismo imali:

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{m_i} \cdot \varphi(x),$$

gdje φ ne sadrži faktor $f_i(x) = x - \alpha_i$.

Rastavimo li polinom φ na linearne faktore, te taj rastav uvrstimo u prethodnu jednakost, dobit ćemo rastav od f različit od rastava $(*)$, što je u suprotnosti s Teoremom 10. Prema tome, mora biti $k_i = m_i$, i tvrdnja je dokazana. ■

TEOREM 12. *Ako su polinomi f i g stupnja koji nije veći od n i ako oni imaju jednake vrijednosti u više od n točaka, tada je $f = g$.*

Dokaz. Ako su f i g stupnja koji nije veći od n, onda je njihova razlika $h(x) = f(x) - g(x)$ polinom kojemu stupanj nije veći od n. Kako za $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $m > n$ vrijedi $f(x_1) = g(x_1), \ldots, f(x_m) = g(x_m)$, to su brojevi x_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ nultočke polinoma h, tj. $h(x_i) = 0$, pa bi h imao više od n nultočaka, što je u proturječju s Teoremom 11. ■

Interpolacijski polinom

Neka je u ravnini zadano $n+1$ različitih točaka $T_0(x_0, y_0)$, $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$, $\ldots$, $T_n(x_n, y_n)$, od kojih nikoje dvije nisu na istoj paraleli s osi y. Treba naći polinom f najnižeg mogućeg stupnja takav da je

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \ldots, f(x_n) = y_n,$$

tj. treba naći polinom čiji graf prolazi tim točkama. Ta se zadaća zove **zadaća o interpolaciji.**

Rješenje tog problema dobit ćemo tako da promotrimo posebne položaje točaka $T_0, T_1, \ldots T_n$. Uzmimo sada točke $T_0'(x_0, 0)$, $T_1'(x_1, 0)$, $T_2'(x_2, 0), \ldots, T_{i-1}'(x_{i-1}, 0)$, $T_i'(x_i, 1)$, $T_{i+1}'(x_{i+1}, 0), \ldots, T_n'(x_n, 0)$. Točke T_k', $k \neq i$ jesu projekcije točaka T_k na os x. Nađimo sada polinom f_i koji prolazi tim točkama. Kako su $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ nultočke od f_i, taj polinom, prema Teoremu 10 ima oblik:

$$f_i(x) = c_i(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n).$$

Kako mora biti $1 = f_i(x_i)$, iz prethodne jednakosti slijedi:

$$1 = c_i(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n),$$

a kako je $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$, odatle slijedi:

$$c_i = \frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

Polinom f može se pomoću polinoma f_i napisati ovako:

$$f(x) = y_0 f_0 + \cdots + y_n f_n,$$

tj.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

Lako je vidjeti da je $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Dobiveni polinom zove se **Lagrangeov**[1] **interpolacioni polinom**, a zadane točke su njegovi čvorovi.

Primjer 24. Zadane su točke $T_0 = (-2, -3), T_1 = (1, 3), T_2 = (2, 9)$. Nađite Lagrangeov interpolacioni polinom čiji graf prolazi tim točkama.

Rješenje. I. Promotrimo poseban slučaj: $T_0' = (-2, 1), T_1' = (1, 0), T_2' = (2, 0)$. Kako su T_1' i T_2' nultočke, polinom f_0 ima oblik:

$$f_0(x) = c_0(x-1)(x-2).$$

Kako f_0 mora prolaziti točkom $T_0'(-2, 1)$, mora biti:

$$1 = c_0(-2-1)(-2-2),$$

pa je

$$c_0 = \frac{1}{12}.$$

Dakle, za polinom f_0 dobivamo:

$$f_0(x) = \frac{1}{12}(x^2 - 3x + 2).$$

II. Promotrimo poseban slučaj: $T_0' = (-2, 0), T_1' = (1, 1), T_2' = (2, 0)$. Kako T_0' i T_2' moraju biti nultočke drugog polinoma f_1, mora biti:

$$f_1(x) = c_1(x+2)(x-2).$$

Kako f_1 mora prolaziti točkom T_1', imamo:
$1 = c_1(1+2)(1-2)$, i konačno $c_1 = -\frac{1}{3}$. Dakle, za f_1 dobivamo:

$$f_1(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - 4).$$

III. Za $T_0' = (-2, 0), T_1' = (1, 0), T_2' = (2, 1)$ imamo:

$$f_2(x) = c_2(x+2)(x-1),$$

[1] Joseph Louis Lagrange (1736-1813), francuski matematičar.

i dalje:

$$1 = c_2(2+2)(2-1), \quad \text{dakle} \quad c_2 = \frac{1}{4},$$

pa za f_2 dobivamo:

$$f_2(x) = \frac{1}{4}(x^2 + x - 2).$$

Traženi interpolacioni polinom f ima oblik:

$$f(x) = -3f_0 + 3f_1 + 9f_2.$$

Uvrstimo li ovamo f_0, f_1, f_2, dobit ćemo:

$$f(x) = x^2 + 3x - 1.$$

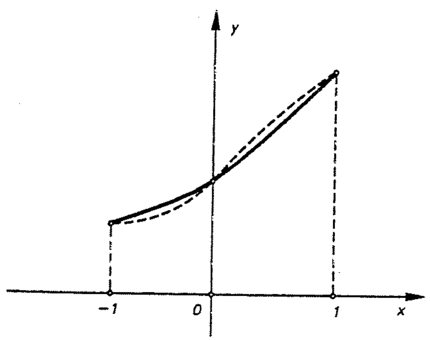
Napomenimo da smo zadatak mogli riješiti i metodom neodređenih koeficijenata. Učinite to! ■

Važnost interpolacionih polinoma sastoji se u tome što se pomoću njih mogu dobro aproksimirati mnoge funkcije, a onda pomoću polinoma približno odrediti vrijednosti tih funkcija.

Primjer 25. Zadana je funkcija $y = 3^x$. Uočimo na grafu te funkcije točke $(-1, \frac{1}{3}), (0,1)$ i $(1,3)$. Polinom f najmanjeg mogućeg stupnja koji prolazi tim točkama dobro aproksimira tu funkciju na intervalu $[-1,1]$. Nađite f i pomoću njega približno odredite $\sqrt[4]{3}$. Taj se f zove Lagrangeov interpolacioni polinom funkcije $y = 3^x$.

Rješenje. Postupkom opisanim u prethodnom primjeru dobivamo:

$$f(x) = 1 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}x^2.$$



Sl. 3.

Da graf tog polinoma dobro aproksimira funkciju $y = 3^x$, vidimo na slici 3. Graf funkcije $y = 3^x$ izvučen je punom linijom, a kvadratnog trinoma f crtkano.

Posebno za $x = \frac{1}{4}$ dobivamo $y = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{33}{24} = 1{,}375$. Dakle, $\sqrt[4]{3} \sim 1{,}375$. Prva vrijednost na šest decimala jest $\sqrt[4]{3} = 1{,}316074$, pa vidimo da se te dvije vrijednosti podudaraju u dvije znamenke. ■

Za računanje po Lagrangeovoj formuli treba očito mnogo zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja (točnije, treba n zbrajanja, $2n^2+2$ oduzimanja, $2n^2+n-1$ množenja i $n+1$ dijeljenja). Međutim, moguće je i poboljšanje. Naime tako da se konstruira polinom $g(x)$

$$g(x) = \alpha_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) + \ldots + \alpha_2(x-x_0)(x-x_1) + \alpha_1(x-x_0) + \alpha_0,$$

gdje su α_i neke konstante koje treba odrediti iz poznatih podataka $(x_0,y_0), (x_1,y_1), \ldots, (x_n,y_n)$. Koeficijent α_k ne ovisi o $x_{k+1},\ldots,x_n$ ili $y_{k+1},\ldots,y_n$. Polinom $g(x)$ je poznat kao **Newtonov interpolacioni polinom**. Jednom kad znamo sve α_i, Newtonov polinom je vrlo pogodan za računanje, jer njegove vrijednosti možemo računati Hornerovim postupkom ovako:

$$g(x) = ((\ldots(\alpha_n(x-x_{n-1}) + \alpha_{n-1})(x-x_{n-2}) + \cdots)(x-x_0) + \alpha_0).$$

Ovo zahtijeva samo n množenja i $2n$ zbrajanja.

Koeficijenti α_k u Newtonovom polinomu mogu se računati metodom "podijeljenih razlika". Za $n = 3$, ta metoda je ova:

$$\begin{array}{llll}
y_0 & & & \\
 & (y_1-y_0)/(x_1-x_0) = y_1' & & \\
y_1 & & (y_2'-y_1')/(x_2-x_0) = y_2'' & \\
 & (y_2-y_1)/(x_2-x_1) = y_2' & & (y_3''-y_2'')/(x_3-x_0) = y_3''' \\
y_2 & & (y_3'-y_2')/(x_3-x_1) = y_3'' & \\
 & (y_3-y_2)/(x_3-x_2) = y_3' & & \\
y_3 & & &
\end{array}$$

Pokazuje se da je $\alpha_0 = y_0$, $\alpha_1 = y_1'$, $\alpha_2 = y_2''$, itd. Stoga sljedećim algoritmom možemo izračunati sve α_i ("$\leftarrow$" čitaj: "postaje").

Počni sa $(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \leftarrow (y_0,y_1,\ldots,y_n)$; tada, za $k = 1,2,\ldots,n$ (u tom poretku), neka $\alpha_j \leftarrow (\alpha_j - \alpha_{j-1})/(x_j - x_{j-k})$ za $j = n, n-1, \ldots, k$ (u tom poretku).

Ova procedura zahtijeva $\frac{1}{2}(n^2+n)$ dijeljenja i n^2+n oduzimanja, pa to spašava oko tri četvrtine posla u ondosu na Lagrangeovu formulu.

Uzmimo da trebamo izračunati vrijednost polinoma $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ u mnogo točaka aritmetičkog niza, tj. želimo izračunati vrijednosti $f(x_0)$, $f(x_0+h)$, $f(x_0+$ $+2h), \ldots, f(x_0+Nh)$. Tada se to računanje može nakon nekoliko prvih koraka (neovisno o N) svesti samo na zbrajanje.

Naime, ako startamo s bilo kojim nizom brojeva $(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, primijenjujemo na taj niz transformaciju

$$\alpha_0 \leftarrow \alpha_0 + \alpha_1, \ \alpha_1 \leftarrow \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} \leftarrow \alpha_{n-1} + \alpha_n.$$

Sa k primjena ove transformacije dobijemo

$$\alpha_j^{(k)} = \binom{k}{0}\beta_j + \binom{k}{1}\beta_{j+1} + \binom{k}{2}\beta_{j+2} + \cdots, \qquad 0 \le j \le n,$$

gdje su β_j početne vrijednosti od α_j, a $\beta_j = 0$ za $j > n$.

Posebno dobivamo

$$\alpha_0^{(k)} = \binom{k}{0}\beta_0 + \binom{k}{1}\beta_1 + \cdots + \binom{k}{n}\beta_n$$

kao polinom stupnja n po k. Vrijednosti β_j se mogu odabrati tako da $\alpha_0^{(k)}$ bude jednako $f(x_0 + kh)$ za sve k. Drugim riječima svako izvršavanje od n zbrajanja gornje transformacije će dati slijedeću vrijednost danog polinoma. Vrijednosti β_j se ovako mogu izračunati. Stavimo $x_j = x_0 + jh$ i promotrimo Newtonov interpolacijski polinom. U metodi "podijeljenih razlika" neka $y_j \leftarrow f(x_j)$ za $0 \le j \le n$. Za $k = 1, 2, \ldots, n$ (u ovom poretku), neka $y_j \leftarrow y_j - y_{j-1}$ za $j = k, k+1, \ldots, n$ (u tom poretku). Tada je $\beta_j = y_j$ za sve j.

2.4. Cjelobrojni i racionalni korijeni algebarske jednadžbe

Jednadžba oblika

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (*)$$

$a_0 \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$ zove se **algebarska jednadžba n-tog stupnja**. Brojevi $a_0, a_1, \ldots, \ldots, a_n$ zovu se **koeficijenti** jednadžbe, a_0 zove se **najstariji koeficijent**, a a_n **slobodni član** te jednadžbe. Ako je $a_0 = 1$, onda za jednadžbu $(*)$ kažemo da je **normirana**.

Broj x_0 zove se **korijen jednadžbe** $(*)$ ako je

$$a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Korisno je algebarskoj jednadžbi $(*)$ pridružiti polinom

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

Svaki korijen jednadžbe $(*)$ jest nultočka tog polinoma, i obrnuto.

k–struku nultočku polinoma f zoveno **k–strukim korijenom** pripadne algebarske jednadžbe.

Prema Teoremu 11, slijedi da *svaka algebarska jednadžba n-tog stupnja ima točno n korijena, računajući svaki od korijena onoliko puta kolika je njegova višestrukost.*

Korijen jednadžbe zove se i **rješenje** te jednadžbe. Pod izrazom riješiti jednadžbu razumijevamo nalaženje svih njezinih korijena i njihovih kratnosti.

Pokazat ćemo sada kako se mogu odrediti cjelobrojni korijeni (ako postoje) jednadžbe s cjelobrojnim koeficijentima. Njih možemo odrediti na osnovi ovog teorema.

TEOREM 13. *Ako su svi koeficijenti algebarske jednadžbe $(*)$ cijeli brojevi, α $(\alpha \neq 0)$ korijen te jednadžbe cijeli broj, onda je α djelitelj njezina slobodnog člana.*

Dokaz. Ako je α korijen jednadžbe $(*)$, onda vrijedi:

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0.$$

Iz te jednakosti slijedi:

$$a_n = -\alpha(a_0\alpha^{n-1} + a_1\alpha^{n-2} + \cdots + a_{n-1}).$$

Izraz u zagradi na desnoj strani te jednakosti jest cijeli broj, pa je α djelitelj od a_n. ■

Pokažimo sada kako se pomoću Teorema 13 određuju cjelobrojni korijeni jednadžbe s cjelobrojnim koeficijentima, ako oni postoje, i kako se nalaze ostali korijeni te jednadžbe.

Primjer 26. Riješite jednadžbu

$$2x^3 - 3x^2 - x - 2 = 0.$$

Rješenje. Najprije nađimo cjelobrojne korijene (ako postoje).
Slobodni član te jednadžbe jednak je -2. Djelitelji slobodnog člana jesu brojevi

$$1,\ -1,\ 2,\ -2.$$

Ako jednadžba ima cjelobrojni korijen, onda je, prema teoremu 13, to jedan od tih brojeva. Označimo sa f toj jednadžbi pridružen polinom, tj.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x - 2,$$

i odredimo $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(-2)$.

Imamo:

$$f(1) = -4,\ f(-1) = -6,\ f(2) = 0,\ f(-2) = -28.$$

Dakle, $x_1 = 2$ jest korijen zadane jednadžbe. Sada je lako naći i ostale korijene te jednadžbe. Kako je $f(2) = 0$, tj. $x_1 = 2$ jest nultočka od f, taj je polinom, prema Bézoutovu teoremu, djeljiv sa $g(x) = x - 2$. Dakle, našu jednadžbu možemo faktorizirati ovako:

$$(x-2)(2x^2 + x + 1) = 0.$$

Preostala dva rješenja ta jednadžbe jesu korijeni jednadžbe

$$2x^2 + x + 1 = 0,$$

dakle:

$$x_2 = \frac{1}{4}(-1 + i\sqrt{7}), \qquad x_3 = \frac{1}{4}(-1 - i\sqrt{7}).$$

Drugih rješenja ta jednadžba nema jer jednadžba trećeg stupnja ima točno tri korijena. ■

Primjer 27. Riješite jednadžbu

$$2x^4 + 13x^3 + 25x^2 + 15x + 9 = 0.$$

Rješenje. Nađimo najprije cjelobrojne korijene ako postoje. Djelitelji slobodnog člana jesu brojevi

$$1, -1, 3, -3, 9, -9.$$

Nalazimo da je $x_1 = -3$ korijen te jednadžbe. Sada jednadžbu možemo faktorizirati ovako:

$$(x+3)(2x^3+7x^2+4x+3)=0.$$

Preostala tri korijena jesu korijeni jednadžbe

$$2x^3+7x^2+4x+3=0.$$

Djelitelji slobodnog člana te jednadžbe jesu brojevi

$$1, -1, 3, -3.$$

Ponovo je $x_2 = -3$ korijen te jednadžbe. Sada jednadžba dopušta ovu faktorizaciju:

$$(x+3)(2x^2+x+1)=0.$$

Preostala rješenja jesu korijeni jednadžbe

$$2x^2+x+1=0.$$

Konačno imamo:

$$x_1 = x_2 = -3 \quad \text{jest dvostruki korijen i} \quad x_{3,4} = \frac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{7}).$$

Osim tih rješenja, jednadžba nema drugih rješenja. ■

Teorem 13 omogućuje nam da utvrdimo da neka algebarska jednadžba nema cjelobrojnih korijena.

Primjer 28. Pokažite da jednadžba $x^3+x^2+x+3=0$ nema cjelobrojnih korijena.

Rješenje. Cjelobrojni korijeni moraju biti faktori slobodnog člana, dakle u obzir kao korijeni te jednadžbe dolaze brojevi

$$1, -1, 3, -3,$$

a kako direktnim uvrštavanjem nalazimo da nijedan od tih brojeva nije korijen jednadžbe, onda zaključujemo, prema teoremu 13, da jednadžba nema cjelobrojnih korijena. ■

Često slobodni član jednadžbe ima mnogo djelitelja pa za mnogo brojeva treba ispitati jesu li oni njezini korijeni. U tom slučaju postupak se može dosta skratiti korištenjem ovog teorema.

TEOREM 14. *Ako je $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ jednadžba s cjelobrojnim koeficijentima i α njezin cjelobrojni korijen, onda je za svaki cijeli broj k broj $f(k)$ djeljiv sa $\alpha - k$.*

Dokaz. Kako je α korijen jednadžbe (po pretpostavci teorema), vrijedi:

$$0 = f(\alpha) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n.$$

Nadalje je

$$f(k) = a_0k^n + a_1k^{n-1} + \cdots + a_{n-1}k + a_n.$$

Oduzimanjem tih jednakosti dobijemo:

$$-f(k) = a_0(\alpha^n - k^n) + a_1(\alpha^{n-1} - k^{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(\alpha - k).$$

Kako je svaki od binoma na desnoj strani te jednakosti djeljiv sa $\alpha - k$, to je i $-f(k)$, pa dakle i $f(k)$, djeljiv sa $\alpha - k$. ■

Primjer 29. Riješite jednadžbu $x^3+3x^2-9x-20=0$.

Rješenje. Cjelobrojni korijeni, ako postoje, jesu faktori slobodnog člana. To su ovi brojevi:

$$1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5, 10, -10, 20, -20.$$

Uzmemo li $k=1$, tada je $f(k) = f(1) = -25$. Ispišimo brojeve $\alpha - k$, tj. $\alpha - 1$:

$$0, -2, 1, -3, 3, -5, 4, -6, 9, -11, 19, -21.$$

Kako $f(1)$ nije djeljiv sa $0, -2, -3, 3, 4, -6, 9, -11, 19, -21$, onda prema Teoremu 14, ako jednadžba ima cjelobrojne korijene, to nije nijedan od brojeva

$$1, -1, -2, 4, 5, -5, 10, -10, 20, -20.$$

Prema tome, kao kandidati za cjelobrojne korijene ostaju brojevi

$$2, -4.$$

Kako je $f(2) = -18$, $f(-4) = 0$, to je $x_1 = -4$ korijen zadane jednadžbe. Prema Bézoutovu teoremu, jednadžbu možemo napisati ovako:

$$(x+4)(x^2-x-5)=0.$$

Dakle, preostali korijeni jesu korijeni jednadžbe

$$x^2-x-5=0,$$

pa je

$$x_2 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{21}), \; x_3 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{21}). \;■$$

Primjer 30. Dokažite jednakost

$$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3.$$

Rješenje. Neka je $x = \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$. Kubiranjem te jednakosti dobijemo:

$$x^3 = 18 + 3\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right),$$

odnosno:

$$x^3 - 3x - 18 = 0.$$

Dakle, broj $x = \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ jest korijen te jednadžbe. Postupkom iz prethodnih primjera nalazimo da jednadžbu možemo napisati ovako:

$$(x-3)(x^2+3x+6)=0,$$

pa je $x_1 = 3$, a preostali korijeni te jednadžbe ujedno su i korijeni jednadžbe

$$x^2 + 3x + 6 = 0.$$

Kako su x_2 i x_3 kompleksni brojevi, slijedi da mora biti:

$$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3. \ \blacksquare$$

Racionalni korijeni algebarske jednadžbe s cjelobrojnim koeficijentima određuju se na osnovi sljedećeg teorema.

TEOREM 15. *Ako je racionalni broj $\alpha = \frac{p}{q}$ (p, q cijeli brojevi i $q \neq 0$) korijen jednadžbe*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

s cjelobrojnim koeficijentima, onda je p djelitelj slobodnog člana a_n i q djelitelj vodećeg koeficijenta a_0.

Dokaz. Ako je $\alpha = \frac{p}{q}$ korijen zadane jednadžbe, onda mora vrijediti:

$$a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0. \Big/ \cdot q^n$$

Odatle je

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \cdots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0,$$

pa imamo

$$a_n q^n = -p(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} q + \cdots + a_{n-1} q^{n-1}).$$

Bez smanjenja općenitosti razmatranja možemo pretpostaviti da su p i q relativno prosti brojevi. U tom slučaju p nije djelitelj od q, pa ni od q^n. Stoga iz prethodne jednakosti zaključujemo da je p djelitelj od a_n.

Na sličan način dokazuje se da je q djelitelj od a_0. $\blacksquare$

Odavde odmah slijede ove posljedice:

KOROLAR 2. *Svaki korijen jednadžbe $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ s cijelim koeficijentima je ili cijeli broj ili iracionalan broj.* $\blacksquare$

KOROLAR 3. *Za $a, n \in \mathbb{N}$, broj $\sqrt[n]{a}$ je ili cijeli ili iracionalan.* $\blacksquare$

Primjer 31. Da li jednadžba $2x^3 - x^2 + 10x - 5 = 0$ ima racionalni korijen? Ako ga ima, nađite ga i riješite jednadžbu.

Rješenje. Djelitelji slobodnog člana jesu $p = \pm 1, \pm 5$, a vodećeg koeficijenta $q = \pm 1, \pm 2$. Ako jednadžba ima racionalni korijen, onda je, prema Teoremu 15, to jedan od ovih brojeva:

$$1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 5,\ -5,\ \frac{5}{2},\ -\frac{5}{2}.$$

teorem 16 i Osnovni teorem algebre

Označimo li $f(x) = 2x^3 - x^2 + 10x - 5 = 0$, nalazimo redom:

$$f(1) = 6,\ f(-1) = -18,\ f(\tfrac{1}{2}) = 0.$$

Dakle, $x_1 = \frac{1}{2}$ jest racionalni korijen. Prema Bézoutovu teoremu, f je djeljiv polinomom $g(x) = x - \frac{1}{2}$, pa f možemo faktorizirati ovako:

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 10) = 0, \quad \text{odnosno;}$$

$$f(x) = (2x-1)(x^2+5) = 0.$$

Ostala rješenja jednadžbe $f(x) = 0$ jesu korijeni jednadžbe $x^2 + 5 = 0$, pa konačno imamo:

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = i\sqrt{5},\ x_3 = -i\sqrt{5}. \ \blacksquare$$

Postupak traženja racionalnih korijena može biti mukotrpan ako slobodni član i vodeći koeficijent imaju mnogo djelitelja. U tom slučaju taj se postupak može dosta skratiti primjenom ovog teorema.

TEOREM 16. *Ako je $\alpha = \frac{p}{q}$ (p i q cijeli brojevi te $q \neq 0$, $M(p,q) = 1$) racionalni korijen jednadžbe*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

s cjelobrojnim koeficijentima, onda je za svaki cijeli broj k broj $p - kq$ djelitelj od $f(k)$.

Dokaz. Analogan je dokazu Teorema 15. Provedite ga sami. $\blacksquare$

ČETVRTAK

2.5. Kompleksni korijeni algebarske jednadžbe

Pokažimo kako se nalaze (ako postoje) korijeni oblika $x_0 = a+bi$, gdje su $a, b \in \mathbb{Z}$ algebarske jednadžbe s cijelim koeficijentima.

Za dokaz teorema koji se primjenjuje za nalaženje korijena potrebna je ova lema:

LEMA 3. *Ako je $x_0 = a+bi$ $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ korijen algebarske jednadžbe $f(x) = 0$ s realnim koeficijentima, onda je $\overline{x}_0 = a - bi$ također korijen te jednadžbe.*

Dokaz. Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdje su a_i realni brojevi. Znamo da je $f(x_0) = 0$. Koristeći pravila za konjugiranje ($\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_1$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$, $\overline{a} = a$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$), izračunajmo $f(\overline{x}_0)$.

$$\begin{aligned} f(\overline{x}_0) &= a_n \overline{x}_0^n + a_{n-1}\overline{x}_0^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{x}_0 + a_0 = \\ &= \overline{a_n x_0^n} + \overline{a_{n-1} x_0^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 x_0} + \overline{a}_0 = \\ &= \overline{a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0} = \overline{f(x_0)} = \overline{0} = 0, \end{aligned}$$

pa je $\overline{x}_0$ također korijen jednadžbe $f(x) = 0$.

Kao drugi dokaz, podijelite f sa $(x - x_0)(x - \overline{x}_0)$ i promotrite ostatak. ∎

Primjer 32. Broj $x_1 = 2+i$ jest korijen jednadžbe $x^4-4x^3+2x^2+12x-15 = 0$. Riješite tu jednadžbu.

Rješenje. Prema lemi je i $x_2 = 2 - i$ korijen te jednadžbe, pa je polinom na lijevoj strani te jednadžbe djeljiv sa

$$[x - (2+i)] \cdot [x - (2-i)] = x^2 - 4x + 5.$$

Stoga jednadžbu možemo ovako faktorizirati:

$$(x^2 - 4x + 5)(x^2 - 3) = 0.$$

Ostala rješenja jesu korijeni jednadžbe $x^2 - 3 = 0$, tj.

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{3}. \ ∎$$

Korijen $\alpha + \beta i$ neke jednadžbe, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \beta \neq 0$, zove se **cjelobrojni kompleksni korijen** te jednadžbe.

TEOREM 17. *Ako je $\alpha + \beta i$ cjelobrojni kompleksni korijen jednadžbe*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

s cjelobrojnim koeficijentima, onda je $\alpha^2 + \beta^2$ djelitelj slobodnog člana a_n.

Dokaz. Ako je $\alpha + \beta i$ korijen zadane jednadžbe, onda je, prema lemi, i $\alpha - \beta i$ korijen te jednadžbe, pa je polinom f djeljiv polinomom

$$g(x) = (x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i),$$

odnosno sa

$$g(x) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$

Dakle, postoji rastav:

$$f(x) = (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)q(x).$$

Označimo li

$$q(x) = b_0x^{n-2} + \cdots + b_{n-2},$$

iz prethodne jednakosti slijedi:

$$a_n = (\alpha^2 + \beta^2)b_{n-2},$$

i tvrdnja je dokazana. ∎

Primjer 33. Ako jednadžba $x^4-8x^3+27x^2-38x+26 = 0$ ima cjelobrojni kompleksni korijen, nađite ga i riješite jednadžbu.

$\alpha^2+\beta^2 \in \{1, 2, 13, 26\}$

Rješenje. Slobodni član je 26 i ima ove pozitivne djelitelje: 1, 2, 13, 26. Prikažimo te brojeve i obliku zbroja kvadrata $\alpha^2 + \beta^2$, $\beta \neq 0$:

$$1 = 0^2 + 1^2,$$
$$2 = 1^2 + 1^2,$$
$$13 = 2^2 + 3^2 = 3^2 + 2^2,$$
$$26 = 1^2 + 5^2 = 5^2 + 1^2.$$

Odatle slijedi: ako ta jednadžba ima kompleksni korijen $\alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \beta \neq 0$, onda je to jedan od ovih brojeva:

$$1, -1,\ 1+i,\ -1+i,\ -1-i,\ 2+3i,\ 2-3i,\ -2+3i,\ -2-3i,\ 3+2i,\ 3-2i,$$

$$-3+2i,\ -3-2i,\ 1+5i,\ 1-5i,\ -1+5i,\ -1-5i,\ 5+i,\ 5-i,\ -5+i,\ -5-i.$$

Provjera pokazuje da

$$x_1 = 1 + i$$

jest korijen zadane jednadžbe. Prema lemi je i $x_2 = 1 - i$ korijen te jednadžbe, pa je polinom na lijevoj strani jednadžbe djeljiv sa

$$g(x) = [x - (1+i)][x - (1-i)]$$
$$= x^2 - 2x + 2.$$

Jednadžbu možemo faktorizirati ovako:

$$(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 6x + 13) = 0,$$

pa su ostali korijeni rješenja jednadžbe

$$x^2 - 6x + 13 = 0,$$

dakle:

$$x_{3,4} = 3 \pm 2i.$$

2.6. Reducibilni i ireducibilni polinomi

Neka je $\mathcal{P}$ neko od polja $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ ili $\mathbb{Q}$. Za polinom f nad poljem $\mathcal{P}$ (tj. njegovi su koeficijenti iz $\mathcal{P}$) kažemo da je **reducibilan** nad $\mathcal{P}$ ako postoje polinomi g i h, st g, st $h \geq 1$ s koeficijentima $\mathcal{P}$ takvi da je $f = g \cdot h$. Ako f nije reducibilan nad $\mathcal{P}$, onda kažemo da je on **ireducibilan** nad $\mathcal{P}$.

Svaki polinom nad $\mathbb{C}$ za kojega je st $f > 1$ reducibilan je nad $\mathbb{C}$. To je neposredna posljedica činjenice da svaki polinom nad $\mathbb{C}$ ima bar jednu nultočku x_0, pa je onda on djeljiv polinomom $g(x) = x - x_0$, odnosno f se može napisati u obliku $f = g \cdot h$, st $h > 1$ i g i h su polinomi nad $\mathbb{C}$.

O polinomima reducibilnima nad $\mathbb{R}$ govori teorem 18.

TEOREM 18. *Ako je f polinom nad $\mathbb{R}$ i f ireducibilan nad $\mathbb{R}$, onda je st $f \leq 2$.*

Dokaz. Neka je f polinom nad $\mathbf{R}$ i neka je st $f \geq 3$. Pokazat ćemo da je f tada reducibilan nad $\mathbf{R}$. Prema osnovnom teoremu algebre, f ima bar jednu nultočku $x_0 \in \mathbf{C}$. Ako je x_0 realna nultočka, onda f dopušta rastav oblika: $f(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$. Iz postupka dijeljenja slijedi da je q polinom nad $\mathbf{R}$, pa je f reducibilan nad $\mathbf{R}$.

Neka je sada $x_0 = \alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$ kompleksna nultočka od f. Prema Lemi 3 je i $\bar{x}_0 = \alpha - \beta i$ nultočka od f, pa f ima rastav oblika:

$$f(x) = (x - x_0)(x - \bar{x}_0) \cdot q(x),$$

tj.

$$f(x) = [x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2)] \cdot q(x),$$

te je i u ovom slučaju f reducibilan nad $\mathbf{R}$. ■

Za nas je posebno interesantna reducibilnost nad poljem $\mathbf{Q}$ racionalnih brojeva.

TEOREM 19. *Ako je f polinom drugog stupnja nad $\mathbf{Q}$, onda je f reducibilan nad $\mathbf{Q}$ ako i samo ako ima bar jednu racionalnu nultočku.*

Dokaz. Neka je $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ polinom drugog stupnja. Neka je x_1 racionalna nultočka od f. Iz Vièteovih[2] formula izlazi da je tada i druga nultočka x_2 od f racionalna. Stoga f dopušta faktorizaciju oblika:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

pa je f reducibilan.

Obrnuto, ako je f reducibilan nad $\mathbf{Q}$, onda je on oblika:

$$f(x) = (Ax + B)(Cx + D),\ AC \neq 0,\ A, B, C, D \in \mathbf{Q}.$$

Odatle slijedi da su $x_1 = -\frac{B}{A}$; $x_2 = -\frac{D}{C}$ racionalne nultočke od f. ■

Također je jednostavan kriterij reducibilnosti nad $\mathbf{Q}$ polinoma trećeg stupnja.

TEOREM 20. *Polinom trećeg stupnja nad $\mathbf{Q}$ reducibilan je nad $\mathbf{Q}$ ako i samo ako ima bar jednu racionalnu nultočku.*

Dokaz. Ako polinom trećeg stupnja nad $\mathbf{Q}$ ima racionalnu nultočku $x_0 = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$, onda f ima rastav oblika:

$$f(x) = \left(x - \frac{p}{q}\right) \cdot q(x).$$

Iz algoritma o dijeljenju polinoma slijedi da je q polinom nad $\mathbf{Q}$. Dakle, f je reducibilan nad $\mathbf{Q}$.

Obrnuto, ako je f reducibilan nad $\mathbf{Q}$, onda on ima rastav oblika:

$$f(x) = (ax + b)(cx^2 + dx + e),\ ac \neq 0,\ a, b, c, d, e \in \mathbf{Q}.$$

[2] François Viète (1540-1630), francuski pravnik, političar i matematičar, poznatiji po svom latiniziranom prezimenu Vieta.

st ≤ 2,

Odatle slijedi da je $x_0 = \frac{p}{q}$ racionalna nultočka od f. ■

Primjer 34. Polinom $f(x) = 2x^3 - x^2 - x - 1$ ireducibilan je nad $\mathbf{Q}$ jer nema racionalnih nultočaka. Provjerite to!

Primjer 35. Polinom $f(x) = 6x^3 - 7x^2 - 2x + 2$ reducibilan je nad $\mathbf{Q}$ jer ima racionalnu nultočku $x_0 = \frac{1}{2}$, pa se dade ovako faktorizirati:

$$g(x) = (2x - 1)(3x^2 - 2x - 2).$$

Primijetimo: ako polinom n-tog stupnja nad $\mathbf{Q}$ ima racionalnu nultočku, onda je on reducibilan nad $\mathbf{Q}$. Nas će stoga zanimati slučaj polinoma koji nema racionalnu nultočku. Pitanje reducibilnosti takvog polinoma četvrtog stupnja ovisi o jednadžbi trećeg stupnja pridruženoj tom polinomu, koju ćemo nazvati rezolventa tog polinoma. Do pojma rezolvente dolazimo pri pokušaju da f prikažemo u obliku razlike kvadrata polinoma drugog stupnja i polinoma prvog stupnja. Primijetimo da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je f normiran, tj. oblika:

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a, b, c, d \in \mathbf{Q}. \tag{1}$$

Pokušajmo sada f prikazati u obliku razlike kvadrata polinoma drugog stupnja i polinoma prvog stupnja. Imamo:

$$f(x) = \left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)^2 - \frac{a^2}{4}x^2 + bx^2 + cx + d = \left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)^2 - \left[\left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d\right].$$

Nadalje, za svaki realni broj y vrijedi:

$$f(x) = \left(x^2 + \frac{a}{2}x + y\right)^2 - \left[\left(\frac{a^2}{4} - b + 2y\right)x^2 + (ay - c)x + y^2 - d\right]. \tag{2}$$

Kvadratni polinom u uglatoj zagradi bit će kvadrat linearnog polinoma ako i samo ako je njegova diskriminanta jednaka nuli, tj. ako vrijedi:

$$(ay - c)^2 = 4\left(\frac{a^2}{4} - b + 2y\right)(y^2 - d). \tag{3}$$

Jednadžba (3) zove se **rezolventa** polinoma (1).

Sada kriterij reducibilnosti polinoma četvrtog stupnja možemo izreći ovako.

TEOREM 21. *Polinom $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + d$ nad poljem $\mathbf{Q}$, koji nema racionalnu nultočku, reducibilan je nad $\mathbf{Q}$ ako i samo ako njegova kubna rezolventa*

$$(ay - c)^2 = 4\left(\frac{a^2}{4} - b + 2y\right)(y^2 - d)$$

ima racionanu nultočku y_0 takvu da su brojevi $\sqrt{\frac{a^2}{4} - b + 2y_0}$, $\sqrt{y_0^2 - d}$ racionalni.

Dokaz. I. Pretpostavimo da rezolventa ima racionalni korijen y_0 takav da su brojevi $\alpha = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + 2y_0}$ i $\beta = \sqrt{y_0^2 - d}$ racionalni. Iz (2) tada slijedi:

$$f(x) = \left(x^2 + \frac{a}{2}x + y_0\right)^2 - (\alpha x + \beta)^2,$$

odnosno:

$$f(x) = \left[x^2 + \left(\frac{a}{2} + \alpha\right)x + y_0 + \beta\right]\left[x^2 + \left(\frac{a}{2} - \alpha\right) + y_0 - \beta\right].$$

Kako su y_0, α i β racionalni, vidimo da je f reducibilan nad $\mathbf{Q}$.

II. Neka je f reducibilan nad $\mathbf{Q}$. Tada je f produkt dvaju polinoma drugog stupnja s koeficijentima iz $\mathbf{Q}$. Uočite da f ne može biti produkt polinoma prvog stupnja i trećeg stupnja jer bi on tada imao racionalnu nultočku. Dakle, f ima rastav oblika:

$$f(x) = (x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2), \quad p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbf{Q}.$$

Odatle slijedi:

$$f(x) = x^4 + (p_1 + p_2)x^3 + (p_1p_2 + q_1 + q_2)x^2 + (p_1q_2 + p_2q_1)x + q_1q_2.$$

Prema teoremu o jednakosti polinoma, odatle slijedi:

$$p_1 + p_2 = a, \quad p_1p_2 + q_1 + q_2 = b, \quad p_1q_2 + p_2q_1 = c, \quad q_1q_2 = d. \tag{4}$$

Pokazat ćemo da je $y_0 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$ racionalna nultočka rezolvente od f i da su brojevi

$$\sqrt{2y_0 + \frac{a^2}{4} - b}, \quad \sqrt{y_0^2 - d}$$

racionalni. Prema (4), imamo:

$$2y_0 + \frac{a^2}{4} - b = (q_1 + q_2) + \frac{(p_1 + p_2)^2}{4} - (p_1p_2 + q_1 + q_2) = \left(\frac{p_1 - p_2}{2}\right)^2, \tag{5}$$

pa je $\sqrt{2y_0 + \frac{a^2}{4} - b}$ racionalni broj. Dalje iz (4) slijedi:

$$y_0^2 - d = \left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right)^2 - q_1q_2 = \left(\frac{q_1 - q_2}{2}\right)^2,$$

pa je i $\sqrt{y_0^2 - d}$ racionalni broj. Pokažimo da je $y_0 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$ nultočka rezolvente. Imamo redom:

$$(ay_0 - c)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} - b + 2y_0\right)(y_0^2 - d) =$$

$$= \left[\frac{1}{2}(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)\right]^2 - 4\left(\frac{p_1 - p_2}{2}\right)^2\left(\frac{q_1 - q_2}{2}\right)^2 = 0. \blacksquare$$

Primijetimo da općeniti kriterij za reducibilnost polinoma višeg stupnja od četiri ne postoji.

Primjer 36. Je li polinom $f(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ reducibilan nad poljem $\mathbf{Q}$?

Rješenje. Pogledajmo najprije da li f ima racionalnu nultočku. Na već opisani način nalazimo da je $x_0 = \frac{1}{2}$ racionalna nultočka od f pa f ima rastav oblika:

$$f(x) = (2x - 1)(x^3 + x^2 - x + 1).$$

dakle reducibilan je nad $\mathbf{Q}$. $\blacksquare$

Primjer 37. Je li polinom $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 2x - 2$ reducibilan nad poljem $\mathbf{Q}$?

Rješenje. Na opisani način nalazimo da f nema racionalnu nultočku, pa ispitujemo rezolventu. Rezolventa od f ima oblik:

$$(3y - 2)^2 = 4\left(2y + \frac{9}{4} + 2\right)(y^2 + 2),$$

odnosno

$$4y^3 + 4y^2 + 14y + 15 = 0.$$

Kako ta jednadžba nema racionalnu nultočku, to je f, prema Teoremu 21, ireducibilan nad $\mathbf{Q}$. $\blacksquare$

Primjer 38. Ispitajte je li polinom $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ reducibilan nad $\mathbf{Q}$.

Rješenje. Rezolventa od f glasi:

$$(2y - 2)^2 = 4(2y + 3)(y^2 - 1),$$

odnosno:

$$(y - 1)(y^2 + 2y + 2) = 0.$$

Racionalni korijen rezolvente jest $y_0 = 1$. Dalje je

$$\sqrt{y_0^2 - d} = 0, \qquad \sqrt{2y_0 + \frac{a^2}{4} - b} = \sqrt{5}.$$

Kako $\sqrt{5}$ nije racionalni broj, f je ireducibilan nad $\mathbf{Q}$. $\blacksquare$

Primjer 39. Ispitajte je li polinom $f(x) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 3x - 5$ reducibilan nad $\mathbf{Q}$.

Rješenje. Rezolventa glasi:

$$(3y - 3)^2 = 4(2y + \frac{9}{4} - 6)(y^2 + 5),$$

odnosno:

$$4y^3 - 12y^2 + 29y - 42 = 0.$$

Rezolventa ima racionalni korijen $y_0 = 2$. Kako su brojevi $\sqrt{2y_0 + \frac{a^2}{4} - b} = \frac{1}{2}$, $\sqrt{y_0^2 - d} = 3$ racionalni, f je reducibilan nad $\mathbf{Q}$.

Rastavimo sada efektivno f na faktore. Primijenit ćemo postupak kojim smo došli do pojma rezolvente. Imamo redom:

$$f(x) = \left(x^2 + \frac{3}{2}x\right)^2 - \frac{9}{4}x^2 + 6x^2 + 3x - 5 =$$
$$= \left(x^2 + \frac{3}{2}x\right)^2 + \frac{15}{4}x^2 + 3x - 5 =$$
$$= \left(x^2 + \frac{3}{2}x + 2\right)^2 - 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) \cdot 2 - 4 + \frac{15}{4}x^2 + 3x - 5 =$$
$$= \left(x^2 + \frac{3}{2}x + 2\right)^2 - \left(\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9\right) =$$
$$= \left(x^2 + \frac{3}{2}x + 2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2 = (x^2 + 2x + 5)(x^2 + x - 1).$$

Primjer 40. Pokažite da polinom $f(x) = x^4 + 1$ nije reducibilan nad poljem $\mathbf{Q}$.
Rješenje. Rezolventa je oblika $y \cdot (y^2 - 1)$ i ona ima racionalne nultočke $y_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y_0 = -1$. Za nultočku $y_0 = 0$ je $\sqrt{y_0^2 - d} = \sqrt{-1} \notin \mathbf{Q}$, za $y_0 = 1$ je $\sqrt{2y_0 + \frac{a^2}{4} - b} = \sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$, a za $y_0 = -1$ je $\sqrt{2y_0^2 + \frac{a^2}{4} - b} = \sqrt{-2} \notin \mathbf{Q}$ pa je f ireducibilan nad $\mathbf{Q}$. Primijetimo da je f reducibilan nad poljem $\mathbf{R}$. To vidimo ovako:

$$f(x) = x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2,$$

dakle

$$f(x) = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1).$$

Često koristan kriterij ireducibilnosti nad $\mathbf{Q}$ daje slijedeći teorem. Podsjetimo da $k|a$ znači da cijeli broj k dijeli a, dok $k \not| a$ znači da k ne dijeli a.

TEOREM 22 (Eisensteinov kriterij ireducibilnosti nad Q). *Neka je $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima. Pretpostavimo da postoji prost broj p takav da $p \not| a_0$, $p|a_1, a_2, \ldots, a_n$, $p^2 \not| a_n$. Tada je f ireducibilan nad $\mathbf{Q}$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je f reducibilan. Tada postoje $g(x), h(x) \in \mathbf{Z}[x]$, st g, st $h \geq 1$, tako da je $f(x) = g(x) \cdot h(x)$. Neka je $g(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1} + \cdots + b_k$, $h(x) = c_0x^m + c_1x^{m-1} + \cdots + c_m$. Tada je $k, m \geq 1$, $k + m = n$. Kako je $b_kc_m = a_n$ djeljiv sa p i nije djeljiv sa p^2, možemo uzeti da je b_k djeljiv sa p, dok c_m nije djeljiv sa p. Neka je b_i prvi koeficijent zdesna u $g(x)$ koji nije djeljiv sa p. Takav koeficijent $b_i (i \geq 0)$ postoji jer $a_0 = b_0c_0$ nije djeljiv sa p. Tada $a_{m+i} = b_ic_m + b_{i+1}c_{m-1} + \cdots$ nije djeljiv sa p jer b_ic_m nije djeljiv sa p, a $b_{i+1}, b_{i+2}, \ldots$ su djeljivi sa p. To je u kontradikciji s pretpostavkom da su svi a_r, $r \geq 1$ djeljivi sa p, jer je $m + i \geq 1$. ∎

Primjer 41. Dokažite da polinomi $f(x) = x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$ i $g(x) = x^5 - 12x^3 + 36x - 12$ nisu reducibilni nad $\mathbf{Q}$.
Rješenje. Za $f(x)$ uzmimo $p = 2$, a za $g(x)$ uzmimo $p = 3$. Tada prema Eisensteinovom kriteriju slijedi da su $f(x)$ i $g(x)$ ireducibilni nad $\mathbf{Q}$. ∎

Primjer 42. Neka je p prost broj, a $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$. Dokažite da je $f(x)$ ireducibilan nad $\mathbf{Q}$.

Rješenje. Primijetimo da je ireducibilnost od $f(x)$ ekvivalentna ireducibilnosti polinoma

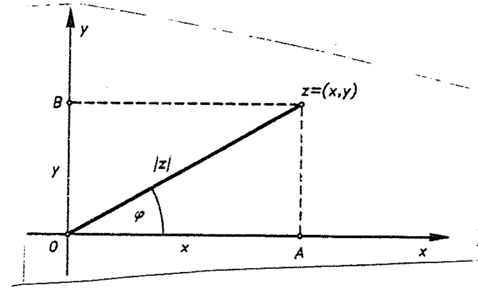
$$f(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{(x+1) - 1} = x^{p-1} + \binom{p}{1}x^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-2}x + \binom{p}{p-1},$$

gdje smo koristili binomnu formulu i binomne koeficijente $\binom{p}{i}$ (v. pogl. I, §4.). Lako se vidi da je $p|\binom{p}{i}$, $i = 1, 2, \ldots, p-1$, pa zbog $\binom{p}{p-1} = p$ tvrdnja slijedi iz Eisensteinovog kriterija. ∎

Trigonometrijski zapis kompleksnog broja i Viéteove formule

Da bismo mogli eksplicitno riješiti jednostavne jednadžbe kao $x^n - 1 = 0$, $x^n + 1 = 0$ itd., potreban nam je trigonometrijski zapis kompleksnog broja. Detaljno će o trigonometrijskim funkcijama biti riječi u pogl. IV.

Svaki kompleksni broj $z = x + iy \neq 0 \, (x, y \in \mathbf{R})$ u kompleksnoj ili Gaussovoj ravnini identificiramo s točkom $Z = (x, y)$. Modul tog kompleksnog broja $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ jednak je udaljenosti točke Z od ishodišta O koordinatnog sustava.



Sl. 4.

Kut (v. pogl. III) za koji moramo zakrenuti pozitivni dio osi x oko O u suprotnom smjeru kretanja kazaljke na satu, tako da zaokrenuti dio osi x padne na polupravac OZ, zove se **argument** kompleksnog broja $Z \neq 0$ i označava se sa φ. Ovom definicijom argument nije jednoznačno određen jer ako je φ kut za koji treba zaokrenuti os x da padne na OZ onda je i zakret za kut $\varphi + 2k\pi$ također argument. Najmanji od svih argumenata $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$ zove se **glavna vrijednost argumenta**. Pisat ćemo $\varphi = \arg z$, ako je φ glavna vrijednost argumenta. Iz pravokutnog trokuta ΔOAZ slijedi (v. pogl. IV):

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{6}$$

Nadalje, iz pravokutnog trokuta ΔOAZ (v. sl. 4) nalazimo da je

$$x = |z|\cos\varphi, \qquad y = |z|\sin\varphi,$$

pa kompleksni broj $z = x + yi$ možemo zapisati ovako:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{7}$$

Ovaj zapis zove se **trigonometrijski zapis kompleksnog broja** z.

Prisjetimo li se još Eulerove formule (v. pogl. II), imamo

$$\boxed{z = |z|e^{i\varphi} = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).}$$

Primjer 43. Odredite trigonometrijski zapis kompleksnih brojeva

$$z_1 = 1 + i$$
$$z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z_3 = 1 - i\sqrt{3}.$$

Rješenje. Najprije je $|z_1| = \sqrt{2}$, $|z_2| = 1$, i $|z_3| = 2$, pa imamo redom:

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ),$$
$$z_2 = \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ,$$
$$z_3 = 2(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ). \blacksquare$$

Pogledajmo sada kako izgledaju operacije množenja, dijeljenja, potenciranja i korjenovanja kompleksnih brojeva zadanih u trigonometrijskom obliku.

Neka su z_1 i z_2 kompleksni brojevi zadani u obliku

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2). \tag{8}$$

Pomnožimo li te jednakosti, dobijemo:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)),$$

a odavde zbog adicionih teorema (v. pogl. IV):

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \tag{9}$$

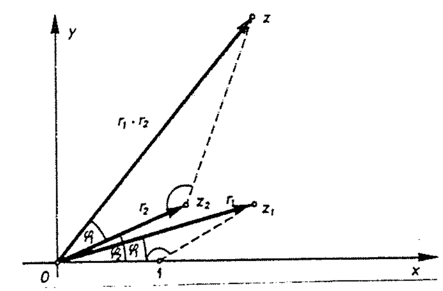
Prema tome, modul produkta $z_1 \cdot z_2$ jednak je produktu modula tih brojeva, a argument je jednak zbroju njihovih argumenata.

Produkt $z_1 \cdot z_2$ može se i geometrijski konstruirati. Neka su z_1 i z_2 zadani grafički kao na slici 5.

Točkom O povucimo poluzraku koja s pozitivnim dijelom realne osi zatvara kut $\varphi_1 + \varphi_2$. Iz točke Z_2 nanesemo kut jednak kutu $\sphericalangle O1Z_1$. Tada drugi krak tog kuta siječe poluzraku u točki Z, koja predočava kompleksni broj $z_1 \cdot z_2$. Zaista, iz sličnosti trokuta $\Delta O1Z_1$ i ΔOZ_2Z (v. pogl. III) slijedi da vrijedi $r_1 : 1 = |OZ| : r_2$, pa je $|OZ| = r_1 \cdot r_2$, i tvrdnja je dokazana.

Slično kao što se iz (8) dobiva (9), pokazuje se da za $\frac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$ vrijedi:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$



Sl. 5.

Dakle, modul kvocijenta dvaju kompleksnih brojeva jednak je kvocijentu njihovih modula, a argument je jednak razlici njigovih argumenata.

Iz (9) slijedi da za kompleksni broj (7) vrijedi:

$$z^2 = |z|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi),$$

i općenito za svaki prirodni n imamo:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{10}$$

Formula (10) zove se **Moivreova[3] formula** za potenciranje i dokazuje se potpunom indukcijom. Dokažimo je!

Za $n = 1$ formula ja ispravna. Pretpostavimo da je ona ispravna za $n = k$, tj. da vrijedi:

$$z^k = |z|^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi).$$

Pomnožimo li tu jednakost sa (7), dobivamo:

$$z^{k+1} = |z|^{k+1}(\cos k\varphi\cos\varphi - \sin k\varphi\sin\varphi) + i(\sin k\varphi\cos\varphi + \cos k\varphi\sin\varphi),$$

odnosno:

$$z^{k+1} = |z|^{k+1}(\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi),$$

pa (10) vrijedi i za $n = k + 1$, dakle (10) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Formula (10) pogodna je za izračunavanje potencija kompleksnih brojeva kojima je eksponent velik. Ilustrirajmo primjenu te formule na dva primjera.

Primjer 44. *Za zadani kompleksni broj $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ izračunajte z^{1985}.*

Rješenje. Napišimo najprije z u trigonometrijskom obliku:

$$z = 1(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ).$$

Moivreova formula daje

$$z^{1985} = \cos 119100^\circ + i\sin 119100^\circ,$$

[3] Abraham D. Moivre (1667-1754), francuski matematičar.

odnosno

$$z^{1985} = \cos 300^\circ + i \sin 300^\circ,$$

i konačno

$$z^{1985} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Primjer 45. Pomoću Moivreove formule izrazite $\cos 3\varphi$ i $\sin 3\varphi$ pomoću $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$.
Rješenje. Promotrimo kompleksni broj

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

očito je $|z| = 1$, pa primjenom formule (10) dobivamo:

$$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3,$$

odnosno:

$$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi).$$

Ta jednakost povlači:

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi, \qquad \sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi. \ ■$$

Ako je $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleksni broj, onda ***n*-tim korijenom** iz z zovemo kompleksni broj $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ takav da je $w^n = z$. Pišemo $w = \sqrt[n]{z}$. Pokazat ćemo da postoji točno n takvih brojeva $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ i da vrijedi:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \tag{11}$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Formula (11) zove se **Moivreova formula za korjenovanje.**

Dokažimo da (11) vrijedi.

Uvjet $w^n = z$, prema (10), daje:

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Iz te jednakosti slijedi:

$$\rho = \sqrt[n]{|z|}, \qquad n\psi = \varphi + 2k\pi, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

odnosno:

$$\rho = \sqrt[n]{|z|}, \qquad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

pa imamo:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right);$$

$k = 0, 1, \ldots$. U toj je formuli sa $\sqrt[n]{|z|}$ označena realna pozitivna vrijednost n-tog korijena iz $|z|$.

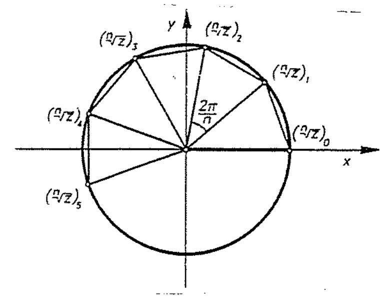
Na prvi pogled čini se da n-ti korijen kompleksnog broja ima beskonačno mnogo vrijednosti. Međutim, nije tako. Iz prethodne formule za $k = 0$ dobivamo kompleksni broj:

$$w_0 = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right), \quad \text{a za} \quad k = n$$

$$w_n = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right)\right),$$

pa su ta dva broja jednaka. Slično se vidi da se isti broj dobiva za $k = 1$ i $k = n+1$ itd. Prema tome, različite vrijednosti n-tog korijena dobivamo za $k = 0, 1, \ldots, n-1$, i time je tvrdnja dokazana. Prema tome, korijeni $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ međusobno su različiti. Umjesto oznake w_k katkad ćemo upotrebljavati oznaku $(\sqrt[n]{z})_k$.

Iz (11) vidimo da su moduli tih brojeva jednaki, tj. točke koje reprezentiraju tih n vrijednosti nalaze se na kružnici polumjera $\sqrt[n]{|z|}$, a kako radijusvektori tih točaka imaju argumente $\frac{\varphi}{n}, \frac{2\varphi}{n}, \ldots$, slijedi da su te točke za $n \geq 3$ vrhovi pravilnog n-terokuta (v. sl. 6).



Sl. 6.

Na slici 6. su vrijednosti n-tog korijena koje se dobivaju za $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ označene sa $(\sqrt[n]{z})_0, (\sqrt[n]{z})_1, \ldots, (\sqrt[n]{z})_{n-1}$.

Pokažimo na primjerima kako se primjenjuje formula (11).

Primjer 46. Treba naći sve vrijednosti od $\sqrt[3]{2}$.
Rješenje. U ovom je slučaju $z = 2$, pa je $|z| = 2, \varphi = 0^\circ, n = 3$, te imamo:

$$(\sqrt[3]{2})_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

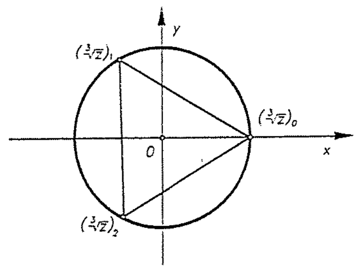
To daje:

$$(\sqrt[3]{2})_0 = \sqrt[3]{2}, \qquad (\sqrt[3]{2})_1 = \sqrt[3]{2}(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ),$$
$$(\sqrt[3]{2})_2 = \sqrt[3]{2}(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ),$$

odnosno:

$$(\sqrt[3]{2})_0 = \sqrt[3]{2}, \qquad (\sqrt[3]{2})_1 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$(\sqrt[3]{2})_2 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Pokažimo dobivene kompleksne brojeve grafički. Vidimo da su tako dobivene tri točke, vrhovi jednakostraničnog trokuta (slika 7).



Sl. 7.

Primjer 47. Riješite jednadžbu $z^4 + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = 0$.

Rješenje. Iz jednadžbe slijedi da su njezina rješenja sve vrijednosti od

$$\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}.$$

U ovom je slučaju

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \qquad |z| = 1, \qquad \varphi = 120°,$$

pa imamo:

$$\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}} = 1 \cdot \left(\cos\frac{120° + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{120° + 2k\pi}{4}\right), \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Dalje slijedi:

$$\left(\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}\right)_0 = \cos 30° + i\sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

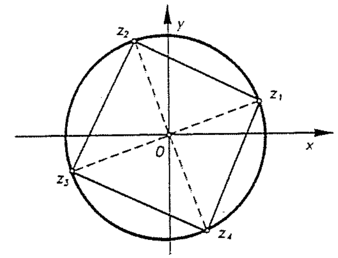
$$\left(\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}\right)_1 = \cos 120° + i\sin 120° = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2},$$

$$\left(\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}\right)_2 = \cos 210° + i\sin 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$$

$$\left(\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}\right)_3 = \cos 300° + i\sin 300° = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Rješenja su jednadžbe, dakle:

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad z_4 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$



Sl. 8.

$x_1 + \dots + x_n = -a_1$

$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots$

$x_2x_3 + \dots$

$x_1x_2x_3 + \dots$

$x_1x_2 \dots x_n = \dots$

Ta rješenja su vrhovi kvadrata upisanoga u kružnicu polumjera 1. (v. sl. 8).

Za rješavanje algebarskih jednadžbi, a i za razne druge svrhe, korisne su Vièteove formule. Vrijedi

TEOREM 23 (F. Viète). *Neka je $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ polinom (nad C), a $x_1, x_2, \dots, x_n$ njegove nultočke. Tada vrijede* **Vièteove formule**

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= -a_1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_{n-1}x_n &= a_2 \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n &= -a_3 \\ &\vdots \\ x_1x_2 \dots x_n &= (-1)^n a_n. \end{aligned} \tag{12}$$

Ako polinom f nije normiran, tj. ako mu je najstariji koeficijent $a_0 \neq 1$, onda na desnim stranama u (12) umjesto a_i treba pisati a_i/a_0.

Dokaz. Polinom f se može napisati kao

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Nakon svih izvršenih množenja, izjednačavanjem koeficijenata slijede Vièteove formule. ■

Primjer 48. Neka su x_1, x_2, x_3 korijeni jednadžbe

$$2x^3 - x^2 + 2x - 5 = 0.$$

Ne rješavajući jednadžbu, izračunajte zbroj recipročnih vrijednosti korijena jednadžbe.

Rješenje. Kako je

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3}{x_1x_2x_3},$$

to prema Vièteovim formulama nalazimo:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 1,$$

$$x_1x_2x_3 = \frac{5}{2},$$

pa konačno imamo:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}. \blacksquare$$

Primjer 49. Neka su $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n (= 1)$ svi n-ti korijeni iz jedinice. Dokažite

a) $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k = 0$; b) $\prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k = (-1)^{n+1}$; slijede iz Vièteovih formula

c) Za $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^p = n$ ako je p djeljiv sa n, a nula inače;

d) $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \varepsilon_k) = n$; e) $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\varepsilon_k} = \frac{n-1}{2}$.

Rješenje. Kako su $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ korijeni jednadžbe $x^n - 1 = 0$, to tvrdnje a) i b) odmah slijede iz Vièteovih formula. Dokažimo c). Stavimo li

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n},$$

onda je $\varepsilon_k = \varepsilon^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Tražena suma je tada

$$S = 1 + \varepsilon^p + \varepsilon^{2p} + \cdots + \varepsilon^{(n-1)p}.$$

Lako se vidi da je $\varepsilon^p = 1$ ako i samo ako n dijeli p. Ako je $\varepsilon^p \neq 1$, onda je

$$S = 1 + \varepsilon^p + \varepsilon^{2p} + \cdots + \varepsilon^{(n-1)p} = \frac{1 - \varepsilon^{np}}{1 - \varepsilon^p} = 0, \text{ jer je } \varepsilon^{np} = (\varepsilon^n)^p = 1.$$

Ako n dijeli p, onda je zbog $\varepsilon^p = 1$, očito $S = n$.
d) Iz $x^n - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\ldots(x-\varepsilon_{n-1})$ slijedi $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = (x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\ldots(x-\varepsilon_{n-1})$. Označimo li taj polinom sa $f(x)$, traženi produkt je $f(1)$, što je očito jednako n.
e) Jednadžba kojoj su korijeni $\varepsilon_1 - 1, \ldots, \varepsilon_{n-1} - 1$ glasi

$$(x+1)^{n-1} + (x+1)^{n-2} + \cdots + (x+1) + 1 = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{(x+1)^n - 1}{x} = 0.$$

Stoga jednadžba kojoj su korijeni $\frac{1}{\varepsilon_1 - 1}, \ldots, \frac{1}{\varepsilon_{n-1} - 1}$ glasi

$$\frac{(\frac{1}{x}+1)^n - 1}{\frac{1}{x}} = 0, \quad \text{tj.} \quad x^{n-1} + \frac{n-1}{2}x^{n-2} + \cdots = 0.$$

Odavde onda tvrdnja slijedi iz Vièteovih formula. $\blacksquare$

2.7. Rješavanje algebarske jednadžbe trećeg i četvrtog stupnja

preskočeno

Opći oblik jednadžbe trećeg reda glasi:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je ona normirana. Supstitucijom

$$x = y - \frac{a}{3}$$

ona poprima oblik

$$y^3 + py + q = 0,$$

gdje je

$$p = b - \frac{1}{3}a^2, \qquad q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c.$$

Jednadžba u kojoj nema kvadratnog člana zove se *kanonski oblik* jednadžbe trećeg stupnja. Vidjeli smo, dakle, da se svaka jednadžba trećeg stupnja dade svesti na kanonski oblik.

Pokazat ćemo sada kako se rješava jednadžba trećeg stupnja ako je ona zadana u kanonskom obliku:

$$x^3 + px + q, \qquad q \neq 0. \tag{1}$$

Rješenje jednadžbe (1) tražimo u obliku:

$$x = u + v \tag{2}$$

gdje su u i v, za sada još neodređeni brojevi. Kako se svaki broj može na beskonačno načina predočiti u obliku zbroja dvaju brojeva, na rastav (2) moći ćemo postaviti još jedan uvjet. Ako je (2) korijen jednadžbe (1), onda je on mora zadovoljavati, tj. mora biti:

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0,$$

odnosno:

$$(3uv + p)(u+v) + (u^3 + v^3 + q) = 0.$$

Odaberimo sada onaj od rastava (2) za koji vrijedi:

$$3uv + p = 0.$$

Ako to uvrstimo u predhodnu jednadžbu, dobivamo:

$$u^3 + v^3 = -q.$$

Problem rješavanja jednadžbe (1) svodi se, dakle, na rješavanje sustava

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ uv &= -\frac{p}{3}, \end{aligned} \tag{3}$$

jer ako su u, v rješenja od (3), onda je, očito, $u+v$ rješenje od (1).
Umjesto sustava (3) promotrimo sustav

$$\begin{aligned} u^3+v^3&=-q\\ u^3v^3&=-\left(\frac{p}{3}\right)^3, \end{aligned} \tag{4}$$

Sustavi (3) i (4) nisu ekvivalentni. Svako rješenje sustava (3) jest rješenje sustava (4), ali svako rješenje sustava (4) ne mora biti rješenje sustava (3). Dakle, sustav (3) možemo riješiti tako da riješimo (4) i uzmemo rješenja od (4) koja su ujedno rješenja od (3), drugim riječima, riješimo (4) i uzmemo ona rješenja od (4) koja zadovoljavaju drugu jednadžbu u (3).

Iz (4), prema Vièteovim formulama, zaključujemo da su u^3 i v^3 korijeni jednadžbe

$$t^2+qt-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0. \tag{5}$$

Odatle je

$$t_{1,2}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Dakle,

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

$$v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Rješenje jednadžbe (1) može se, dakle, predočiti u obliku:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \tag{6}$$

Formula (6) zove se **Cardanova[4] formula.** Kako treći korijen ima tri vrijednosti na prvi pogled se čini da iz (6) slijedi da jednadžba ima 9 rješenja. Međutim, nije tako jer u i v moraju zadovoljavati uvjet $3uv+p=0$, pa imamo samo tri rješenja, što je u skladu s činjenicom da algebarska jednadžba n–tog reda ima točno n korijena.

Primjer 50. Pomoću Cardanove formule riješite jednadžbu

$$x^3+15x+124=0.$$

Rješenje. To je kanonski oblik, pa možemo primijeniti Cardanovu formulu. U našem je slučaju $p=15$, $q=124$, pa imamo:

$$u=\sqrt[3]{-\frac{124}{2}+\sqrt{62^2+5^3}}=\sqrt[3]{1}.$$

[4] Gieronimo Cardano (1501–1576), talijanski matematičar.

Treći korijen ima tri vrijednosti. Označimo ih sa u_1,u_2,u_3. Pomoću Moivreove formule dobivamo:

$$u_1=1,\quad u_2=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2},\quad u_3=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Pripadne v_i određujemo iz

$$3u_i\cdot v_i+p=0,\quad i=1,2,3,$$

tj. iz

$$u_i\cdot v_i=-5.$$

Dobivamo:

$$v_1=-5,\quad v_2=\frac{5}{2}(1+i\sqrt{3}),\quad v_3=\frac{5}{2}(1-i\sqrt{3}).$$

Zbog (2) slijedi:

$$x_i=u_i+v_i,\quad i=1,2,3,$$

tj.

$$x_1=-4,\quad x_2=2+3i\sqrt{3},\quad x_3=2-3i\sqrt{3}. \ \blacksquare$$

Cardanova formula je nespretna za računanje, pa ćemo postupak rješavanja jednadžbe trećeg reda malo modificirati.

Neka je

$$u_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

bilo koja vrijednost korijena i

$$v_1=-\frac{p}{3u_1}.$$

Ako je $\varepsilon=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$ treći korijen jedinice, onda je

$$\varepsilon^2=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2},\ \varepsilon^3=1,\ \varepsilon^4=\varepsilon,\ \varepsilon^5=\varepsilon^2,\ \varepsilon^6=1 \text{ itd.} \tag{7}$$

Tvrdimo da se tada rješenja jednadžbe (1) mogu napisati ovako:

$$x_1=u_1+v_1,\quad x_2=u_1\varepsilon+v_1\varepsilon^2,\quad x_3=u_1\varepsilon^2+v_1\varepsilon. \tag{8}$$

Da je $x_1=u_1+v_1$ korijen te jednadžbe očito je iz postupka pomoću kojega smo izveli Cardanovu formulu. Treba provjeriti da su tada $x_2=u_1\varepsilon+v_1\varepsilon^2$ i $x_3=u_1\varepsilon^2+v_1\varepsilon$ također korijeni te jednadžbe. Provjerimo to za x_2.

Za $x_2=u_1\varepsilon+v_1\varepsilon^2$, uvrštavanjem u (1), dobivamo:

$$(u_1\varepsilon+v_1\varepsilon^2)^3+p(u_1\varepsilon+v_1\varepsilon^2)+q=u_1^3+v_1^3+\varepsilon(u_1+v_1\varepsilon)(3u_1v_1+p)+q=0, \tag{9}$$

jer u_1 i v_1 zadovoljavaju sustav (3).

Dakle, i x_2 je rješenje jednadžbe (1). Na isti se način pokazuje da je i $x_3 = u_1\varepsilon^2 + v_1\varepsilon$ korijen te jednadžbe. Provjerite to! Ako sada u (8) uvrstimo $\varepsilon = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, korijene možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + v_1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}(u_1+v_1) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1), \\ x_3 &= -\frac{1}{2}(u_1+v_1) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1). \end{aligned} \tag{10}$$

Formule (10) znatno pojednostavnjuju rješavanje jednadžbe trećeg stupnja.

Primjer 51. Riješite jednadžbu $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$.

Rješenje. Supstitucijom $x = y + 1$ svodimo jednadžbu na kanonski oblik:

$$y^3 - 3y + 3 = 0.$$

Korijene te jednadžbe označimo sa y_1, y_2, y_3. Sada je $p = -3$, $q = 1$, pa je

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}.$$

Uvedimo oznaku $z = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Tada je $|z| = 1$ i $\arg z = 120°$, pa je jedna od vrijednosti trećeg korijena:

$$u_1 = \cos 40° + i \sin 40°.$$

Iz $u_1 \cdot v_1 = -\frac{p}{3}$ slijedi $v_1 = \frac{1}{u_1}$, pa imamo:

$$v_1 = \cos 40° - i \sin 40°.$$

Odatle, zbog $y_1 = u_1 + v_1$, slijedi $y_1 = 2\cos 40°$, odnosno zbog $x_1 = y_1 + 1$ imamo:

$$x_1 = 1 + 2\cos 40°.$$

Pomoću računala dobivamo:

$$x_1 \approx 2{,}5320888.$$

Zbog (10) je $y_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1)$, odnosno:

$$y_2 = -\cos 40° - \sqrt{3}\sin 40°.$$

Iz $x_2 = y_2 + 1$ slijedi:

$$x_2 = 1 - \cos 40° - \sqrt{3}\sin 40°,$$

tj.

$$x_2 \approx -0{,}8793852.$$

Iz $x_3 = y_3 + 1$ i $x_3 = 1 - \cos 40° + \sqrt{3}\sin 40°$ konačno dobivamo

$$x_3 \approx 1{,}3472964. \ \blacksquare$$

Primjer 52. Riješite jednadžbu $x^3 - 3x - 3 = 0$.

Rješenje. U ovom slučaju je

$$u = \sqrt[3]{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}.$$

Odaberimo za u_1 realnu vrijednost trećeg korijena, tj.

$$u_1 \approx 1{,}3782408.$$

Iz $3u_1v_1 + p = 0$ slijedi $v_1 = \frac{1}{u_1}$, odnosno:

$$v_1 \approx 0{,}7255626.$$

Zbog $x_1 = u_1 + v_1$ dobivamo:

$$x_1 \approx 2{,}1038034.$$

Pomoću druge i treće od formula (10) dobivamo ostala dva rješenja:

$$x_{2,3} \approx -1{,}0519017 \pm i0{,}5652359. \ \blacksquare$$

U Cardanovoj formuli pojavljuje se izraz $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$, koji ima istu ulogu kao i diskriminanta kod kvadratne jednadžbe, pa se zato Δ zove **diskriminanta** jednadžbe (1). Narav korijena ovisi o Δ. O tome govori ovaj teorem.

TEOREM 24. *Neka je Δ diskriminanta jednadžbe trećeg stupnja s realnim koeficijentima. Tada vrijedi:*

1) Ako je $\Delta > 0$, onda jednadžba (1) ima jedan realni i dva konjugirano-kompleksna korijena.

2) Ako je $\Delta = 0$, onda su svi korijeni jednadžbe (1) realni i bar jedan od njih je višestruk.

3) Ako je $\Delta < 0$, onda su svi korijeni jednadžbe (1) realni i različiti.

Dokaz. 1) Neka je $\Delta > 0$. U tom su slučaju korijeni t_1 i t_2 jednadžbe (5) realni i različiti, pa je bar jedan od njih različit od nule. Neka je to, npr., t_1. Neka je $u_1 = \sqrt[3]{t_1}$ ona vrijednost trećeg korijena koja je realna. Tada je v_1 realni broj jer je $3u_1v_1 + p = 0$. Kako je $t_1 \neq t_2$, to je i $u_1^3 \neq v_1^3$, pa je i $u_1 \neq v_1$. Iz formula (10) slijedi da je korijen x_1 realan, a x_2 i x_3 su konjugirano kompleksni.

2) Ako je $\Delta = 0$ i $q \neq 0$, onda je $t_1 = t_2 = -\frac{q}{2} \neq 0$. Neka je $u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ realna vrijednost trećeg korijena. Kako je $u_1v_1 = \frac{p}{3}$ realni broj, to je i $v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, tj. $u_1 = v_1 \neq 0$. Prema (10), zaključujemo da su korijeni:

$x_1 = 2u_1 \neq 0$, $x_2 = x_3 = -u_1$, tj. jednadžba (1) ima tri realna korijena i jedan od njih je dvostruk.

Ako je pak $\Delta = 0$ i $q = 0$, tada je i $p = 0$. U tom slučaju jednadžba (1) ima oblik: $x^3 = 0$, pa je $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

3) Ako je $\Delta < 0$, onda su brojevi $t_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}, t_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}$ konjugirano kompleksni, pa je stoga

$$|t_1| = |t_2| \neq 0 \quad \text{i} \tag{11}$$

$$t_1 \neq t_2. \tag{12}$$

Neka su u_1 i v_1 brojevi takvi da je

$$u_1^3 = t_1, \quad u_1 v_1 = -\frac{p}{3}, \quad v_1^3 = t_2. \tag{13}$$

Iz (11) i (13) slijedi da je $|u_1|^3 = |v_1|^3 \neq 0$ i

$$|u_1| = |v_1| \neq 0. \tag{14}$$

Prema (12) slijedi:

$$u_1 \neq v_1. \tag{15}$$

Iz (13) i (14) slijedi:

$$-\frac{p}{3|u_1|^2} = 1, \tag{16}$$

a na osnovi (13) i (14) zaključujemo:

$$v_1 = \frac{p}{3u_1} = -\frac{p}{3u_1 \cdot \overline{u}_1}\overline{u}_1 = -\frac{p}{3|u_1|^2} = \overline{u}_1. \tag{17}$$

Iz (15) i (17) slijedi da su u_1 i v_1 konjugirano kompleksni brojevi, pa iz (10) zaključujemo da su sva tri korijena, x_1, x_2 i x_3 realna. Treba još pokazati da su oni i različiti. Iz (10) slijedi da je $x_2 \neq x_3$. Pretpostavimo da je $x_1 = x_2$, tada iz (8) slijedi:

$$u_1 + v_1 = u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2, \quad \text{odnosno} \quad u_1(1-\varepsilon) = v_1(\varepsilon^2 - 1),$$

stoga je $u_1 = v_1\varepsilon^2$. Odatle slijedi da je $t_1 = t_2$ i $\Delta = 0$, a to je u proturječju s uvjetom da je $\Delta < 0$. Na isti način se pokazuje da je $x_1 \neq x_2$. ■

U slučaju 3) vidimo da su korijeni, iako je izraz pod trećim korijenom kompleksan, ipak realni i različiti. Taj se slučaj zove *casus ireducibilis*, tj. nesvodljiv slučaj.

Primjer 53. Do otkrića kompleksnih brojeva došlo je ne putem kvadratne jednadžbe, kako bi se to moglo pomisliti, nego preko kubne i to baš preko nesvodljivog slučaja. Pošlo se npr. od jednadžbe $(x+1)(x-1)(x-2) = 0$ za koju znamo da ima tri realna korijena $-1, 1, 2$. Ako se ta jednadžba svede na kanonski oblik supstitucijom $x = y + \frac{2}{3}$, dobiva se

$$y^3 - \frac{7}{3}y + \frac{20}{27} = 0.$$

Prema Cardanovoj formuli je

$$x = \frac{2}{3} + \sqrt[3]{-\frac{10}{27} + \sqrt{-\frac{9161}{729}}} + \sqrt[3]{-\frac{10}{27} - \sqrt{-\frac{9161}{729}}}.$$

Dakle pojavio se drugi korijen iz negativnog broja, a znamo da rezultat mora biti realan, pa je to onda i bio pravi razlog uvođenja kompleksnih brojeva. ■

Navest ćemo sada metodu pomoću koje se može riješiti svaka algebarska jednadžba četvrtog stupnja. Ta se metoda sastoji u tome da se polinom četvrtog reda pridružen jednadžbi rastavi na produkt dvaju polinoma drugog reda na način kako smo to ranije učinili preko rezolvente. Ta se metoda zove **Ferrarijeva**[5] **metoda.** Pokažimo na primjeru kako se to radi.

Primjer 54. Ferrarijevom metodom riješite jednadžbu

$$x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 9 = 0.$$

Rješenje. Toj jednadžbi pridružena rezolventa ima oblik:

$$(2y-6)^2 = 4(2y-4)(y^2-9).$$

Vidimo da je $y_0 = 3$ nultočka rezolvente, pa jednadžbu možemo faktorizirati ovako:

$$(x^2+x)^2 + 4x^2 + 6x + 9 = 0,$$

odnosno:

$$(x^2+x+3)^2 - 6(x^2+x) - 9 + 4x^2 + 6x + 9 = 0,$$

i konačno:

$$(x^2+x+3)^2 - 2x^2 = 0.$$

Dakle, jednadžba se može napisati ovako:

$$(x^2 + (1+\sqrt{2})x + 3)(x^2 + (1-\sqrt{2})x + 3) = 0,$$

pa je ona ekvivalentna s ove dvije kvadratne jednadžbe:

$$x^2 + (1+\sqrt{2})x + 3 = 0, \quad x^2 + (1-\sqrt{2})x + 3 = 0.$$

Rješenja su, dakle:

$$x_{1,2} = -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{9-2\sqrt{2}}}{2},$$
$$x_{3,4} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{9+2\sqrt{2}}}{2}. \ ■$$

Postoje i druge metode rješavanja jednadžbi četvrtog stupnja, ali na ovome mjestu nećemo u to dublje ulaziti.

Do sada smo promatrali algebarske jednadžbe prvog, drugog, trećeg i četvrtog stupnja. Za jednadžbe prvog i drugog stupnja postoje opće formule koje izražavaju njihove korijene pomoću koeficijenata primjenom konačno mnogo operacija zbrajanja, množenja, dijelenja, potenciranja i korjenovanja s cjelobrojnim eksponentom. Takve formule postoje također za algebarske jednadžbe trećeg i četvrtog stupnja. Za jednadžbe trećeg stupnja to je Cardanova formula, a za jednadžbe četvrtog stupnja teoretski se do takve formule može doći Ferrarijevom metodom faktoriziranja polinoma četvrtog stupnja.

[5] Ludovico Ferrari (1522–1565), talijanski matematičar, Cardanov učenik. Ferrarijeva metoda je prva poznata metoda rješavanja jednadžbe četvrtog stupnja i prvi put je publicirana u Cardanovu djelu "Ars Magna" 1548. godine.

Pokazuje se da za algebarske jednadžbe stupnja većeg od četiri takve formule ne postoje. Tu činjenicu prvi je dokazao N. H. Abel[6] i ona se zove **Abelov teorem**. Dokaz Abelova teorema nije elementaran i ne može se provesti sredstvima srednjoškolske matematike, već treba poznavati tzv. Galoisovu[7] teoriju (vidi npr. V. Perić, Algebra II, Svjetlost, Sarajevo, 1982).

2.8. Granice korijena algebarske jednadžbe. Razdvajanje korijena

Za numeričko rješavanje jednadžbi potrebno je znati interval u kojemu leže svi realni korijeni jednadžbe. Krajevi takvog intervala zovu se *granice korijena*. Također je potrebno znati *razdvojiti korijene*, tj. odrediti intervale u kojima jednadžba ima jedinstven realni korijen. O tome kako se određuju interval u kojemu leže svi realni korijeni algebarske jednadžbe govori ovaj teorem.

TEOREM 25. *Svi realni korijeni jednadžbe*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0,$$

za koju je $a_i \in \mathbf{R}$, *za* $i = 0, 1, \ldots, n$ *i* $a_n \neq 0$ *(ako ih on ima), nalaze se u intervalu* $\left[-\left(\frac{a}{|a_n|}+1\right), \frac{a}{|a_n|}+1\right]$, *gdje je* $a = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|\}$.

Dokaz. Neka je a najveći od koeficijenata $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|$. Tada za svaki pozitivni broj x vrijedi:

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0| \geq |a_n|x^n - |a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0| \geq \\ &\geq |a_n| \cdot x^n - |a_{n-1}|x^{n-1} - \ldots - |a_0| \geq \\ &\geq |a_n|x^n - ax^{n-1} - \ldots - ax - a = \\ &= |a_n|x^n - a(1 + x + \ldots + x^{n-1}) = |a_n|x^n - a\frac{x^n-1}{x-1} = \\ &= x^n\left(|a_n| - \frac{a}{x-1}\right) + \frac{a}{x-1}.\end{aligned}$$

Tvrdnju teorema dokazat ćemo tako da pokažemo da realni broj $x > 1 + \frac{a}{|a_n|}$ ne može biti korijen zadane jednadžbe. To se vidi ovako: ako je $x > 1 + \frac{a}{|a_n|}$ onda je $x - 1 > \frac{a}{|a_n|} > 0$. Prema tome, za $x > 1 + \frac{a}{|a_n|}$ oba su člana na desnoj strani nejednakosti pozitivna, pa takav x ne može biti korijen zadane jednadžbe. Slično vrijedi za negativne x. Time je teorem dokazan. ■

Primjer 55. Odredite interval u kojem se nalaze svi realni korijeni jednadžbe

$$3x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 5x - 4.$$

[6] Niels Henrik Abel (1802–1829), norveški matematičar.

[7] Evariste Galois (1811–1832), francuski matematičar. Noć uoči dvoboja u kojem je poginuo, napisao traktat kojim je udario temelje moderne algebre.

Rješenje. U ovom slučaju

$$a = \max\{|3|, |-4|, |7|, |-6|, |5|, |-4|\} = 7.$$

Kako je $a_5 = 3$, to se, prema predhodnom teoremu, svi realni korijeni zadane jednadžbe nalaze u intervalu $\left[-\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right]$. ■

Pogledajmo sada koliko se najviše realnih korijena može imati algebarska jednadžba u zadanom intervalu. Neka je $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ niz realnih brojeva. **Brojem promjena predznaka** tog niza zovemo broj koji nam kaže koliko puta se u tom nizu (čitajući ga u danom poretku) promijenio predznak brojeva od pozitivnoga u negativan i iz negativnoga u pozitivan, zanemarivši nule. Npr., niz $0, 4, -3, 0, -5, 6, 2, -1$ ima tri promjene predznaka. Pokazali smo da za svaki polinom f n-tog stupnja vrijedi ova Taylorova formula:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Odatle za $a = 0$ dobivamo:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

odnosno:

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Prema teoremu o jednakosti polinoma, slijedi:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad \text{za} : k = 0, 1, \ldots, n. \qquad \text{Po definiciji je} \quad 0! = 1.$$

Sada možemo dokazati ovaj teorem.

TEOREM 26 (Budan-Fourierov[8] teorem). *Neka je* f *polinom s realnim koeficijentima stupnja* n. *Za* $c \in \mathbf{R}$ *označimo sa* $\delta(c)$ *broj promjena predznaka u nizu:*

$$f(c), f'(c), \ldots, f^{(n)}(c). \tag{*}$$

Neka $a, b \in \mathbf{R}$ *nisu nultočke od* f. *Tada je broj nultočaka od* f *u intervalu* $[a, b]$ *najviše jednak* $\delta(a) - \delta(b)$. *Točnije, broj nultočaka u* $[a, b]$ *jednak je* $\delta(a) - \delta(b) - 2r$, *za neko cjelobrojno* $r \geq 0$.

Dokaz. Najprije primijetimo da se $\delta(\alpha)$ mijenja samo ako α prolazi kroz nultočku neke od derivacija $f^{(i)}$. Da bismo izračunali broj promjena predznaka, razlikujemo dva slučaja:

[8] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), francuski matematičar i fizičar.

(i) α je nultočka od f kratnosti m. U tom slučaju $f(\alpha) = \ldots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$, $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$. Prema Taylorovoj formuli:

$$f(\alpha+h) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!}h^m + \ldots,$$
$$f'(\alpha+h) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{(m-1)!}h^{m-1} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(m)}(\alpha+h) = f^{(m)}(\alpha) + \ldots.$$

Za dovoljno malo h izrazi napisani na desnim stranama ovih jednakosti dominatni su i ako h prolazi s pozitivnih na negativne vrijednosti, broj promjena predznaka u podnizu $f, f', \ldots, f^{(m)}$ niza (∗) jest m, a taj se broj podudara i s brojem prijeđenih nultočaka.

(ii) α je nultočka kratnosti l neke derivacije $f^{(i)} (i > 0)$, ali nije nultočka od $f^{(i-1)}$. Tada je $f^{(i)}(\alpha) = \ldots = f^{(i+l-1)}(\alpha) = 0, f^{(i+l)}(\alpha) \neq 0$. Kao i u *(i)*, dobivamo l promjena predznaka u podnizu $f^{(i)}, \ldots, f^{(i+l)}$. Nadalje:

$$f^{(i-1)}(\alpha+h) = f^{(i-1)}(\alpha) + \frac{f^{(i+l)}(\alpha)}{(l+1)!}h^{l+1} + \ldots$$
$$f^{(i)}(\alpha+h) = \frac{f^{(i+l)}(\alpha)}{l!}h^l + \ldots$$

Ako je l paran, nikoji od $f^{(i-1)}, f^{(i)}$ ne mijenja predznak, pa je broj promjena l. Ako je l neparan, $f^{(i)}$ mijenja predznak ako $f^{(i-1)}$ ne mijenja, pa postoji i druga promjena predznaka, te ih ukupno ima $l \pm 1$, što je opet paran broj.

Iz *(i)* i *(ii)* slijedi tvrdnja (primijetimo da za isti α ne mogu nastupiti oba slučaja). ■

Sada iz teorema 26 slijedi ovaj

TEOREM 27 (Descartesovo[9] pravilo). *Jednadžba*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$$

s realnim koeficijentima ne može imati više pozitivnih (realnih) korijena nego što iznosi broj promjena predznaka niza $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Broj korijena razlikuje se od broja promjena predznaka za paran broj.

Dokaz. Uzmimo da je $a_n > 0$. Tada je

$$f^{(i)}(x) = n(n-1)\ldots(n-i+1)a_nx^{n-i} + \ldots,$$

i to pokazuje da je $f^{(i)}(x) > 0$ ako je x dovoljno velik. Stoga je za dovoljno velik β, $\delta(\beta) = 0$ i po teoremu 26, nema nultočaka od f većih od β jer je za $\beta' > \beta$,

[9] René Descartes (1596–1650), francuski matematičar, fizičar i filozof.

$\delta(\beta) - \delta(\beta') = 0$. S druge strane, $f^{(i)}(0) = i! \cdot a_i$, pa je $\delta(0)$ broj promjena predznaka niza $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Odatle slijedi tvrdnja. ■

Primjer 56. Polinom $f(x) = x^6 + 3x^5 - 2x^4 - x^3 + 4x - 1$ ima tri promjene predznaka (u nizu svojih koeficijenata) pa ima 1 ili 3 pozitivna korijena. No $f(-x)$ ima također tri promjene predznaka u nizu svojih koeficijenata. Stoga $f(x)$ ima 1 ili 3 negativna korijena. ■

Korijeni algebarske jednadžbe mogu se separirati pomoću Sturmovog teorema. Taj ćemo teorem navesti bez dokaza, jer je dokaz sličan prethodnom.

Pođimo od algebarske jednadžbe $f(x) = 0$. Podijelivši polinom $f(x)$ polinomom $f'(x)$ dobivamo ostatak $r_1(x)$, daljnjim dijeljenjem $f'(x)$ sa $r_1(x)$ dobivamo ostatak $r_2(x)$, dijeljenjem $r_1(x)$ sa $r_2(x)$ ostatak $r_3(x)$, i postupak nastavljamo do ostatka $r_m(x)$, koji je konstanta. Niz funkcija

$$f(x), f'(x), -r_1(x), \ldots, -r_m(x)$$

zove se **Sturmov[10] niz.** Za neki $x = c$ dobivamo niz brojeva:

$$f(c), f'(c), -r_1(c), \ldots, -r_m(c).$$

Označimo sa $\sigma(c)$ broj promjena predznaka u tom nizu. Tada vrijedi

TEOREM 28 (Sturmov teorem). *Ako je $a < b$, onda je $\sigma(a) \geq \sigma(b)$, pri čemu je razlika $\sigma(a) - \sigma(b)$ jednaka broju realnih korijena jednadžbe $f(x) = 0$ u intervalu $\langle a, b \rangle$.*

Primjer 57. Treba razdvojiti korijene jednadžbe $x^3 - 10x + 2 = 0$.

Rješenje. Uočimo da se u Sturmovu nizu broj promjena predznaka ne mijenja ako članove tog niza množimo s pozitivnim brojevima. Iz $f(x) = x^3 - 10x + 2$ slijedi $f'(x) = = 3x^2 - 10$. Dijeljenjem f sa f' dobivamo $r_1(x) = 20x + 6$, a dijeljenjem f' sa $r_1(x)$ dobivamo ostatak $r_2 = -973$. Dakle, Sturmov niz od f glasi:

$$x^3 - 10x + 2, \quad 3x^2 - 10, \quad 20x - 6, \quad 973.$$

Prema prethodnoj napomeni, tom nizu ekvivalentan je niz:

$$x^3 - 10x + 2, \quad 3x^2 - 10, \quad 10x - 3, 1. \qquad (**)$$

Najprije odredimo broj pozitivnih korijena. Prema Teoremu (25), svi se korijeni nalaze u intervalu $[-11, 11]$. Stoga je broj pozitivnih korijena jednak $\sigma(0) - \sigma(11)$. Iz (5) slijedi da je $\sigma(0)$ broj promjena predznaka u nizu 2, −10, 1, tj. $\sigma(0) = = 2$. Analogno iz (∗∗) za $x = 11$ dobivamo $\sigma(11) = 0$. Dakle jednadžba ima 2 pozitivna realna korijena. Kako su svi korijeni te jednadžbe realni, jednadžba ima 1 negativan realni korijen. Želimo li naći relativno nevelik interval nutar kojega se nalazi negativan korijen jednadžbe, uzmimo da je $x = -2$, a kako je $\sigma(-2) = 2 =$

[10] F. Sturm (1803–1855), francuski matematičar. Bavio se matematičkom fizikom.

$= \sigma(0)$, $\sigma(-11) - \sigma(-2) = 1$, negativni je korijen manji od -2. Kako je $\sigma(-4) = 3$, slijedi da se negativni korijen jednadžbe nalazi u intervalu $\langle -4, -2 \rangle$.

Za $x = 5$, nalazimo $\sigma(5) = 0$, tj. oba pozitivna korijena leže u intervalu $\langle 0, 5 \rangle$. Konačno, za $x = 2$ imamo $\sigma(2) = 1$, pa jedan pozitivni korijen leži u intervalu $\langle 0, 2 \rangle$, a drugi u $\langle 2, 5 \rangle$, jer je $\sigma(0) - \sigma(2) = \sigma(2) - \sigma(5) = 1$. ■

PETAK

§ 3. Polinomi dviju i više varijabli

3.1. Prsten polinoma dviju varijabli

Svako preslikavanje $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zadano sa

$$f(x, y) = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + \ldots + f_n(x)y^n, \quad (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \qquad (1)$$

gdje su $f_0, f_1, \ldots, f_n$ polinomi jedne varijable, zove se polinom dviju varijabli (nad $\mathbf{R}$).

Svaki polinom oblika (1) može se napisati u obliku:

$$f(x, y) = g_0(y) + g_1(y)x + g_2(y)x^2 + \ldots + g_m(y)x^m, \quad (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}. \qquad (2)$$

Primjer 1. Preslikavanje zadano formulom

$$f(x, y) = -x^3y^2 + 2xy^3 + 3y^7 + y^3 + 5$$

jest polinom dviju varijabli. Da to pokažemo, napišemo $f(x, y)$ po rastućim potencijama od y:

$$f(x, y) = 5 - x^3y^2 + (2x + 1)y^3 + 3y^7.$$

Ovdje je

$$f_0(x) = 5, \quad f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = -x^3, \quad f_3(x) = 2x + 1,$$
$$f_4(x) = f_5(x) = f_6(x) = 0, \quad f_7(x) = 3,$$

pa je zaista posrijedi polinom. Napišimo sada taj isti polinom u obliku (2), tj. po rastućim potencijama od x:

$$f(x, y) = 5 + y^3 + 3y^7 + 2y^3x - y^2x^3.$$

Ovdje je

$$g_0(y) = 5 + y^3 + 3y^7, \quad g_1(y) = 2y^3, \quad g_2(y) = 0, \quad g_3(y) = -y^2. \ ■$$

Preslikavanje $f(x, y) = ax^my^n$ također je polinom dviju varijabli. Taj se polinom zove **monom**. Realni broj a zove se **koeficijent monoma.** Očito je svaki polinom dviju varijabli jednak zbroju svojih monoma. Koeficijenti tih monoma zovu se

koeficijenti polinoma. Monomi $f(x, y) = ax^my^n, a \neq 0$ i $g(x, y) = bx^my^n, b \neq 0$ zovu se **istoimeni monomi.**

Monom ax^my^n ima **stupanj** m u varijabli x, a stupanj n u varijabli y, dok mu je (ukupni) stupanj $m + n$. **Stupanj polinoma** je maksimalni stupanj svih njegovih ne-nul monoma.

Primjer 2. Polinom $f(x, y) = x^7 + 2x^2y^4 - 3x^3y^5$ ima stupanj 7 u varijabli x, stupanj 5 u varijabli y, a stupanj od f je jednak $3 + 5 = 8$. ■

Polinom $f(x, y) = a$, $a \in \mathbf{R}$ zove se **konstantni polinom** ili **konstanta.**

Skup svih polinoma dviju varijabli s realnim koeficijentima označavamo sa $\mathbf{R}[x, y]$ i zovemo ih **polinomima** nad $\mathbf{R}$. U taj se skup mogu uvesti operacije zbrajanja i množenja, na sličan način kao i za polinome jedne varijable. Zbrajanje i množenje polinoma definira se kao zbrajanje i množenje funkcija.

Neka su npr.

$$f(x, y) = x^3y^2 + xy - 5, \quad g(x, y) = x^4 - 2x^3y^2 - xy + x^2y^3 + 7$$

dva polinoma. Njihovim **zbrojem** zovemo funkciju $f + g$, definiranu sa:

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y), \quad (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}.$$

Neka je sada x_0 proizvoljni realni broj. Tada su $f(x_0, y) = x_0^3y_2 + x_0y - 5$

$$g(x_0, y) = x_0^4 - 2xx_0^3y^2 - x_0y + x_0^2y^3 + 7$$

polinomi jedne varijable, pa je i $(f + g)(x_0, y)$ polinom jedne varijable. Prema definiciji zbrajanja i pravilu zbrajanja za polinome jedne varijable, imamo:

$$\begin{aligned}(f + g)(x_0, y) &= f(x_0, y) + g(x_0, y) = \\ &= x_0^3y^2 + x_0y - 5 + x_0^4 - 2x_0^3y^2 - x_0y + x_0^2y^3 + 7 = \\ &= -x_0^3y^2 + x_0^4 + x_0^2y^3 + 2.\end{aligned}$$

Kako za svaki $x_0 \in \mathbf{R}$ vrijedi:

$$(f + g)(x_0, y) = -x_0^3y^2 + x_0^4 + x_0^2y^3 + 2,$$

to je

$$(f + g)(x, y) = -x^3y^2 + x^4 + x^2y^3 + 2$$

pa se, dakle, *polinomi dviju varijabli zbrajaju tako da se zbroje njihovi istoimeni članovi (monomi). Vidimo, dakle, da je zbroj dvaju polinoma opet polinom.*

Nadalje, u skup polinoma dviju varijabli uvodimo množenje ovako: **produkt polinoma** f i g zove se funkcija $f \cdot g$ određen formulom

$$(f \cdot g)(x, y) = f(x, y) \cdot g(x, y); \ \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

Kao i u slučaju zbrajanja, pokazuje se da se polinomi dviju varijabli *množe tako da se svaki član jednog polinoma pomnoži sa svakim članom drugoga, a dobiveni produkti zbroje. Produkt dvaju polinoma opet je polinom.*

Primjer 3. Za polinome $f(x,y) = x^2+y^2-xy$ i $g(x,y) = y^2+x^2+xy$ odredite $f \cdot g$.

Rješenje. Prema prethodnom pravilu, imamo:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x,y) &= (x^2+y^2-xy)(y^2+x^2+xy) = \\ &= x^2y^2+x^4+x^3y+y^4+x^2y^2+xy^3-xy^3-x^3y-x^2y^2 = \\ &= x^4+x^2y^2+y^4,\end{aligned}$$

dakle slijedi:

$$(f \cdot g)(x,y) = x^4+x^2y^2+y^4. \blacksquare$$

Specijalno, ako je g konstantni polinom, dobivamo pravilo množenja polinoma f konstantom:

Polinom se množi konstantom tako da se svaki član tog polinoma pomnoži konstantom, a dobiveni produkti zbroje.

Za polinom f ćemo polinom $(-1)\cdot f$ označavati sa $-f$. **Razlikom** $f-g$ polinoma f i g zovemo polinom $f+(-g)$.

Kao i kod polinoma jedne varijable, dokazujemo da je $\mathbf{R}[x,y]$ *s obzirom na operacije zbrajanja i množenja prsten s jedinicom.* Jedinica u prstenu je polinom $f(x,y) = 1$, $\forall x,y \in \mathbf{R}$.

Za polinom dviju varijabli možemo uvesti i pojam djeljivosti.

Kažemo da je polinom $f \in \mathbf{R}[x,y]$ **djeljiv polinomom** $g \in \mathbf{R}[x,y]$ ako postoji polinom $h \in \mathbf{R}[x,y]$ takav da je $f = g\cdot h$. Polinom h, ako postoji, zove se **kvocijent polinoma** f i g, označava se sa $f:g$ ili $\frac{f}{g}$, a nalazi se istim postupkom kojim se dijele polinomi jedne varijable. Pokažimo to na primjeru.

Primjer 4. Za polinome $f(x,y) = x^2y-15y^2+6x^4$ i $g(x,y) = 2x^2-3y$ odredite polinom $h = \frac{f}{g}$.

Rješenje. Najprije polinome f i g napišemo po padajućim potencijama od x, a nakon toga provedemo dijeljenje kao kod polinoma jedne varijable. Imamo:

$$\begin{array}{l}(6x^4 \;\; +x^2y \; -15y^2) : (2x^2-3y) = 3x^2+5y \\ \underline{-6x^4 \;\; \mp 9x^2y} \\ \qquad\quad 10x^2y \; -15y^2 \\ \qquad\quad \underline{-10x^2y \; \mp 15y^2} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0\end{array}$$

Dakle,

$$h = \frac{f}{g} = 3x^2+5y. \blacksquare$$

Formalno, konstrukciju prstena $\mathbf{R}[x,y]$ možemo provesti kao i u slučaju prstena polinoma jedne varijable. Podsjetimo da smo rekli da ako je P bilo koji komutativni prsten s jedinicom, da je onda definiran prsten polinoma $P[y]$ s jednom varijablom y. Sada uzmimo da je $P = \mathbf{R}[x]$ prsten polinoma nad $\mathbf{R}$ s varijablom x. Tada možemo definirati prsten polinoma

$$\mathbf{R}[x,y] = (\mathbf{R}[x])[y],$$

čiji su elementi kao što smo vidjeli oblika

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}x^iy^j, \quad a_{ij} \in \mathbf{R} \tag{3}$$

pri čemu podrazumijevamo da a_{ij} komutiraju s x i y (tj. $a_{ij}x = xa_{ij}$, $a_{ij}y = ya_{ij}$) i isto tako da nezavisne varijable x i y međusobno komutiraju (tj. $xy = yx$).

Napomenimo, nadalje da i za polinome dviju varijabli vrijedi teorem analogan teoremu o nulpolinomu. Točnije, polinom f iz (3) je nulpolinom ako i samo ako su svi koeficijenti $a_{ij} = 0$ (dokažite to sami!). Isto tako su dva polinoma $f, g \in \mathbf{R}[x,y]$ jednaka ako i samo ako su im odgovarajući koeficijenti jednaki. Isto tako, za (ukupne) stupnjeve takvih polinoma vrijedi formula st $(f\cdot g) =$ st $f+$ st g. Vrijedi također i analogon teorema dijeljenja s ostatkom. Dokazi svih tih teorema svode se na odgovarajuće teoreme o polinomima s jednom varijablom. Napomenimo također da se kao i u jednoj varijabli mogu promatrati i prstenovi $\mathbf{Z}[x,y]$, $\mathbf{Q}[x,y]$, $\mathbf{C}[x,y]$, kao i $P[x,y]$, gdje je P bilo koji komutativni prsten s jedinicom.

$\sigma_1 = x+y$
$\sigma_2 = xy$

3.2. Simetrični polinomi

Sada ćemo se upoznati s posebnom vrstom polinoma dviju varijabli, sa simetričnim polinomima.

Def.: Polinom $f \in \mathbf{R}[x,y]$ se zove **simetrični polinom**, ako za svako $x,y \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$f(x,y) = f(y,x).$$

Drugim riječima, polinom je simetričan ako se on ne mijenja kada x zamijenimo sa y i y sa x.

Evo nekih primjera simetričnih polinoma. Polinom $f(x,y) = x^3y^2+x^2y^3$ je simetričan jer je $f(y,x) = y^3x^2+y^2x^3 = f(x,y)$.

Polinom $f(x,y) = 4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+x+y$ također je simetričan jer je

$$f(y,x) = 4y^3x+6y^2x^2+4yx^3+y+x = f(x,y).$$

U skupu svih simetričnih polinoma ističu se ova dva jednostavna polinoma:

$$\boxed{f(x,y) \overset{\sigma_1}{=} x+y, \quad g(x,y) \overset{\sigma_2}{=} xy.}$$

Ti polinomi imaju važnu ulogu u teoriji simetričnih polinoma pa stoga imaju posebno ime i oznaku. Zovu se **osnovni (elementarni) simetrični polinomi** i označavaju sa $\sigma_1(x,y)$ i $\sigma_2(x,y)$, dakle

$$\sigma_1(x,y) = x+y, \quad \sigma_2(x,y) = xy.$$

Osim tih polinoma, u teoriji se susrećemo i s polinomima $s_1(x,y) = x+y$, $s_2(x,y) = x^2+y^2$, $s_3(x,y) = x^3+y^3$, općenito, $s_k(x,y) = x^k+y^k$. Mi ćemo te polinome kraće označavati sa $s_1, s_2, \ldots, s_k$.

Ti se polinomi zovu **zbrojevi ili sume potencija ili Newtonovi polinomi**[11].

Postoji jednostavan način dobivanja simetričnih polinoma, koji se sastoji u ovome: uzme se bilo koji polinom (ne mora biti simetričan) u varijablama σ_1 i σ_2, na primjer:

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1^3 + \sigma_1\sigma_2.$$

Izrazimo sada u tom polinomu σ_1 i σ_2 pomoću x i y. Dobit ćemo polinom

$$g(x, y) = (x+y)^3 + (x+y)xy,$$

odnosno

$$g(x, y) = x^3 + 4x^2y + 4xy^2 + y^3,$$

i očito je g simetričan polinom.

Sada se postavlja pitanje mogu li se tim postupkom dobiti *svi* simetrični polinomi. Drugim riječima, možemo li svaki simetrični polinom $f(x, y)$ predočiti u obliku polinoma $g(\sigma_1, \sigma_2)$.

Primjer 5. Provjerite da se Newtonovi polinomi s_1, s_2, s_3 mogu napisati kao polinomi u varijablama σ_1 i σ_2.

Rješenje. Zaista, imamo:

$$s_1 = x + y = \sigma_1;$$
$$s_2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2;$$
$$s_3 = x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2. \ \blacksquare$$

Primjer 6. Pokažite da se simetrični polinom $f(x, y) = 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3$ dade napisati u obliku polinoma u varijablama σ_1 i σ_2.

Rješenje. Imamo redom: $f(x, y) = 2xy(x^2 + y^2) + 3x^2y^2 =$

$$= 2\sigma_2 s_2 + 3\sigma_2^2 = 2\sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + 3\sigma_2^2$$

pa je konačno:

$$f(x, y) = 2\sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_2^2. \ \blacksquare$$

Ti nas primjeri navode na misao da svaki simetrični polinom možemo prikazati u obliku polinoma u varijablama σ_1 i σ_2.

Navedena hipoteza je ispravna. O tome govori ovaj teorem.

TEOREM 1 (**Osnovni teorem o simetričnim polinomima za dvije varijable**). *Za svaki simetrični polinom $f \in \mathbf{R}[x, y]$ postoji jedinstven polinom $h \in \mathbf{R}[x, y]$ takav da je $f(x, y) = h(\sigma_1(x, y), \sigma_2(x, y))$ ili $f(x, y) = h(x + y, xy)$.*

Prvo ćemo dokazati da je osnovni teorem istinit za zbrojeve potencija, tj. za *Newtonove polinome* $s_k = x^k + y^k$, $k \in \mathbf{N}$. To dokazujemo totalnom indukcijom, pri čemu primjenjujemo ovu Newtonovu formulu:

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} \qquad (1)$$

[11] Takve polinome prvi je razmatrao Albert Girard (1629), a detaljnije Newton ("Arithmetica universalis", 1707) pa se po njemu zovu Newtonovi polinomi.

koja vrijedi za sve prirodne brojeve $k > 2$. Dokažimo sada valjanost formule (1). Najprije za svaki $k > 2$ imamo:

$$s_{k-1} = x^{k-1} + y^{k-1}.$$

Pomnožimo li tu jednakost sa $\sigma_1 = x + y$, dobivamo:

$$\sigma_1 s_{k-1} = (x^{k-1} + y^{k-1})(x+y) = x^k + xy^{k-1} + x^{k-1}y + y^k =$$
$$= x^k + y^k + xy(x^{k-2} + y^{k-2}) = s_k + \sigma_2 s_{k-2},$$

a odatle odmah slijedi (1).

Dokažimo sada lemu koja je, u stvari, osnovni teorem za Newtonove polinome.

LEMA 1. *Za svaki Newtonov polinom s_k postoji polinom $f \in \mathbf{R}[x, y]$ takav da je $s_k(x, y) = f(\sigma_1(x, y), \sigma_2(x, y))$, odnosno $s_k(x, y) = f(x + y, xy)$.*

Dokaz. Dokaz provodimo totalnom indukcijom. Najprije, tvrdnja je istinita za $k = 1$ i $k = 2$ jer smo prije pokazali da je $s_1 = \sigma_1$ i $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$.

Pretpostavimo sada da je tvrdnja istinita za polinome s_{k-2} i s_{k-1}, tj da postoje polinomi f_1, $f_2 \in \mathbf{R}[x, y]$ takvi da je

$$s_{k-2} = f_1(\sigma_1, \sigma_2), \quad s_{k-1} = f_2(\sigma_1, \sigma_2).$$

Iz Newtonove formule sada slijedi:

$$s_k = \sigma_1 f_2(\sigma_1, \sigma_2) - \sigma_2 f_1(\sigma_1, \sigma_2).$$

Desna strana je polinom u dvije varijable, dakle s_k možemo napisati u obliku polinoma u varijablama σ_1 i σ_2. $\blacksquare$

Uočimo sada da formula (1) omogućuje da s_k za velike k izrazimo pomoću σ_1 i σ_2. Primjenom te formule dobivamo:

$$s_4 = \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 = \sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) - \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2,$$

i analogno:

$$s_5 = \sigma_1 s_4 - \sigma_2 s_3 = \sigma_1(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) - \sigma_2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) =$$
$$= \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2;$$
$$s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3;$$
$$s_7 = \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3;$$
$$s_8 = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4;$$
$$s_9 = \sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4;$$
$$s_{10} = \sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 - \sigma_2^5.$$

Dokaz osnovnog teorema.

Najprije, svaki polinom dviju varijabli jest zbroj monoma oblika ax^ky^p. Pri tome su moguća samo dva slučaja, tj. pojavljuju se monomi oblika ax^ky^p, $p \neq k$ i bx^ky^k. Uočimo sada u zadanom simetričnom polinomu f monom ax^ky^k. Tada je

$$ax^ky^k = a(xy)^k = a\sigma_2^k,$$

pa se takav član simetričnog polinoma može izraziti pomoću σ_1 i σ_2. Nadalje, u f susrećemo i članove oblika bx^ky^p, $k \neq p$. Ako polinom sadrži takav monom, onda on sadrži i monom oblika bx^py^k, jer inače f ne bi bio simetričan polinom. Prema tome, f kao pribrojnik sadrži polinom

$$g(x,y) = b(x^ky^p + x^py^k).$$

Ako, dakle, pokažemo da se g dade prikazati u obliku polinoma u varijablama σ_1 i σ_2, teorem će biti dokazan. Uvijek možemo pretpostaviti da je $k < p$. Tada imamo:

$$g(x,y) = bx^ky^k(x^{p-k} + y^{p-k}) = b(xy)^k s_{p-k},$$

i konačno:

$$g(x,y) = b\sigma_2^k s_{p-k}.$$

Prema lemi, s_{p-k} se dade napisati u obliku polinoma u varijablama σ_1 i σ_2, pa iz prethodne formule zaključujemo da to vrijedi i za g, čime je teorem dokazan. ∎

Uočite da iz dokaza ovog teorema slijedi da i za simetrični polinom $f \in \mathbf{Z}[x,y]$ postoji jedinstven polinom $h \in \mathbf{Z}[x,y]$ tako da je $f(x,y) = h(\sigma_1,\sigma_2)$.

Važno je uočiti da nam dokaz osnovnog teorema daje i efektivni postupak pomoću kojega možemo zadani simetrični polinom izraziti pomoću σ_1 i σ_2. Pokažimo na primjeru kako se to radi.

Primjer 7. Neka je dan polinom

$$f(x,y) = x^3 + 2x^3y^2 + 3x^2y + 2x^2y^3 + 3xy^2 + y^3.$$

Izrazite f pomoću σ_1 i σ_2.

Rješenje. Uočimo najprije da je f simetričan i njegove članove grupirajmo ovako:

$$f(x,y) = (x^3 + y^3) + (2x^3y^2 + 2x^2y^3) + (3x^2y + 3xy^2).$$

Dalje imamo:

$$f(x,y) = s_3 + 2x^2y^2(x+y) + 3xy(x+y) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_2^2 + 3\sigma_1\sigma_2,$$

i konačno:

$$f(x,y) = \sigma_1^3 + 2\sigma_1\sigma_2^2. \blacksquare$$

3.3. Sustavi simetričnih jednadžbi

Sustav jednadžbi

$$f(x,y) = a, \quad g(x,y) = b,$$

gdje su f i g simetrični polinomi, $a, b \in R$, zove se **sustav simetričnih jednadžbi.** Uređeni par (x_1, y_1) zove se **rješenje** tog sustava ako vrijedi:

$$f(x_1,y_1) = a, \quad g(x_1,y_1) = b.$$

Pokazat ćemo sada na primjerima kako se rješavaju takvi sustavi, tj. nalaze sva njihova rješenja.

Primjer 8. Riješite sustav

$$x^3 + y^3 = 7$$
$$x + y = 1.$$

Rješenje. Najprije simetrične polinome

$$f(x,y) = x^3 + y^3, \quad g(x,y) = x + y$$

izrazimo pomoću σ_1 i σ_2. Dobijemo ovaj sustav:

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 7$$
$$\sigma_1 = 1.$$

Uvrstimo li prvu jednadžbu $\sigma_1 = 1$, dobivamo $\sigma_2 = -2$. Dakle, naš je sustav ekvivalentan sustavu:

$$x + y = 1$$
$$xy = -2.$$

Odatle slijedi da su x i y korijeni jednadžbe (Vièteove formule)

$$z^2 - z - 2 = 0,$$

tj. $z_1 = -1$, $z_2 = 2$, pa su zbog simetrije $(-1, 2)$ i $(2, -1)$ sva rješenja polaznog sustava. ∎

Primjer 9. Riješite sustav

$$x^5 + y^5 = 211$$
$$x + y = 1.$$

Rješenje. Analogno Primjeru 8, nalazimo da se taj sustav može napisati u obliku:

$$\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = 211$$
$$\sigma_1 = 1.$$

Uvrstimo li u prvu jednadžbu $\sigma_1 = 1$, dobivamo za σ_2 jednadžbu:

$$\sigma_2^2 - \sigma_2 - 42 = 0.$$

Odatle za σ_2 imamo $\sigma_2 = 7$ i $\sigma_2 = -6$.

Prema tome, zadani je sustav ekvivalentan sustavima:

$$\begin{aligned} x+y&=1 \\ xy&=7 \end{aligned} \quad \text{i} \quad \begin{aligned} x+y&=1 \\ xy&=-6. \end{aligned}$$

Nalazimo ova četiri rješenja:

$$\left(\frac{1}{2}(1+3i\sqrt{2}), \frac{1}{2}(1-3i\sqrt{3})\right), \left(\frac{1}{2}(1-3i\sqrt{2}), \frac{1}{2}(1+3i\sqrt{3})\right), (3,-2), (-2,3).$$

Primjer 10. Riješite sustav

$$\begin{aligned} x^4+x^2y^2+y^4&=133 \\ x^2+xy+y^2&=7. \end{aligned}$$

Rješenje. Analogno kao i prije dobivamo:

$$\begin{aligned} \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+\sigma_2^2&=133 \\ \sigma_1^2-3\sigma_2&=7. \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe je $\sigma_2=\frac{1}{3}(\sigma_1^2-7)$, pa ako to uvrstimo u prvu jednadžbu, dobijemo $\sigma_1^2=25$. Imamo, dakle, ova dva sustava:

$$\begin{aligned} \sigma_1&=5 \\ \sigma_2&=6 \end{aligned} \quad \text{i} \quad \begin{aligned} \sigma_1&=-5 \\ \sigma_2&=6, \end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} x+y&=6 \\ xy&=6 \end{aligned} \quad \begin{aligned} x+y&=-5 \\ xy&=6. \end{aligned}$$

Odatle dobivamo ova četiri rješenja:

$$(2,3),(3,2),(-2,-3),(-3,-2). \blacksquare$$

Primjer 11. Nađite realne korijene jednadžbe

$$\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8.$$

Rješenje. Stavivši $u=\sqrt[4]{629-x}$, $v=\sqrt{77+x}$, dobivamo:

$$u^4+v^4=706$$

$$u+v=8,$$

dakle sustav simetričnih jednadžbi. Neka je $\sigma_1=u+v$, $\sigma_2=uv$, pa imamo:

$$\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2=706$$

$$\sigma_1=8.$$

Uvrstimo li $\sigma_1=8$ u prvu jednadžbu, dobivamo:

$$\sigma_2^2-128\sigma_2+1695=0,$$

a odatle:

$$\sigma_2=113 \text{ i } \sigma_2=15, \text{ odnosno imamo za } \sigma_1 \text{ i } \sigma_2$$

ove sustave:

$$\begin{aligned} \sigma_1&=8 \\ \sigma_2&=113 \end{aligned} \quad \text{i} \quad \begin{aligned} \sigma_1&=8 \\ \sigma_2&=15, \end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} u+v&=8 \\ uv&=113 \end{aligned} \quad \text{i} \quad \begin{aligned} u+v&=8 \\ uv&=15. \end{aligned}$$

Dakle, u i v su korijeni jednadžbi:

$$z^2-8z+113=0 \text{ i } z^2-8z+15=0.$$

Prva jednadžba nema realnih korijena, a iz druge je $z_1=5$, $z_2=3$, dakle $u_1=5$, $v_1=3$ i $u_2=3$, $v_2=5$.
Sada

$$5=\sqrt[4]{629-x}$$

daje

$$625=629-x$$

pa je

$$x_1=4.$$

Na isti način $3=\sqrt[4]{629-x}$ daje $x_2=548$, i to su sva realna rješenja zadane jednadžbe.
$\blacksquare$

3.4. Rastavljanje simetričnih polinoma na faktore pogledati

Sada ćemo pokazati kako nam osnovni teorem o simetričnim polinomima omogućuje da simetrični polinom četvrtog stupnja rastavimo na faktore.

Primjer 12. Rastavite na faktore nad poljem $\mathbf{Q}$ simetrični polinom

$$f(x,y)=2x^4+x^3y+3x^2y^2+xy^3+2y^4.$$

Rješenje. Izrazimo najprije f pomoću σ_1 i σ_2. Imamo:

$$\begin{aligned} f(x,y)&=2(x^4+y^4)+xy(x^2+y^2)+3x^2y^2 \\ &=2s_4+\sigma_2 s_2+3\sigma_2^2 \\ &=2(\sigma_1^4-4\sigma_1^2+2\sigma_2^2)+\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)+\sigma_2^2. \end{aligned}$$

Konačno imamo:

$$f(x,y)=2\sigma_1^4-7\sigma_1^2\sigma_2+5\sigma_2^2.$$

Dobili smo, dakle, funkciju koja je u varijabli σ_2 kvadratna. Odredit ćemo njene korijene. Imamo:

$$5\sigma_2^2-7\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_1^4=0,$$

odakle slijedi:

$$\sigma_2 = \sigma_1^2 \quad \text{i} \quad \sigma_2 = \frac{2}{5}\sigma_1^2.$$

Dakle,

$$5\sigma_2^2 - 7\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_1^4 = (\sigma_2 - \sigma_1^2)(5\sigma_2 - 2\sigma_1^2),$$

odnosno:

$$f(x,y) = [xy - (x+y)^2][5xy - 2(x+y)^2],$$

i konačno:

$$f(x,y) = (x^2 + xy + y^2)(2x^2 - xy + 2y^2).$$

Lako je vidjeti da se polinomi na desnoj strani ne mogu dalje faktorizirati nad **Q**. ∎

Primjer 13. Rastavite na faktore nad poljem **Q** simetrični polinom $f(x,y) = 3x^4 + 8x^3y + 14x^2y^2 + 8xy^3 + 3y^4$.

Rješenje. Postupkom kao u prethodnom primjeru dobivamo:

$$f(x,y) = 4\sigma_2^2 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 3\sigma_1^4.$$

Kako kvadratna jednadžba (u varijabli σ_2)

$$4\sigma_2^2 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 3\sigma_1^4 = 0$$

ima kompleksne korijene, ne možemo primijeniti metodu koja je iskorištena u prethodnom primjeru. Sada pokušajmo naći rastav ovog oblika:

$$f(x,y) = (Ax^2 + Bxy + Cy^2)(Cx^2 + Bxy + Ay^2). \tag{1}$$

Ta jednakost mora vrijediti za sve $x, y \in \mathbf{R}$.

Posebno za $x = y = 1$ dobivamo:

$$(A + B + C)^2 = 36.$$

Odatle je

$$A + B + C = \pm 6.$$

Primijetimo da su koeficijenti u (1) određeni do na predznak sume $A + B + C$. Stoga bez smanjenja općenitosti možemo uzeti:

$$A + B + C = 6.$$

Sada iz (1) za $x = 1$, $y = -1$ dobivamo:

$$(A - B + C)^2 = 4, \quad \text{odnosno} \quad A + B - C = \pm 2.$$

Napokon za $x = 0$, $y = 1$ dobivamo:

$$AC = 3.$$

Dakle, za A, B, C imamo ovaj sustav:

$$A + B + C = 6$$
$$A - B + C = \pm 2$$
$$AC = 3.$$

Uzmimo da u drugoj varijabli vrijedi predznak +. Tada iz prve dvije jednadžbe zbrajanjem slijedi:

$$A + C = 4,$$

što sa $AC = 3$ daje $A = 1$, $C = 3$, a to, uvršteno u drugu jednadžbu daje $B = 2$. Predznak − u drugoj jednadžbi vodi na kompleksne A, B i C. Dakle, (1) možemo faktorizirati ovako:

$$f(x,y) = (x^2 + 2xy + 3y^2)(3x^2 + 2xy + y^2).$$

Dalja faktorizacija na desnoj strani nad **Q** nije moguća. ∎

Može se pokazati da se simetrični polinom četvrtog stupnja uvijek može faktorizirati na načine iznesene u prethodna dva primjera.

Pokažimo sada na primjerima kako se u nekim posebnim slučajevima mogu faktorizirati simetrični polinomi stupnja različitog od 4.

Primjer 14. Rastavite na faktore nad poljem **Q** simetrični polinom $f(x,y) = (x+y)^5 - x^5 - y^5$.

Rješenje. Izrazimo f pomoću σ_1 i σ_2. Imamo:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sigma_1^5 - s_5 = \sigma_1^5 - (\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2) = \\ &= 5\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2 - \sigma_2) \end{aligned}$$

Dakle, konačno imamo:

$$(x+y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2).$$

Očito, dalja faktorizacija nad **Q** nije moguća. ∎

Primjer 15. Rastavite nad **Q** simetrični polinom

$$f(x,y) = x^6 + yx^5y + x^4y^2 + 2x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x^6 + y^6) + xy(x^4 + y^4) + x^2y^2(x^2 + y^2) + 2x^3y^3 = \\ &= s_6 + \sigma_2 s_4 + \sigma_2^2 s_2 + 2\sigma_2^3 = \\ &= \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 + \sigma_2(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) + \sigma_2^2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + 2\sigma_2^3 = \\ &= \sigma_1^6 - 5\sigma_1^4\sigma_2 + 6\sigma_1^2\sigma_2^2 = \\ &= \sigma_1^2(\sigma_1^4 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 6\sigma_2^2) = \\ &= \sigma_1^2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)(\sigma_1^2 - 3\sigma_2). \end{aligned}$$

Dakle, $f(x,y) = (x+y)^2(x^2 + y^2)(x^2 - xy + y^2)$. ∎

3.5. Simetrične jednadžbe

Za polinom $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jedne varijable zadan formulom

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

kažemo da je **simetričan** ako vrijedi $a_0 = a_n$, $a_1 = a_{n-1}$, $a_2 = a_{n-2}, \ldots, a_{n-k} = a_k$, tj. ako su koeficijenti "jednako udaljeni od krajeva" međusobno jednaki. Očito, f je simetričan polinom ako i samo ako za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi $x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ (dokažite to sami).

Simetričnom polinomu f pridružena jednadžba $f(x) = 0$ zove se **simetrična jednadžba**[12].

Evo nekoliko primjera simetričnih polinoma jedne varijable.

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 2x + 1,$$
$$f(x) = x^n + 1, n \in \mathrm{N},$$
$$f(x) = 3x^8 + 2x^7 - x^6 + 10x^5 + 15x^4 + 10x^3 - x^2 + 2x + 3.$$

Sada ćemo pokazati kako se rješavaju simetrične jednadžbe. Razlikovat ćemo: simetrične jednadžbe parnog i simetrične jednadžbe neparnog stupnja.

a) Simetrične jednadžbe parnog stupnja

pogledati

Takve jednadžbe rješavaju se na osnovi ovog teorema.

TEOREM 2. *Svaki simetrični polinom*

$$f(x) = a_0x^{2k} + a_1x^{2k-1} + \ldots + a_{2k-1}x + a_{2k}$$

parnog stupnja može se predočiti u obliku $f(x) = x^k \cdot h(\sigma)$, *gdje je* h *polinom stupnja* k *u varijabli* $\sigma = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$.

Dokaz. Napišimo f u obliku:

$$f(x) = x^k\left(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{2k-1}\frac{1}{x^{k-1}} + a_{2k}\frac{1}{x^k}\right).$$

Kako je $a_0 = a_{2k}$, $a_1 = a_{2k-1}, \ldots$ imamo:

$$f(x) = x^k\left[a_0\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + a_1\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) + \ldots + a_{k-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_k\right].$$

Da bismo dokazali tvrdnju, dovoljno je dokazati da se funkcije $x \mapsto \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)$ za svaki $k \in \mathrm{N}$ mogu napisati u obliku polinoma u varijabli $\sigma = x + \frac{1}{x}$. Zaista, stavimo li $\frac{1}{x} = y$ dobivamo:

$$x^k + \frac{1}{x^k} = x^k + y^k = s_k.$$

[12] Uočite da svakom simetričnom polinomu $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ jedne varijable možemo pridružiti simetrični polinom $h(x,y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots + a_1xy^{n-1} + a_0y^n$ dviju varijabli.

Kako se svi s_k dadu prikazati pomoću $\sigma_1 = x + y$ i $\sigma_2 = xy$, odnosno pomoću $\sigma_1 = x + \frac{1}{x}$ i $\sigma_2 = 1$, slijedi da se i $x^k + \frac{1}{x^k}$ može napisati u obliku polinoma u varijabli σ. ■

Stavimo li u formulu za s_k $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = 1$, dobijemo:

$$x + \frac{1}{x} = \sigma;$$
$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \sigma^2 - 2;$$
$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \sigma^3 - 3\sigma;$$
$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \sigma^4 - 4\sigma^2 + 2;$$
$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \sigma^5 - 5\sigma^3 + 5\sigma;$$
$$x^6 + \frac{1}{x^6} = \sigma^6 - 6\sigma^4 + 9\sigma^2 - 2 \text{ itd.}$$

Na osnovi Teorema 2, svaka simetrična jednadžba reda $2k$ može se supstitucijom $\sigma = x + \frac{1}{x}$ napisati u obliku:

$$h(\sigma) = 0,$$

gdje je h polinom stupnja k u σ. Nađu li se korijeni σ_1, σ_2 jednadžbe $h(\sigma) = 0$, rješavanje simetrične jednadžbe svodi se na rješavanje k kvadratnih jednadžbi s jednom nepoznanicom.

Primjer 16. Riješite jednadžbu

$$3x^4 - 13x^3 + 16x^2 - 13x + 3 = 0.$$

Rješenje. Imamo redom:

$$x^2\left(3x^2 - 13x + 16 - \frac{13}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 0,$$
$$x^2\left[3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 16\right] = 0.$$

Kako $x = 0$ nije korijen polazne jednadžbe, imamo:

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 16 = 0.$$

Supstitucija $\sigma = x + \frac{1}{x}$ daje:

$$3(\sigma^2 - 2) - 13\sigma + 16 = 0,$$

odnosno:

$$3\sigma^2 - 13\sigma + 10 = 0.$$

Korijeni su te jednadžbe:

$$\sigma = 1 \text{ i } \sigma = \frac{10}{3}.$$

Dakle, polazna je jednadžba ekvivalentna s ove dvije jednadžbe:

$$x+\frac{1}{x}=1, \quad x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3},$$

odnosno:

$$x^2-x+1=0, \quad 3x^2-10x+3=0.$$

Na kraju imamo:

$$x_1=3, \quad x_2=\frac{1}{3}, \quad x_{3,4}=\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3}). \ \blacksquare$$

Primjer 17. Riješite jednadžbu

$$x^6-2x^5+x^4+x^2-2x+1=0.$$

Rješenje. Imamo redom:

$$x^3\left(x^3-2x^2+x+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=0,$$

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0.$$

Stavimo li:

$$x+\frac{1}{x}=\sigma, \quad \text{dobivamo:}$$

$$\sigma^3-3\sigma-2(\sigma^2-2)+\sigma=0,$$

odnosno:

$$\sigma^3-2\sigma^2-2\sigma+4=0.$$

Cjelobrojni korijen te jednadžbe jest $\sigma=2$, pa se ona ovako faktorizira:

$$(\sigma-2)(\sigma^2-2)=0,$$

te imamo:

$$\sigma=2, \quad \sigma=\sqrt{2}, \quad \sigma=-\sqrt{2}.$$

Dakle,

$$x+\frac{1}{x}=2, \quad x+\frac{1}{x}=\sqrt{2}, \quad x+\frac{1}{x}=-\sqrt{2},$$

odnosno:

$$x^2-2x+1=0, \quad x^2-\sqrt{2}x+1=0, \quad x^2+\sqrt{2}x+1=0.$$

Korijeni su zadane jednadžbe:

$$x_{1,2}=1, \quad x_{3,4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i), \quad x_{5,6}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i).$$

b) Simetrične jednadžbe neparnog stupnja

Simetrične jednadžbe neparnog stupnja rješavaju se na osnovu ovog teorema.

TEOREM 3. *Svaki simetrični polinom neparnog stupnja djeljiv je sa $x+1$, a pripadni kvocijent je simetrični polinom parnog stupnja.*

Dokaz. Neka je simetrični polinom neparnog stupnja oblika:

$$f(x)=a_0x^{2k+1}+a_1x^{2k}+a_2x^{2k-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0.$$

Odatle je

$$f(x)=a_0(x^{2k+1}+1)+a_1(x^{2k}+x)+a_2(x^{2k-1}+x^2)+\ldots+a_k(x^{k+1}+x^k),$$

odnosno:

$$f(x)=a_0(x^{2k+1}+1)+a_1x(x^{2k-1}+1)+a_2x^2(x^{2k-3}+1)+\ldots+a_kx^k(x+1).$$

Kako je svaki od binoma

$$x^{2k+1}+1, x^{2k-1}+1, \ldots, x+1$$

djeljiv s $x+1$, to je i $f(x)$ djeljiv sa $x+1$.

Dokazali smo, dakle, da je

$$f(x)=(x+1)\cdot g(x). \qquad (*)$$

Treba vidjeti da je g simetrični polinom parnog stupnja. Kako je f simetričan, vrijedi:

$$x^{2k+1}\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x), \quad \forall x\in\mathbf{R}. \qquad (**)$$

Zamijenimo li sada u $(*)$ x sa $\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, imamo:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot g\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pomnožimo li tu jednadžbu sa x^{2k+1}, dobivamo:

$$x^{2k+1}\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=(1+x)\cdot x^{2k}\cdot g\left(\frac{1}{x}\right).$$

Odatle, zbog $(**)$, slijedi:

$$f(x)=(1+x)x^{2k}\cdot g\left(\frac{1}{x}\right).$$

Podijelimo li tu jednadžbu sa $x+1$, $x\neq -1$, dobivamo:

$$x^{2k}\cdot g\left(\frac{1}{x}\right)=g(x),$$

pa je zaista g simetrični polinom parnog stupnja. $\blacksquare$

Ilustrirajmo sada primjerima kako se rješavaju simetrične jednadžbe neparnog stupnja.

Primjer 18. Riješite jednadžbu

$$2x^3+7x^2+7x+2=0.$$

Rješenje. Tu jednadžbu možemo faktorizirati ovako:

$$2(x^3+1)+7x(x+1)=0,$$
$$(x+1)(2x^2+5x+2)=0.$$

Odatle slijedi:

$$x+1=0,\quad 2x^2+5x+2=0,$$

pa za korijene dobivamo:

$$x_1=-1,\quad x_2=-\frac{1}{2},\quad x_3=-2. \blacksquare$$

Primjer 19. Riješite jednadžbu

$$4x^5+12x^4+11x^3+11x^2+12x+4=0.$$

Rješenje. Najprije grupiramo simetrične članove:

$$4(x^5+1)+12x(x^3+1)+11x^2(x+1)=0,$$

pa imamo:

$$(x+1)[4(x^4-x^3+x^2-x+1)+12x(x^2-x+1)+11x^2]=0.$$

Dakle, $x_1=-1$. Ostali korijeni jesu rješenja jednadžbe

$$4x^4+8x^3+3x^2+8x+4=0.$$

To je simetrična jednadžba četvrtog stupnja. Rješavamo je tako da je najprije podijelimo sa x^2, dakle:

$$4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+8\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0.$$

Supstitucija

$$x+\frac{1}{x}=\sigma \quad \text{daje} \quad 4(\sigma^2-2)+8\sigma+3=0,$$

odnosno:

$$4\sigma^2+8\sigma-5=0.$$

Korijeni te jednadžbe jesu $\sigma=\frac{1}{2}$ i $\sigma=-\frac{5}{2}$, pa su preostala rješenja polazne jednadžbe korijeni ovih jednadžbi:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2},\quad x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2},$$

odnosno:

$$2x^2-x+2=0,\quad 2x^2+5x+2=0.$$

Konačno je

$$x_{2,3}=\frac{1}{4}(1\pm i\sqrt{15}),\quad x_4=-\frac{1}{2}, x_5=-2. \blacksquare$$

Primjer 20. Riješite jednadžbu

$$x^7-2x^6+3x^5-x^4-x^3+3x^2-2x+1=0.$$

Rješenje. Odmah je $x_1=-1$. Podijelimo li tu jednadžbu sa $x+1$, dobijemo:

$$x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1=0,$$

odnosno:

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x+\frac{1}{x}\right)-7=0.$$

Supstitucija

$$\sigma=x+\frac{1}{x} \quad \text{daje}$$
$$\sigma^3-3\sigma^2+3\sigma-1=0,$$

odnosno: $(\sigma-1)^3=0$, pa je $\sigma=1$ trostruki korijen te jednadžbe. Preostala rješenja polazne jednadžbe jesu korijeni jednadžbe $x+\frac{1}{x}=1$, odnosno $x^2-x+1=0$. Odatle slijedi:

$$x_{2,3,4}=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}),$$
$$x_{5,6,7}=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}). \blacksquare$$

3.6. Polinomi više varijabli

Slično kao i polinomi dviju varijabli definiraju se i polinomi triju varijabli.
Def.: Preslikavanje $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definirano formulom:

$$f(x,y,z)=f_0(x,y)+f_1(x,y)z+f_2(x,y)z^2+\ldots+f_n(x,y)z^n,$$

$(x,y,z)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, gdje su $f_0,f_1,\ldots,f_n$ polinomi dviju varijabli, zove se polinom triju varijabli.

Slično se dalje induktivno definiraju i polinomi n varijabli. Tako je npr. preslikavanje $f(x,y,z)=x^3-2xz^2+5xyz^7$ polinom triju varijabli. Tu je:

$$f_0(x,y)=x^3,\quad f_1(x,y)=0,\quad f_2(x,y)=-2x,$$
$$f_3(x,y)=f_4(x,y)=f_5(x,y)=f_6(x,y)=0,\quad f_7(x,y)=5xy.$$

Sada se na isti način kao i kod polinoma dviju varijabli definiraju monomi, koeficijenti i stupanj polinoma. Tako je, na primjer, stupanj polinoma f iz prethodnog primjera jednak $1+1+7=9$.

Skup svih polinoma triju varijabli s realnim koeficijentima označavamo sa $\mathbf{R}[x,y,z]$ i zovemo polinomima nad $\mathbf{R}$. Kao i prije u $\mathbf{R}[x,y,z]$ uvode se operacije zbrajanja i množenja kao zbrajanje i množenje funkcija. Pokazuje se da se polinomi triju varijabli zbrajaju i množe analogno kao i polinomi dviju varijabli. Kao i prije, $\mathbf{R}[x,y,z]$ je s obzirom na te operacije komutativni prsten s jedinicom.

Sve se to induktivno prenosi i na polinome n varijabli. Skup svih polinoma n varijabli s realnim koeficijentima označavamo sa $\mathbf{R}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ i to je komutativni prsten s jedinicom.

Formalno se **polinomi od n varijabli** nad nekim komutativnim prstenom s jedinicom P definiraju kao elementi prstena $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ koji se induktivno definira sa

$$P[x_1, x_2, \ldots, x_n] = (P[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}])[x_n]$$

Svaki polinom od više varijabli je opet suma monoma i polinom je **homogen** (ili **forma**), ako su svi monomi istog stupnja. Tako je npr. polinom $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ **linearna forma**, a $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j$ **kvadratna forma** u n varijabli $x_1, \ldots, x_n$.

Za polinome f i g polinom h (ako on postoji) takav da je $f = g \cdot h$ zove se **kvocijent** $\frac{f}{g}$ polinoma f i g. Kažemo da je polinom f djeljiv polinomom g. Kvocijent dvaju polinoma određuje se analognim postupkom kao i kod dvije varijable.

Primjer 21. Za polinome $f(x,y,z) = x^3yz + x^4 + x^2 + xy^3z + x^2y^2 + y^2 - xyz^3 - x^2z^2 - z^2$ i $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ odredite $\frac{f}{g}$.

Rješenje. Najprije članove polinoma napišemo po padajućim potencijama od x, a zatim provedemo dijeljenje kao kod polinoma dviju varijabli. Imamo:

$$f(x,y,z) = x^4 + x^3yz + x^2y^2 - x^2z^2 + x^2 + xy^3z - xyz^3 + y^2 - z^2.$$

Članovi polinoma $g(x,y,z)$ već su napisani po padajućim potencijama od x. Dakle, imamo:

$$\begin{array}{l}
(x^4 + x^3yz + x^2y^2 - x^2z^2 + x^2 + xy^3z - xyz^3 + y^2 - z^2) : (x^2 + y^2 - z^2) = x^2 + xyz + 1 \\
\underline{-x^4 \qquad\qquad \pm x^2y^2 \mp x^2z^2} \\
\qquad x^3yz \qquad\qquad\qquad + x^2 + xy^3z - xyz^3 + y^2 - z^2 \\
\qquad \underline{-x^3yz \qquad\qquad\qquad\quad \pm xy^3z \mp xyz^3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x^2 \qquad\qquad\qquad + y^2 - z^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{\pm x^2 \qquad\qquad\qquad \pm y^2 \mp z^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0.
\end{array}$$

Dakle, $\frac{f}{g} = x^2 + xyz + 1$. ■

Napomena 1. Uočite da je kod zapisa polinoma važno u zagradi istaknuti varijable jer se inače ne zna o kojem je broju varijabli riječ. Na primjer, ako napišemo $f = x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_3$, onda isti zapis imaju polinom $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_3$ i $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_3$, a ti polinomi nisu jednaki jer je jedan preslikavanje $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, a drugi $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$.

*

Simetrični polinomi više varijabli definiraju se analogno kao i polinomi dviju varijabli. Tako za polinom triju varijabli $f(x,y,z)$ kažemo da je **simetričan** ako vrijedi:

$$f(x,y,z) = f(x,z,y) = f(y,x,z) = f(y,z,x) = f(z,x,y) = f(z,y,x), \qquad (1)$$

$$\forall x, y, z \in \mathbf{R}.$$

Uočite da je za simetričnost polinoma triju varijabli dovoljno provjeriti da vrijedi:

$$f(x,y,z) = f(y,x,z) = f(z,y,x) = f(x,z,y),$$

i to zato što iz tih jednakosti slijedi da vrijede sve jednakosti (1). Provjerite to!

Općenito, polinom $f \in \mathbf{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je **simetričan**, ako vrijedi

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)}),$$

za svaku **permutaciju** (tj. bijekciju) $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Npr. polinomi $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3)$ su simetrični, a polinom $h = (x,y,z) = xz^2 + y^2z$ to nije jer je $h(x,y,z) \ne h(z,x,y)$. Provjerite!

Kao i kod polinoma dviju varijabli, važnu ulogu imaju **elementarni ili osnovni simetrični polinomi**. To su polinomi:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\
\sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n, \\
\sigma_3 &= x_1x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sigma_n &= x_1x_2 \ldots x_n.
\end{aligned}$$

Uočite da je polinom σ_k k–tog stupnja za $k = 1, 2, \ldots, n$. Drugu važnu klasu simetričnih polinoma čine **Newtonovi polinomi** ili **sume potencija**. To su polinomi:

$$\begin{aligned}
s_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\
s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
s_k &= x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k.
\end{aligned}$$

Još je uobičajeno uzeti da je $s_0 = x_1^0 + x_2^0 + \ldots + x_n^0 = n$.

Uočite da je $\sigma_k = \sum x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$ gdje se sumira po svim $(i_1, \ldots, i_k)$, takvim da je $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$. Nadalje, ako su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ korijeni jednadžbe $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_n = 0$, onda **Vièteove formule** kažu da je

$$(-1)^k a_k = \sigma_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

I za polinome n varijabli vrijedi **osnovni teorem o simetričnim polinomima**.

TEOREM 4. *Za svaki simetrični polinom $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$ postoji jedinstven polinom $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$ takav da je $f(x_1, \ldots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, gdje su $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ elementarni simetrični polinomi.*

Kao i za polinome dviju varijabli, tako i za polinome više varijabli vrijedi **Newtonova formula**.

TEOREM 5. *Neka su* $s_1, \ldots, s_k$ *Newtonovi polinomi od* n *varijabli. Tada za* $k \leq n$ *vrijedi:*

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1} + (-1)^k \cdot k \cdot \sigma_k = 0$$

za $k > n$*:*

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^n s_{k-n}\sigma_n = 0,$$

gdje su $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ *osnovni simetrični polinomi.*

Prije dokaza evo prvo nekih primjera. Za $n = 3$ i $k \geq 3$ imamo:

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3}.$$

Newtonova formula omogućava da i za velike k izrazimo s_k pomoću σ_1, σ_2, i σ_3.

Najprije je $s_0 = 3$, $s_1 = \sigma_1$.

$$s_2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy + yz + zx) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

Primjenom Newtonove formule možemo naći s_3 itd.

Imamo:

$$\begin{aligned} s_3 &= \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 + \sigma_3 s_0 = \\ &= \sigma_1(\sigma_1^3 - 2\sigma_2) - \sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3, \end{aligned}$$

odnosno:

$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Kao korisnu vježbu preporučujemo vam da dokažete ove formule:

$$\begin{aligned} s_4 &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3; \\ s_5 &= \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3; \\ s_6 &= \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 + 6\sigma_1^3\sigma_3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2. \end{aligned}$$

Pokažimo sada na primjerima kako se simetrični polinomi prikazuju pomoću osnovnih simetričnih polinoma.

Primjer 22. Polinom $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2yz + xy^2z$ prikažite pomoću osnovnih simetričnih polinoma $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Rješenje. Najprije imamo

$$f(x,y,z) = s_3 + xyz(x+y+z).$$

Odatle slijedi:

$$f(x,y,z) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3. \ ■$$

Primjer 23. Izrazite $f(x,y,z) = (x+y)(y+z)(x+z)$ pomoću osnovnih simetričnih polinoma σ_1, σ_2 i σ_3.

Rješenje. Imamo redom:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (xy + y^2 + xz + yz)(x+z) \\ &= x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)(x+y+z) - (x^3 + y^3 + z^3) + 2xyz \\ &= s_2 s_1 - s_3 + 2\sigma_3. \end{aligned}$$

Prema Newtonovim formulama, odatle slijedi:

$$f(x,y,z) = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_1 - (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) + 2\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3.$$

Drugi način: $f(x,y,z) = (\sigma_1 - z)(\sigma_1 - x)(\sigma_1 - y)$ iz čega odmah slijedi rezultat. ■

Primjer 24. Izrazite $f(x,y,z) = x^3y^2z + x^3z^2y + y^3z^2x + y^3z^2x + z^3x^2y + z^3y^2x$ pomoću osnovnih simetričnih polinoma.

Rješenje. Najprije je

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= xyz(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) \\ &= \sigma_3(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y). \end{aligned}$$

U prethodnom smo primjeru vidjeli da je

$$x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3,$$

pa konačno imamo:

$$f(x,y,z) = \sigma_3(\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3). \ ■$$

Primjer 25. Izračunajte $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3 + x_3^3x_1 + x_3x_1^3$ ako su x_1, x_2, x_3 korijeni jednadžbe $x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$.

Rješenje. Izrazimo najprije $f(x_1,x_2,x_3)$ pomoću elementarnih simetričnih polinoma. Imamo redom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1 + x_2 + x_3) - (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) \\ &= s_3 s_1 - s_4 \\ &= (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3)\sigma_1 - (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3) \\ &= \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2^2. \end{aligned}$$

Prema Vièteovim formulama imamo:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -4, \quad x_1x_2x_3 = -1,$$

pa je

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = -4, \quad \sigma_3 = -1.$$

Konačno je

$$f(x_1,x_2,x_3) = 1^2 \cdot (-4) - 1 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-4)^2,$$

dakle slijedi:

$$f(x_1,x_2,x_3) = -35. \ ■$$

*

Sustavi simetričnih jednadžbi sa tri i više nepoznanica rješavaju se analogno kao i sustavi s dvije nepoznanice.

Primjer 26. Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 20. \end{aligned}$$

Rješenje. Najprije izrazimo polinome na lijevim stranama tih jednadžbi pomoću elementarnih simetričnih polinoma σ_1, σ_2, σ_3. Prema osnovnom teoremu o simetričnim polinomima, to je uvijek moguće. Dobivamo:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 &= 14 \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 &= 20. \end{aligned}$$

Uvrstimo li $\sigma_1 = 2$ u drugu jednadžbu, nalazimo da je $\sigma_2 = -5$, a uvrstimo li σ_1 i σ_2 treću jednadžbu, dobivamo da je $\sigma_3 = -6$. Prema Vièteovu teoremu, ako je (t_1, t_2, t_3) rješenje našeg sustava onda su t_1, t_2 i t_3 korijeni jednadžbe

$$t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0.$$

Lako je naći da su $t_1 = 1, t_2 = -2, t_3 = 3$ korijeni te jednadžbe. Dakle, rješenja su našeg sustava:

$$(1,-2,3),\quad (1,3,-2),\quad (-2,1,3),\quad (-2,3,1),\quad (3,1,-2),\quad (3,-2,1).$$

Uočite da se sva rješenja dobiju permutacijama trojke $(1, -2, 3)$. ■

Primjer 27. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ xy + yz + zx &= 32 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 1. \end{aligned}$$

Rješenje. Iz prve dvije jednadžbe odmah nalazimo $\sigma_1 = 10$ i $\sigma_2 = 32$. Uvrstimo li to u treću jednadžbu, dobivamo:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{yz + xz + xy}{xyz} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{32}{\sigma_3} = 1, \quad \text{pa je} \quad \sigma_3 = 32.$$

Dakle, ako je (t_1, t_2, t_3) rješenje zadanog sustava, onda su t_1, t_2 i t_3 korijeni jednadžbe

$$t^3 - 10t^2 + 32t - 32 = 0.$$

Odatle je $t_1 = 2$, $t_2 = 4$, $t_3 = 4$, pa imamo ova rješenja sustava:

$$(2,4,4), (4,2,4), (4,4,2).$$ ■

*

Simetrični polinomi više varijabli rastavljaju se na faktore kao i takvi polinomi dviju varijabli, tj. polinom se izrazi pomoću osnovnih simetričnih polinoma, a onda se rastavi na faktore.

Primjer 28. Rastavite na faktore polinom

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Rješenje. Ako f izrazimo pomoću elementarnih simetričnih polinoma, dobit ćemo:

$$f = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2.$$

Dakle, imamo:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) \\ &= (x+y+z)[(x+y+z)^2 - 3(xy + yz + xz)]. \end{aligned}$$

Konačno je

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$ ■

Primjer 29. Rastavite na faktore polinom

$$f(a,b,c) = (a+b)(a+c)(b+c) + abc.$$

Rješenje. Izrazimo li f pomoću elementarnih simetričnih polinoma, dobivamo:

$$f(a,b,c) = \sigma_1\sigma_2,$$

pa konačno imamo:

$$(a+b)(a+c)(b+c) + abc = (a+b+c)(ab+bc+ca).$$ ■

Pri dokazivanju valjanosti nekih identiteta u kojima se pojavljuju simetrične funkcije zgodno je prikazati te funkcije pomoću elementarnih simetričnih polinoma, a onda dokazati identitet.

Primjer 30. Dokažite da iz $a + b + c = 0$ slijedi:

$$a^4 + b^4 + c^4 = (ab + bc + ca)^2.$$

Rješenje. Prikažimo najprije $a^4 + b^4 + c^4$ pomoću elementarnih simetričnih polinoma. Imamo:

$$a^4 + b^4 + c^4 = s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3.$$

Odatle, zbog $a + b + c = \sigma_1 = 0$, slijedi:

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2\sigma_2^2,$$

dakle

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + bc + ca)^2.$$ ■

Primjer 31. Izračunajte sumu kvadrata i sumu kubova korijena jednadžbe

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Rješenje. Neka su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ korijeni jednadžbe. Prema Viéteovim formulama imamo

$$\begin{aligned} a_1 &= -\sigma_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \\ a_2 &= \sigma_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \\ a_3 &= -\sigma_3\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Prema Newtonovim formulama je

$$s_2(\alpha_1,\dots,\alpha)=\sigma_1^2-2\sigma_2=a_1^2-a_2,$$

$$s_3(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=3a_1a_2-a_1^3-3a_3.\ \blacksquare$$

Da bismo dokazali osnovni teorem o simetričnim polinomima, treba u skup svih monoma n varijabli uvesti poseban uređaj.

Neka su $ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ i $bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\dots x_n^{\beta_n}$ dva monoma. Za prvi monom reći ćemo da je **stariji** od drugoga ako postoji $i\in\{1,2,\dots,n\}$ takav da je

$$\alpha_1=\beta_1,\quad \alpha_2=\beta_2,\dots,\quad \alpha_{i-1}=\beta_{i-1},\quad \alpha_i>\beta_i.$$

Na taj smo način u skup svih monoma n varijabli uveli uređaj koji zovemo **leksikografskim uređajem** i to zato što su po tom istom uređaju svrstane riječi u rječniku i leksikonu.

Leksikografski urediti neki polinom znači svrstati njegove članove po starosti.

Primjer 32. Leksikografski uredite polinom

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2x_2^3x_3^{10}+8x_1^3x_2^3x_3^8-3x_1^3x_2^4x_3+x_1^4x_2x_3.$$

Rješenje. Najprije se u monomima polinoma pogledaju eksponenti od x_1. Najveći eksponent od x_1 jest 4, a u ostalim monomima se x_1 pojavljuje s manjim eksponentom. Dakle, $x_1^4x_2x_3$ najstariji je član tog polinoma. U drugom i trećem monomu x_1 se pojavljuje s eksponentom 3. U tom slučaju gledamo eksponente od x_2. Kako se u trećem monomu x_2 pojavljuje s eksponentom 4, a u drugome s eksponentom 3, treći je član stariji od drugog člana. Prvi član polinoma je najmlađi. Dakle, leksikografski uređaj od f glasi:

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^4x_2x_3-3x_1^3x_2^4x_3+8x_1^3x_2^3x_3^8+2x_1^2x_2^3x_3^{10}.$$

Uočite da najstariji član polinoma ne mora imati i najveći stupanj. U navedenom primjeru najstariji je član stupnja $4+1+1=6$, dok najviši stupanj ima najmlađi član i taj je stupanj jednak $2+3+10=15$. Dakle, f je polinom petnaestog stupnja. ■

O najstarijem članu produkta dvaju polinoma govori ova lema.

LEMA 2. *Neka su $f,g\in\mathbf{R}[x_1,\dots,x_n]$. Najstariji član produkta $f\cdot g$ tih dvaju polinoma jednak je produktu najstarijih članova polinoma f i g.*

Dokaz. Neka je

$$ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}\tag{2}$$

najstariji član od f, a

$$bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\dots x_n^{\beta_n}\tag{3}$$

bilo koji drugi član od f. Neka je, nadalje,

$$cx_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2}\dots x_n^{\gamma_n}\tag{4}$$

najstariji član polinoma g, a

$$dx_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2}\dots x_n^{\delta_n}\tag{5}$$

bilo koji drugi član od g.

Treba pokazati da je produkt članova (2) i (4) stariji od produkta članova (2) i (5), (3) i (5), napokon, (3) i (4). Pokazat ćemo sada da je produkt članova (2) i (4) stariji od produkta članova (3) i (5). Ostale tvrdnje dokazuju se analogno.

Kako je, po pretpostavci, (2) stariji od (3), postoji $i\in\{1,2,\dots,n\}$ takav da vrijedi:

$$\alpha_1=\beta_1,\alpha_2=\beta_2,\dots,\alpha_{i-1}=\beta_{i-1},\alpha_i>\beta_i,\tag{6}$$

a kako je (4) stariji od (5), postoji $j\in\{1,2,\dots,n\}$ takav da vrijedi

$$\gamma_1=\delta_1,\gamma_2=\delta_2,\dots,\gamma_{j-1}=\delta_{j-1},\gamma_j>\delta_j.\tag{7}$$

Ako je $i\le j$, onda zbrajanjem jednakosti (6) i (7) dobivamo:

$$\alpha_1+\gamma_1=\beta_1+\delta_1,\alpha_2+\gamma_2=\beta_2+\delta_2,\dots,\alpha_{i-1}+\gamma_{i-1}=\beta_{i-1}+\delta_{i-1};\alpha_i+\gamma_i>\beta_i+\delta_i,$$

pa je tvrdnja dokazana.

Ako je pak $i>j$, onda zbrajanjem (6) i (7) dobivamo

$$\alpha_1+\gamma_1=\beta_1+\delta_1,\alpha_2+\gamma_2=\beta_2+\delta_2,\dots,\alpha_{j-1}+\gamma_{j-1}=\beta_{j-1}+\delta_{j-1},\alpha_j+\gamma_j>\beta_j+\delta_j,$$

a iz tih jednakosti slijedi da je produkt članova (2) i (4) stariji od produkta (3) i (5). ■

Dokaz osnovnog teorema o simetričnim funkcijama.

Egzistencija. Neka je $f\in\mathbf{R}[x_1,x_2,\dots,x_n]$ simetrični polinom i neka je $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ njegov najstariji član. Tvrdimo da je tada

$$k_1\ge k_2\ge\dots\ge k_n.\tag{8}$$

To ćemo dokazati. Kako je f simetrični polinom, on zajedno s članom $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ sadrži i član koji se iz ovoga dobije tako da se permutiraju x_1 i x_2 tj. f sadrži još i član $ax_1^{k_2}x_2^{k_1}\dots x_n^{k_n}$, a kako je $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ najstariji član, mora vrijediti $k_1\ge k_2$. Na isti se način dokazuju i ostale nejednakosti u (8).

Pokažimo sada da postoji polinom oblika $a\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\dots\sigma_n^{\alpha_n}$ takav da je njegov najstariji član jednak najstarijem članu polinoma f, gdje su $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ elementarni simetrični polinomi. U tu svrhu napišemo detaljnije:

$$\sigma_1^{\alpha_1}\dots\sigma_n^{\alpha_n}=(x_1+\dots+x_n)^{\alpha_1}\cdot(x_1x_2+\dots+x_{n-1}x_n)^{\alpha_2}\cdot$$

$$\cdot(x_1x_2x_3+\dots+x_{n-2}x_{n-1}x_n)^{\alpha_3}\dots(x_1\dots x_{n-1}+\dots+x_2\dots x_n)^{\alpha_{n-1}}\cdot(x_1\dots x_n)^{\alpha_n}.$$

Prema lemi o najstarijem članu, najstariji član tog polinoma jednak je:

$$x_1^{\alpha_1}\cdot x_1^{\alpha_2}x_2^{\alpha_2}\cdot x_1^{\alpha_3}x_2^{\alpha_3}x_3^{\alpha_3}\dots x_1^{\alpha_{n-1}}x_2^{\alpha_{n-1}}\dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\cdot x_1^{\alpha_n}x_2^{\alpha_n}\dots x_n^{\alpha_n},$$

odnosno:

$$x_1^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}x_2^{\alpha_2+\dots+\alpha_n}x_3^{\alpha_3+\dots+\alpha_n}\dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}+\alpha_n}\cdot x_n^{\alpha_n}.$$

Taj će član biti jednak najstarijem članu polinoma f ako je moguće odrediti negativne cijele brojeve $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \ldots, \alpha_n \geq 0$ tako da vrijedi

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n &= k_1 \\ \alpha_2 + \ldots + \alpha_n &= k_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n-1} + \alpha_n &= k_{n-1} \\ \alpha_n &= k_n. \end{aligned}$$

Iz tog sustava dobivamo:

$$\alpha_1 = k_1 - k_2, \quad \alpha_2 = k_2 - k_3, \ldots, \quad \alpha_{n-1} = k_{n-1} - k_n, \quad \alpha_n = k_n.$$

Treba još vidjeti da je $\alpha_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$, a to očito jest, što slijedi iz (8).

Dakle, polinom $a\sigma_1^{k_1-k_2} \cdot \sigma_2^{k_1-k_2} \ldots \sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n} \cdot \sigma_n^{k_n}$ ima najstariji član jednak najstarijem članu polinoma f.

Formirajmo sada polinom

$$f_1 = f - a\sigma_1^{k_1-k_2} \cdot \sigma_2^{k_1-k_2} \ldots \sigma_n^{k_n} \tag{9}$$

Očito je f_1 strogo mlađi od f. Ako f_1 nije nulpolinom, postupak možemo nastaviti. Neka je $a_1 x_1^{l_1} \ldots x_n^{l_n}$ najstariji član od f_1. Formirajmo polinom f_2 ovako:

$$f_2 = f_1 - a_1 \sigma_1^{l_1-l_2} \sigma_2^{l_2-l_3} \ldots \sigma_n^{l_n}. \tag{10}$$

Očito je f_2 strogo mlađi od f_1. Ako f_2 nije nulpolinom, postupak nastavimo. Nakon konačno mnogo koraka, jer su polinomi $f_1, f_2, \ldots$ sve mlađi i mlađi, doći ćemo do nulpolinoma. Neka je to nakon k koraka, tj. neka je $f_k = 0$. Označimo najstariji član od f_{k-1} sa $a_{k-1} x_1^{s_1} \ldots x_n^{s_n}$, pa imamo:

$$0 = f_k = f_{k-1} - a_{k-1} \sigma_1^{s_1-s_2} \sigma_2^{s_2-s_3} \ldots \sigma_n^{s_n}. \tag{11}$$

Zbrajanjem (9), (10) i (11) dobivamo:

$$f = a\sigma_1^{k_1-k_2} \ldots \sigma_n^{k_n} + a_1 \sigma_1^{l_1-l_2} \ldots \sigma_n^{l_n} + \ldots + a_{k-1} \sigma_1^{s_1-s_2} \ldots \sigma_n^{s_n},$$

čime je egzistencija dokazana.

Jedinstvenost. Neka su $g_1 \neq g_2$ dva polinoma takva da je $f = g_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = g_2(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Promotrimo tada polinom od n varijabli $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_1 - g_2 \neq 0$, za koji je $g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$. To znači da su $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ **algebarski zavisni** nad $\mathbf{R}$. No, pokažimo indukcijom po n da to nije tako. Zaista, pretpostavimo suprotno, tj. da je $g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$. Na polinom g možemo gledati kao polinom nad $\mathbf{R}[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]$ u varijabli x_n pa ga zapišimo u obliku

$$g(x_1, \ldots, x_n) = g_0(x_1, \ldots, x_{n-1}) + \ldots + g_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) x_n^k,$$

pri čemu je $k = st_{x_n} g$ (tj. stupanj od g u varijabli x_n).

Ako je $g_0 = 0$, onda je $g = x_n h$, gdje je $h \in \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Po pretpostavci je $\sigma_n h(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0 \Rightarrow h(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0$, što je nemoguće, jer je st $h(x_1, \ldots, x_n) =$ st $g(x_1, \ldots, x_n) - 1$. Stoga je $g_0 \neq 0$. Promotrimo sada jednakost

$$g_0(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}) + \ldots + g_k(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}) \sigma_n^k = g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0$$

kao jednakost u $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Stavimo li tu $x_n = 0$, dobivamo da je sada $\sigma_n = 0$, pa su svi članovi osim prvog jednaki 0. Označimo li sa $\sigma_1^0, \ldots, \sigma_{n-1}^0$ elementarne simetrične funkcije od $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Tada dobivamo

$$g(\sigma_1^0, \ldots, \sigma_{n-1}^0) = 0.$$

Po pretpostavci indukcije su $\sigma_1^0, \ldots, \sigma_{n-1}^0$ algebarski nezavisni a $g_0 \neq 0$, što je kontradikcija. Time je teorem dokazan. ■

Dokaz teorema 5. Najprije je $s_1 = \sigma_1$. Neka je $a x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ neki monom. Tada polinom koji dobijemo zbrajanjem svih monoma, koji se od zadanoga dobiju svim permutacijama varijabli, označavamo sa

$$S(a x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}).$$

Tako je, na primjer, $S(x_1) = \sigma_1$, $S(x_1 x_2) = 2\sigma_2$, $S(x_1^k) = s_k$ itd.

Za $k \leq n$ lako je vidjeti da vrijedi:

$$\begin{aligned} s_{k-1}\sigma_1 &= s_k + S(x_1^{k-1} x_2), \\ s_{k-2}\sigma_2 &= S(x_1^{k-1} x_2) + S(x_1^{k-2} x_2 x_3), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ s_{k-i}\sigma_i &= S(x_1^{k-i+1} x_2 \ldots x_i) + S(x_1^{k-i} x_2 \ldots x_i x_{i+1}), \quad i = 3, \ldots, k-2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ s_1 \sigma_{k-1} &= S(x_1^2 x_2 \ldots x_{k-1}) + k\sigma_k. \end{aligned}$$

Ako sada prvu od tih jednadžbi pomnožimo sa 1, drugu sa -1, treću sa 1 itd. te sve tako dobivene produkte zbrojimo, dobit ćemo:

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^{k-1} s_1 \sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0,$$

a to je prva Newtonova formula.

Ako je $k > n$, onda imamo:

$$\begin{aligned} s_{k-1}\sigma_1 &= s_k + S(x_1^{k-1} x_2), \\ s_{k-2}\sigma_2 &= S(x_1^{k-1} x_2) + S(x_1^{k-2} x_2 x_3), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ s_{k-i}\sigma_i &= S(x_1^{k-i+1} x_2 \ldots x_i) + S(x_1^{k-i} x_2 \ldots x_i x_{i+1}), \quad i = 3, \ldots, n-1 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ s_{k-n}\sigma_n &= S(x_{k-n+1} x_2 \ldots x_n). \end{aligned}$$

Iz tih jednakosti, na isti način kao prije, nalazimo da vrijedi:

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^n s_{k-n}\sigma_n = 0,$$

i druga je Newtonova formula dokazana. ■

§ 4. Racionalne i iracionalne funkcije

4.1. Racionalne funkcije

Racionalna funkcija (nad $\mathbf{R}$ ili $\mathbf{C}$) je kvocijent dvaju polinoma. Drugim riječima, racionalna funkcija je oblika

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)},$$

gdje su f i g polinomi i $g \neq 0$ (tj. g nije nulpolinom). Ako je g konstanta, onda se očito radi o polinomu, dakle su i polinomi racionalne funkcije. Tako su npr.

$$x \mapsto \frac{5}{x+1}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}, \quad x \mapsto \frac{2x-7}{x^2+4x+9}, \quad x \mapsto 4x^2-3x-\sqrt{2}$$

racionalne funkcije nad $\mathbf{R}$.

Racionalna funkcija $R(x) = f(x)/g(x)$ je napisana u **kanonskoj formi** ako polinomi f i g nemaju zajedničkih korijena. Ako f i g imaju zajedničkih korijena, recimo $x_1, \ldots, x_k$, onda je

$$R(x) = \frac{(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_k)}{(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_k)}\frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

i pri tome f_1 i g_1 nemaju zajedničkih korijena, pa su f_1 i g_1 relativno prosti polinomi tj. $M(f_1, g_1) = 1$. Stoga je racionalna funkcija

$$x \mapsto R_1(x) = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

napisana u kanonskoj formi. Funkcije R i R_1 se podudaraju u svim točkama područja definicije $\mathcal{D}(R_1)$ funkcije R_1, osim u točkama $x_1, \ldots, x_k$ u kojima funkcija $x \mapsto R(x)$ nije definirana. Obično se u tom slučaju područje definicije od R može proširiti tako da se definira funkcija $x \mapsto R_2(x)$ sa

$$R_2(x) = \begin{cases} R(x), & \text{ako je } x \neq x_j, \\ \lim\limits_{x\to x_j} R(x), & \text{ako je } x = x_j \text{ i ako ovaj limes postoji,} \end{cases} \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Tada se R_2 podudara s funkcijom R_1. Npr.

$$\frac{x^3-4x+\sqrt{7}}{x-3}, \quad \frac{6}{x+2}, \quad \frac{7x-1}{x^2-4x+\sqrt{5}}$$

su napisani u kanonskom obliku, dok

$$\frac{2x-4}{3x^2-15x+18} = \frac{2(x-2)}{3(x-2)(x-3)}, \quad \frac{4x+4\sqrt{3}}{5x^2-15} = \frac{4(x+\sqrt{3})}{5(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}$$

nisu napisani u kanonskom obliku.

Racionalna funkcija $R(x) = f(x)/g(x)$ je **prava racionalna funkcija** ako je st $f <$ st g, a inače **neprava**. U slučaju neprave funkcije možemo podijeliti brojnik s nazivnikom, pa dobijemo sumu polinoma i prave racionalne funkcije. Npr.

$$\frac{2x^2+7x-8}{x+5} = \frac{(2x-3)(x+5)+7}{x+5} = 2x-3+\frac{7}{x+5}.$$

Nultočka ili **korijen** racionalne funkcije $R(x) = f(x)/g(x)$ napisane u kanonskom obliku je broj x_0 za koji je $f(x_0) = 0$. Ako je x_0 korijen kratnosti r polinoma f, onda se x_0 naziva također **korijen kratnosti** r funkcije R. Broj x_0 je **pol** racionalne funkcije $R(x) = f(x)/g(x)$ napisane u kanonskom obliku ako je $g(x_0) = 0$. Ako je pri tom x_0 nultočka kratnosti r polinoma g, onda se x_0 zove **pol kratnosti** (ili reda) r. Npr. (prava) racionalna funkcija

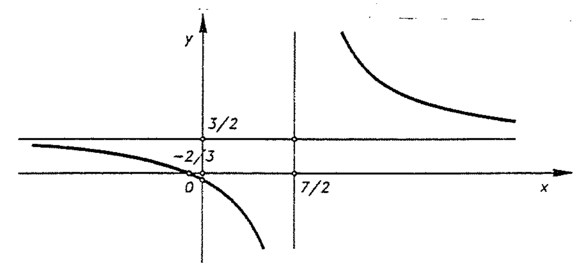
$$R(x) = \frac{x^2-1}{x^3+x^2-8x-12} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+2)^2}$$

ima jednostruke korijene $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ i polove $x_3 = 3$ (pol prvog reda) i $x_4 = -2$ (pol drugog reda).

Funkcija $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ se zove **razlomljena linearna funkcija.** Ta funkcija ima korijen $x_1 = -b/a$ (ako je $a \neq 0$) i pol $x_2 = -d/c$. Ona se može napisati i kao

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2(x+d/c)}, \quad c \neq 0, \quad bc-ad \neq 0.$$

Kada $x \to \pm\infty$, onda vrijednosti ove funkcije teže prema a/c. Graf ove funkcije je hiperbola (v. pogl. VI). Npr. graf funkcije $x \mapsto y = \frac{3x+2}{2x-7}$ je na sl. 9.



Sl. 9.

Skup svih racionalnih funkcija oblika $f(x)/g(x)$ gdje su $f(x), g(x) \in \mathbf{R}[x]$ polinomi nad $\mathbf{R}$, $g \neq 0$, se obilježava sa $\mathbf{R}(x)$ i zove **polje racionalnih funkcija nad R u varijabli** x. Skup $R(x)$ je zaista polje, jer se lako može provjeriti (učinite to sami) da je taj skup zatvoren na zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje.

Konstrukcija racionalnih funkcija može se učiniti nad bilo kojim poljem K (a ne samo nad $\mathbf{R}$), kao što su npr. $\mathbf{Q}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ itd. Tada se to polje označava sa $K(x)$. Formalna konstrukcija polja $K(x)$ može se provesti analogno onoj koja je provedena u pogl. I gdje smo iz prstena $\mathbf{Z}$ cijelih brojeva konstruirali polje razlomaka, tj. skupa racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$, samo što ovdje ulogu prstena $\mathbf{Z}$ igra prsten polinoma $K[x]$ (provedite i tu konstrukciju sami!). Elementi od $K(x)$ su opet oblika $f(x)/g(x)$ gdje su $f(x), g(x) \in K[x]$ polinomi nad $K, g \neq 0$. Po definiciji je $f/g = f_1/g_1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow fg_1 = f_1 g$. f se zove **brojnik**, a g **nazivnik razlomka** f/g. I ovdje se razlomak ne mijenja ako brojnik i nazivnik pomnožimo s istim nenul polinomom nad K, ili ako ga skratimo (tj. podijelimo) s istim nenul polinomom. I ovdje se racionalna funkcija f/g zove **neskrativa** ili napisana u **kanonskoj formi** ako su brojnik i nazivnik relativno prosti polinomi nad poljem K. S točnošću faktora u K, svaki se element $f/g \in K(x)$ može napisati jednoznačno u kanonskoj formi ako se brojnik i nazivnik podijele s njihovom najvećom zajedničkom mjerom $M(f,g)$.

4.2. Rastav racionalne funkcije na parcijalne razlomke

Često je vrlo korisno rastaviti racionalnu funkciju na sumu jednostavnih racionalnih funkcija, koje se zovu parcijalni (ili prosti) razlomci. To je npr. vrlo korisno u integralnom računu kada treba integrirati racionalnu funkciju.

Prava racionalna funkcija $x \mapsto f(x)/g(x)$ nad $\mathbf{R}$ je **parcijalni** (ili **prost**) **razlomak** ako je $g(x) = (p(x))^k$, gdje je $k \in \mathbf{N}$, a $p(x)$ je ireducibilan polinom nad $\mathbf{R}$ i st $f <$ st p.

TEOREM 1 (o parcijalnim razlomcima). *Svaka prava racionalna funkcija $R(x) = f(x)/g(x)$ može se na jedinstveni način prikazati kao zbroj parcijalnih razlomaka.*

Prije dokaza teorema objasnimo pobliže što on zapravo znači. Ireducibilni polinomi nad $\mathbf{R}$ su prvog ili drugog stupnja (v. 2, Teorem 18), pa se (normirani) polinom g može napisati u obliku

$$g(x) = (x-x_1)^{k_1} \ldots (x-x_s)^{k_s} (x^2+a_1x+b_1)^{l_1} \ldots (x^2+a_rx+b_r)^{l_r},$$

gdje su $k_i, l_j, r, s \in \mathbf{N}$, x_i su realne nultočke od g $(i = 1, \ldots, s)$, a $a_j^2 - 4b_j < 0$, $j = 1, 2, \ldots, r$ (tj. $x^2 + a_jx + b_j$ nemaju realnih nultočaka). Tada Teorem zapravo tvrdi da postoje jedinstveni realni brojevi A_{jk}, B_{jk}, C_{jk}, tako da je

$$\begin{aligned} R(x) = {} & \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{A_{s1}}{x-x_s} + \frac{A_{s2}}{(x-x_s)^2} + \ldots + \frac{A_{sk_s}}{(x-x_s)^{k_s}} + \\ & + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+a_1x+b_1} + \ldots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2+a_1x+b_1)^{l_1}} + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{B_{r_1}x + C_{r_1}}{x^2+a_rx+b_r} + \ldots + \frac{B_{rl_r}x + C_{rl_r}}{(x^2+a_rx+b_r)^{l_r}}. \end{aligned} \tag{*}$$

Dokaz Teorema 1. Prvo dokažimo egzistenciju takvog prikaza. Neka je dakle $f(x)/g(x) \in \mathbf{R}(x)$ prava racionalna funkcija. Možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je g normiran. Neka je $g = g_1g_2$ produkt relativno prostih normiranih polinoma. Tada postoje polinomi $u_1, u_2 \in \mathbf{R}[x]$, takvi da je (usp. §2):

$$u_1g_1 + u_2g_2 = 1.$$

Množenjem sa f slijedi

$$f = fu_1g_1 + fu_2g_2.$$

Podijelimo fu_1 sa g_2, pa neka je $fu_1 = qg_2 + v_2$, gdje je st $v_2 <$ st g_2. Tada je

$$f = v_1g_2 + v_2g_1, \tag{1}$$

gdje je $v_1 = qg_1 + fu_2$. Kako je st $v_2 <$ st g_2, a st $f <$ st g (jer je f/g prava racionalna funkcija), to iz (1) slijedi da je st $v_1 <$ st g_1.

Podijelimo li sada obje strane jednakosti (1) sa $g_1g_2 (= g)$, dobivamo

$$\frac{f}{g} = \frac{v_1}{g_1} + \frac{v_2}{g_2},$$

i pri tom su v_1/g_1 i v_2/g_2 prave racionalne funkcije. Ako je neki g_i produkt relativno prostih polinoma onda na tu racionalnu funkciju opet primijenimo gornje rasuđivanje i to produžimo dok god možemo. Na kraju dobivamo prikaz oblika

$$\frac{f}{g} = \sum_{i=1}^{m} \frac{h_i}{p_i^{n_i}}, \tag{2}$$

gdje su $M(h_i, p_i) = 1$, st $h_i < n_i$ st p_i, a $p_i^{n_i}$ su potencije ireducibilnih normiranih polinoma p_i koji ulaze u rastav polinoma g na ireducibilne polinome:

$$g = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}$$

$(p_i \neq p_j$ za $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\})$.

Sada još pogledajmo kako se prava racionalna funkcija oblika h/p^n može prikazati kao zbroj parcijalnih razlomaka, pri čemu je p ireducibilni polinom. Kako je st $h < n \cdot$ st p, podijelimo h sa p^{n-1}. Primjenom teorema o dijeljenju sa ostatkom dobivamo:

$$\begin{aligned} h &= q_1p^{n-1} + r_1, \\ r_1 &= q_2p^{n-2} + r_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n-2} &= q_{n-1}p + r_{n-1}, \\ r_{n-1} &= q_n, \end{aligned}$$

pri čemu je st $q_i <$ st p, za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Odatle slijedi:

$$h = q_1p^{n-1} + q_2p^{n-2} + \ldots + q_{n-1}p + q_n,$$

a odavde

$$\frac{h}{p^n} = \frac{q_1}{p} + \frac{q_2}{p^2} + \ldots + \frac{q_{n-1}}{p^{n-1}} + \frac{q_n}{p^n}.$$

Kako je st $h_i <$ st p slijedi da su q_i/p^i parcijalni razlomci. Primijenimo li to na svaki sumand iz (2), dobivamo

$$\frac{f}{g} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k_j-1} \frac{h_{ij}}{p_j^i}, \tag{3}$$

čime je egzistencija rastava na parcijalne razlomke dokazana.

Dokažimo jedinstvenost. Pretpostavimo da f/g ima dva prikaza oblika (3) s brojnicima h'_{ij} i h''_{ij}. Možemo pretpostaviti da su nazivnici u oba prikaza isti, jer dodamo s brojnikom 0 one iz drugog prikaza koji nedostaju. Oduzimanjem slijedi

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{h_{ij}}{p_j^i} = 0, \tag{4}$$

gdje je $n = \max\{k_1-1, k_2-1, \ldots, k_m-1\}$, a $h_{ij} = h'_{ij} - h''_{ij}$ ili $h_{ij} = 0$. Pomnožimo li (4) sa $p_1^{n-1} p_2^n \ldots p_m^n$ dobivamo

$$\frac{h_{n1} p_2^n \ldots p_m^n}{p_1} + q = 0, \tag{5}$$

gdje je q neki polinom. Iz (5) slijedi da je h_{n1} djeljiv s polinomom p_1, ali zbog st $h_{n1} <$ st p_1 slijedi nužno da je $h_{n1} = 0$. Na sličan način slijedi da je $h_{n2} = \ldots = h_{nm} = 0$, što znači da u (4) možemo n zamijeniti s $n-1$. Sada istim postupkom zaključujemo da su svi $h_{ij} = 0$, pa dakle $h'_{ij} = h''_{ij}$. Time je dokazana jedinstvenost prikaza (3) i teorem je dokazan. ■

Pokažimo na primjerima kako se određuju brojevi A_{jk}, B_{jk}, C_{jk} iz (∗) za koje znamo da su jednoznačno određeni. Najpoznatija metoda je **metoda neodređenih koeficijenata.**

Primjer 1. Razložite na parcijalne razlomke racionalnu funkciju

$$R(x) = \frac{x^3 - 2}{x(x+1)^3}.$$

Rješenje. Prema Teoremu 1 postoje jedinstveni brojevi A, B, C, D tako da je

$$\frac{x^3-2}{x(x+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)^3} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1}.$$

Pomnožimo li cijelu jednakost s $x(x+1)^3$, nakon sređivanja dobivamo

$$x^3 - 2 = x^3(A+D) + x^2(A+C+2D) + x(3A+B+C+D) + A.$$

Iz Teorema o jednakosti polinoma odavde slijedi

$$A+D=1, \quad A+C+2D=0, \quad 3A+B+C+D=0, \quad A=-2,$$

a odavde $A=-2$, $B=7$, $C=-4$, $D=3$. Stoga je

$$\frac{x^3-2}{x(x+1)^3} = -\frac{2}{x} + \frac{7}{(x+1)^3} - \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+1}. \ ■$$

Primjer 2. Razložite na parcijalne razlomke racionalnu funkciju

$$R(x) = \frac{2x^4 + 2x^2 - 5x + 1}{x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x}.$$

Rješenje. Imamo

$$R(x) = \frac{2x^4 + 2x^2 - 5x + 1}{x(x^2+x+1)^2}.$$

Tada imamo

$$R(x) = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}.$$

Množenjem s $x(x^2+x+1)^2$ slijedi

$$2x^4 + 2x^2 - 5x + 1 = A(x^2+x+1)^2 + (Bx+C)(x^2+x+1)x + (Dx+E)x.$$

Nakon izjednačavanja koeficijenata dobivamo

$$A+B=2, \ 2A+C+B=0, \ 3A+C+B+D=2, \ 2A+C+E=-5, \ A=1.$$

Odavde dobivamo $A=B=D=1$, $C=-3$, $E=-4$. Stoga je

$$R(x) = \frac{1}{x} + \frac{x-3}{x^2+x+1} + \frac{x-4}{(x^2+x+1)^2}. \ ■$$

Racionalna funkcija od dvije varijable je funkcija $Q : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ oblika

$$Q(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}, \quad g \neq 0,$$

gdje su f i g polinomi od dvije varijable (točnije $Q : S \to \mathbf{R}$, za neko $S \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$). Analogno se definiraju i racionalne funkcije više varijabli. Kvocijenti racionalnih funkcija više varijabli zovu se katkad i **algebarski razlomci,** odnosno **algebarski izrazi.**

4.3. Iracionalne funkcije

U pogl. II smo definirali funkciju n-tog korijena ($n \in \mathbf{N}$) : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ sa $\mathbf{R}^+$ u $\mathbf{R}$. Za razliku od racionalnih funkcija, funkcije koje u sebi sadrže neke korijene, odnosno potencije s racionalnim eksponentima zovu se **iracionalne funkcije.** Tako je npr. funkcija $x \mapsto \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$ iracionalna funkcija. Njeno područje definicije je najveći podskup od $\mathbf{R}$ u kojem su vrijednosti funkcije realni brojevi. Slično se definiraju iracionalne funkcije više varijabli. Tako je npr. $(x,y) \mapsto \sqrt[3]{\frac{2x}{\sqrt[5]{y}} + 7\frac{y}{\sqrt{x}}}$ iracionalna funkcija dviju varijabli. Ovakve funkcije se katkad zovu **iracionalni izrazi.** Kad se eksplicitno ne navodi područje definicije, obično se smatra da uzimamo maksimalni podskup od $\mathbf{R}$ za koje je rezultat (tj. vrijednost funkcije) realni broj. U tom se slučaju obično kaže "za sve dopustive vrijednosti varijabli". Prisjetimo se osnovnih pravila za računanje s iracionalnim izrazima:

$$(\sqrt[n]{x})^n = x; \quad \sqrt[n]{x\cdot y} = \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}; \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}};$$

$$x^0 = 1 (x \neq 0); \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}; \quad x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}; \quad x^{-m/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}.$$

Za parno $n \in \mathrm{N}$, $\sqrt[n]{x}$ je definiran za $x \geq 0$ i vrijednost od $\sqrt[n]{x}$ je tada pozitivna ili negativna (među realnim brojevima). Određenosti radi, ako se drugačije ne kaže, predznak korijena se tada uvijek smatra pozitivnim, tj. uzima se $\sqrt[n]{x^n} = |x|$. Za neparno $n \in \mathrm{N}$, postoji jedinstveni $\sqrt[n]{x}$ čiji je predznak jednak predznaku od x. Jedno korisno pravilo za druge korijene (tzv. surdski izraz) za realne brojeve $A, B \geq 0, A^2 \geq B$ je ovo (dokažite ga):

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Primjer 3. Izračunajte (odn. pojednostavnite) izraz:

$$I = x^3 \left[\frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})^2 + (\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2}{x+\sqrt{xy}}\right]^5 \sqrt[3]{x\sqrt{x}}.$$

Rješenje. Imamo

$$I = x^3 \left[\frac{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right]^5 \sqrt[3]{x^6} =$$

$$= x^3 \left[\frac{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right]^5 \sqrt{x} = x^3 \frac{32}{x^2\sqrt{x}}\sqrt{x} = 32x. \ \blacksquare$$

§ 5. Eksponencijalna i logaritamska funkcija

Za proizvoljan realan broj $a > 1$ i prirodni broj n, definiramo n-tu potenciju $a^n = a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$ (n umnožaka). Točnije, induktivno definiramo $a^1 := a$, $a^{n+1} := a^n\cdot a$. Tako dobivamo funkciju $n \mapsto a^n$ definiranu na N s vrijednostima u R. Ona ima očito svojstvo

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

za sve $m, n \in \mathrm{N}, m > n$.

Ovo svojstvo dovodi nas do prirodne definicije

$$a^0 := 1, \quad a^{-n} := \frac{1}{a^n} \quad \text{za} \quad n \in \mathrm{N}.$$

Time funkciju a^n proširujemo na skup $\mathbf{Z}$ cijelih brojeva. Za tu funkciju vrijedi za sve $m, n \in \mathbf{Z}$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

U izgradnji realnih brojeva vidjeli smo da za $a > 0$ i $n \in \mathrm{N}$ postoji jedinstveni aritmetički n-ti korijen iz a, tj. broj $x > 0$ takav da je $x^n = a$. Standardna oznaka za taj n-ti **korijen** je $x = a^{\frac{1}{n}}$ ili $x^n = \sqrt[n]{a}$. Pri tom i dalje ostaje valjan zakon o zbrajanju eksponenata:

$$a = a^1 = (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}.$$

Iz tog razloga prirodno je definirati $a^{\frac{m}{n}} := (a^{\frac{1}{n}})^m$ i $a^{-\frac{1}{n}} := (a^{\frac{1}{n}})^{-1}$ za $n \in \mathrm{N}$ i $m \in \mathbf{Z}$. Kad provjerimo da vrijedi jednakost $a^{\frac{mk}{nk}} = a^{\frac{m}{n}}$ za $k \in \mathbf{Z}$, onda možemo smatrati da smo definirali a^r za sve racionalne brojeve.

Da provjerimo gornju jednakost, koristit ćemo slijedeću činjenicu:

$$\text{Za } 0 < x, 0 < y \text{ i } n \in \mathrm{N} \text{ vrijedi } x < y \Leftrightarrow x^n < y^n. \tag{$*$}$$

Dokaz te činjenice se lagano provodi matematičkom indukcijom, pa ga prepuštamo čitatelju. Posebno odavde slijedi

$$x = y \Leftrightarrow x^n = y^n.$$

Koristeći tu činjenicu dokažimo sada jednakosti

$$a^{\frac{mk}{nk}} = a^{\frac{m}{n}}, \quad k \in \mathbf{Z} \tag{1}$$

i

$$a^{\frac{m_1}{n_1}} \cdot a^{\frac{m_2}{n_2}} = a^{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}}. \tag{2}$$

Zaista. Prvo je $a^{\frac{mk}{nk}} > 0$ i $a^{\frac{m}{n}} > 0$. Dalje imamo

$$\left(a^{\frac{mk}{nk}}\right)^{nk} = \left(\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{mk}\right)^{nk} = \left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{mk\cdot nk} = \left(\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{nk}\right)^{mk} = a^{mk} \quad \text{i}$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{nk} = \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{n}\right)^{mk}.$$

Iz ovih dviju jednakosti i gornje činjenice slijedi jednakost (1). Slično imamo

$$\left(a^{\frac{m_1}{n_1}} \cdot a^{\frac{m_2}{n_2}}\right)^{n_1 n_2} = \left(a^{\frac{m_1}{n_1}}\right)^{n_1 n_2} \cdot \left(a^{\frac{m_2}{n_2}}\right)^{n_1 n_2} = \left(\left(a^{\frac{1}{n_1}}\right)^{n_1}\right)^{m_1 n_2} \cdot \left(\left(a^{\frac{1}{n_2}}\right)^{n_2}\right)^{m_2 n_1}$$

$$= a^{m_1 n_2} \cdot a^{m_2 n_1} = a^{m_1 n_2 + m_2 n_1}$$

i

$$\left(a^{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}}\right)^{n_1n_2} = \left(a^{\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}}\right)^{n_1n_2} = \left(\left(a^{\frac{1}{n_1n_2}}\right)^{n_1n_2}\right)^{m_1n_2+m_2n_1} = a^{m_1n_2+m_2n_1},$$

čime je i (2) dokazano.

Na taj način je definirano a^r za $r \in \mathbf{Q}$. Pri tome vrijedi za $r, r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$, da je $a^r > 0$ i $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$. To odmah slijedi iz ove činjenice za $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$:

$$r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2}. \tag{3}$$

Za dokaz tvrdnje (3) uočimo da iz (*) neposredno slijedi da je $a > 1 \Leftrightarrow a^{\frac{1}{n}} > 1$ za sve $n \in \mathbf{N}$, a odavde opet iz (*) $(a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} > 1$, za $m, n \in \mathbf{N}$. Prema tome, za $a > 1, r > 0, r \in \mathbf{Q}$ dobivamo $a^r > 1$. Iz (2) tada dobivamo za $r_1 < r_2$

$$a^{r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2 - r_1} > a^{r_1} \cdot 1 = a^{r_1}.$$

Sada želimo dalje proširiti našu funkciju na čitav skup realnih brojeva $\mathbf{R}$. Koristit ćemo se pojmom limesa funkcije. Stoga podsjetimo prvo na taj pojam. Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$. Točka $a \in \mathbf{R}$ je **gomilište** od S, ako svaka okolina (tj. svaki interval $\langle a-\delta, a+\delta\rangle, \delta > 0$) sadrži barem jednu točku $\neq a$ iz S. Neka je $f : S \to \mathbf{R}$ realna funkcija definirana na S, $a \in \mathbf{R}$ gomilište od S. Kažemo da funkcija f **teži** prema $A \in \mathbf{R}$ kada x iz S teži prema a, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svako $x \in S$ za koje je $0 < |x-a| < \delta$ vrijedi $|f(x) - A| < \varepsilon$, ili logičkim simbolima

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in S (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

To se još zapisuje simbolom

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in S}} f(x) = A \quad \text{ili} \quad \lim_{S \ni x \to a} f(x) = A.$$

Katkad se još piše $f(x) \to A$ kada $x \to A, x \in S$.

Vratimo se sada našoj eksponencijalnoj funkciji. Dokažimo prvo da za $r_0 \in \mathbf{Q}$ vrijedi

$$\lim_{\mathbf{Q} \ni r \to r_0} a^r = a^{r_0}. \tag{4}$$

Prvo provjerimo da $a^p \to 1$ kada $\mathbf{Q} \ni p \to 0$. Zaista, za $|p| < \frac{1}{n}$ imamo zbog (3) da je

$$a^{-\frac{1}{n}} < a^p < a^{\frac{1}{n}}.$$

Znamo da $a^{\frac{1}{n}} \to 1$ (i $a^{-\frac{1}{n}} \to 1$) za $n \to \infty$ (v. I,§4). Sada dokažimo da za $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da $|p| < \delta \Rightarrow 1 - \varepsilon < a^p < 1 + \varepsilon$. Zaista, za δ možemo uzeti $\frac{1}{n}$, za koji je $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n}}$ i $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. Konačno, sada dokažimo (4). Za $\varepsilon > 0$ odaberimo $\delta > 0$ takav da za $|p| < \delta$ vrijedi

$$1 - \varepsilon a^{-r_0} < a^p < 1 + \varepsilon a^{-r_0}.$$

Iz $|r - r_0| < \delta$ tada slijedi

$$a^{r_0}(1 - \varepsilon a^{-r_0}) < a^r = a^{r_0} \cdot a^{r - r_0} < a^{r_0}(1 + \varepsilon a^{-r_0}),$$

tj.

$$a^{r_0} - \varepsilon < a^r < a^{r_0} + \varepsilon \Rightarrow |a^r - a^{r_0}| < \varepsilon.$$

Dakle, do sada smo definirali funkciju a^r na $\mathbf{Q}$ sa svojstvima:

$$a^1 = a > 1$$

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$$

$$r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2}$$

$$a^{r_1} \to a^{r_2} \quad \text{kada} \quad r_1 \to r_2, \quad r_1 \in \mathbf{Q}.$$

Sada ćemo tu funkciju proširiti na čitav skup $\mathbf{R}$. Neka je $x \in \mathbf{R}$. Označimo $M := \sup\{a^r | \mathbf{Q} \ni r < x\}$ i $m := \inf\{a^r | \mathbf{Q} \ni r > x\}$. Jasno je da su $m, M \in \mathbf{R}$, jer za $r_1 < x < r_2$ vrijedi $a^{r_1} < a^{r_2}$.

Pokažimo sada da je $m = M$ (i tada ćemo tu zajedničku vrijednost označiti sa a^x).

Po definiciji m i M, za $r_1 < x < r_2$ imamo $a^{r_1} \leq M \leq m \leq a^{r_2}$. Tada je $0 \leq m - M \leq a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1}(a^{r_2 - r_1} - 1) < M(a^{r_2 - r_1} - 1)$. No zbog $a^p \to 1$ za $\mathbf{Q} \ni p \to 0$, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da $0 < r_2 - r_1 < \delta$ povlači $a^{r_2 - r_1} - 1 < \varepsilon / M$, pa dobivamo $0 \leq m - M < \varepsilon$. Kako je $\varepsilon > 0$, zaključujemo da je $m = M$. Definirajmo $a^x := m = M$. Tvrdimo nadalje da vrijedi

$$a^x = \lim_{\mathbf{Q} \ni r \to x} a^r \tag{5}$$

Iz definicije supremuma i infimuma zaključujemo da za $\varepsilon > 0$ postoje $r' < x$ i $r'' > x$ takvi da je $M - \varepsilon < a^{r'} \leq M = a^x$ i $a^x = m < a^{r''} < m + \varepsilon$. Kako $r' < r < r''$ povlači $a^{r'} < a^r < a^{r''}$ za sve $r \in \mathbf{Q} \cap \langle r', r''\rangle$, to dobivamo $a^x - \varepsilon < a^r < a^x + \varepsilon$. Sada ćemo pogledati neka svojstva ovako konstruirane funkcije a^x definirane na čitavom skupu $\mathbf{R}$.

Kao prvo, za $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $a > 1$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \tag{6}$$

Zaista, u intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$ postoje dva racionalna broja $r_1 < r_2$ tj. $x_1 \leq r_1 < r_2 \leq \leq x_2$, pa iz definicije od a^x i svojstvima funkcije a^r na $\mathbf{Q}$ odatle slijedi $a^{x_1} \leq a^{r_1} < < a^{r_2} \leq a^{x_2}$. Za $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2} \tag{7}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Možemo uzeti $\varepsilon < 6a^{x_1}a^{x_2}$. Tada zbog (5) postoji $\delta_1 > 0$ tako da $|x_1 - r_1| < \delta_1 \Rightarrow |a^{x_1} - a^{r_1}| < \frac{\varepsilon}{6a^{x_2}}$ i postoji $\delta_2 > 0$ tako da $|x_2 - r_2| < \delta_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |a^{x_2} - a^{r_2}| < \frac{\varepsilon}{6a^{x_1}}$ Neka je $\delta' = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tada za $|x_1 - r_1|, |x_2 - r_2| < \delta'$, zbog nejednakosti

$$|a^{x_1} \cdot a^{x_2} - a^{r_1} \cdot a^{r_2}| \leq a^{x_1}|a^{x_2} - a^{r_2}| + a^{x_2}|a^{x_1} - a^{r_1}| + |a^{x_1} - a^{r_1}||a^{x_2} - a^{r_2}|$$

dobivamo

$$|a^{x_1} \cdot a^{x_2} - a^{r_1} \cdot a^{r_2}| \leq a^{x_1} \cdot \frac{\varepsilon}{6a^{x_1}} + a^{x_2} \cdot \frac{\varepsilon}{6a^{x_2}} + \frac{\varepsilon^2}{36a^{x_1}a^{x_2}} < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2},$$

tj.

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} - \frac{\varepsilon}{2} < a^{r_1} \cdot a^{r_2} < a^{x_1} \cdot a^{x_2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Opet zbog (5) postoji $\delta < \delta'$ tako da za $|x_1 - r_1| < \delta$, $|x_2 - r_2| < \delta$, tj. za $|(x_1 + x_2) - (r_1 + r_2)| < 2\delta$ vrijedi

$$a^{r_1+r_2} - \frac{\varepsilon}{2} < a^{x_1+x_2} < a^{r_1+r_2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

No već znamo da za $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ vrijedi $a^{r_1+r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}$, pa iz gornjih nejednakosti slijedi

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} - \varepsilon < a^{x_1+x_2} < a^{x_1} \cdot a^{x_2} + \varepsilon.$$

Budući da ovo vrijedi za proizvoljno mali $\varepsilon > 0$, slijedi (7). Dokažimo da za x_0 vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0} \tag{8}$$

(ovdje "$x \to x_0$" znači $\mathbb{R} \ni x \to x_0$).

Provjerimo prvo da je $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$. Za $\varepsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$, tako da je

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon.$$

Tada zbog (6) dobivamo da za $|x| < \frac{1}{n}$ vrijedi

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < a^x < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon.$$

čime smo dokazali da je $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$.

Uzmimo sada $\delta > 0$, takav da $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |a^{x-x_0} - 1| < \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}$. Tada dobivamo

$$a^{x_0} - \varepsilon < a^x = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1) < a^{x_0} + \varepsilon,$$

odakle slijedi $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$, tj. (8).

Sada ćemo dokazati da je skup vrijednosti ovako konstruirane funkcije $x \mapsto a^x$ skup $\mathbb{R}^+ = \{y \in \mathbb{R} | y > 0\}$ svih pozitivnih brojeva. Zaista. Neka je $y_0 \in \mathbb{R}^+$. Tada (zbog $a \neq 1$) postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $a^{-n} < y_0 < a^n$. Stoga su skupovi $A = \{x \in \mathbb{R} | a^x < y_0\}$ i $B = \{x \in \mathbb{R} | y_0 < a^x\}$ oba neprazni. Zbog $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ (za $a > 1$), slijedi da za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ za koji je $x_1 \in A$ i $x_2 \in B$ vrijedi $x_1 < x_2$. Prema aksiomu potpunosti za realne brojeve slijedi da postoji $x \in \mathbb{R}$

takav da je $x_1 \leq x_0 \leq x_2$ za sve $x_1 \in A$, $x_2 \in B$. Pokažimo $a^{x_0} = y_0$. Kad bi bilo $a^{x_0} < y_0$, onda bi zbog $a^{x_0+\frac{1}{n}} \to a^{x_0}$ za $n \to \infty$ postojao $n \in \mathbb{N}$ takav da je $a^{x_0+\frac{1}{n}} < y_0$, pa bi bilo $x_0 + \frac{1}{n} \in A$, a zbog $x_0 < x_0 + \frac{1}{n}$ bilo bi $x_0 + \frac{1}{n} \in B$, jer je x_0 rezna točka za skupove A i B. No, zbog $A \cap B = \emptyset$ slijedi da je $a^{x_0} < y_0$ nemoguće. Analogno se dokaže da je $a^{x_0} > y_0$ nemoguće. Znači $a^{x_0} = y_0$.

Do sada smo razmatrali slučaj $a > 1$. No sve konstrukcije možemo napraviti i za $0 < a < 1$. Očito je jedina razlika pri tom da je $0 < a^r < 1$ za $r > 0$. Stoga (3) i (6) postaju za $0 < a < 1$: $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$.

Sva prethodna diskusija se može rezimirati sljedećim teoremom.

TEOREM 1. *Neka je $a > 0$, $a \neq 1$ realan broj. Tada postoji jedinstvena funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ s ovim svojstvima*

1. $a^1 = a$,

2. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$,

3. $a^x \to a^{x_0}$ *za* $x \to x_0$,

4. $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$, *za* $a > 1$,

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$, *za* $0 < a < 1$,

5. Skup vrijednosti (tj. slika) funkcije $x \mapsto a^x$ je skup $\mathbb{R}^+ = \{y \in \mathbb{R} | y > 0\}$ svih pozitivnih brojeva.

Preslikavanje $x \mapsto a^x$ zove se **eksponencijalna funkcija s bazom** a. Katkad je još u upotrebi oznaka $\exp_a$. Najvažniji slučaj je $a = e := \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx$ $\approx 2{,}71828\ldots$ i tada se naprosto piše $e^x = \exp x$.

Eksponencijalna funkcija $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ je strogo monotona, pa je stoga bijekcija. Zbog toga ima inverznu funkciju koja se zove **logaritamska funkcija s bazom** a $(0 < a \neq 1)$ i označava sa

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}.$$

Za $a = e$ logaritamska funkcija ili logaritam se zove **prirodni logaritam** i označava sa $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, a za $a = 10$ **dekadski** ili **Briggsov logaritam** (kod nje se jednostavno piše $\log_{10} = \log$).

Po definiciji logaritma kao inverzne funkcije od eksponencijalne slijedi da vrijedi

$$\log_a(a^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$a^{\log_a y} = y, \quad \forall y \in \mathbb{R}^+.$$

Iz ove definicije logaritma i svojstava eksponencijalne funkcije iz prethodnog teorema dobivamo sljedeća svojstva funkcije $\log_a$.

TEOREM 2. *Za $0 < a \neq 1$ vrijedi*

1.' $\log_a a = 1$,

2.' $\log_a(y_1 \cdot y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$, *3.'* $\log_a y \to \log_a y_0$ *za* $\mathbf{R}^+ \ni y \to y_0 \in \mathbf{R}^+$

4.' $y_1 < y_2 \Leftrightarrow \log_a y_1 < \log_a y_2$, *za* $a > 1$

$y_1 < y_2 \Leftrightarrow \log_a y_1 > \log_a y_2$, *za* $0 < a < 1$,

5.' Skup vrijednosti (tj. slika) funkcije $\log_a : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ *je čitav skup* $\mathbf{R}$.

6.' $\log_a(b^\alpha) = \alpha \log_a b$, $\forall b > 0$ *i* $\alpha \in \mathbf{R}$.

Dokaz. Iz svojstva 1. prethodnog teorema dobivamo 1.' Iz svojstva 2. slijedi 2.' Zaista, neka je $x_1 = \log_a y_1$, $x_2 = \log_a y_2$. Tada je $y_1 = a^{x_1}$, $y_2 = a^{x_2}$, pa je $y_1 \cdot y_2 = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$, a odavde $\log_a(y_1 \cdot y_2) = x_1 + x_2$. Isto se tako vidi da svojstvo 4. povlači 4.' kao i 5. $\Rightarrow$ 5.' Dokažimo sada 3.' Zbog svojstva 2.', imamo

$$-\varepsilon < \log_a y - \log_a y_0 = \log_a\left(\frac{y}{y_0}\right). < \varepsilon$$

Stoga je

$$-\varepsilon < \log_a y - \log_a y_0 < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \log_a(a^{-\varepsilon}) = -\varepsilon < \log_a\left(\frac{y}{y_0}\right) < \varepsilon = \log_a(a^{\varepsilon}),$$

a to je zbog svojstva 4.' ekvivalentno sa

$$-a^{\varepsilon} < \frac{y}{y_0} < a^{\varepsilon} \quad \text{za} \quad a > 1$$

$y_0 a^{-\varepsilon} < y < y_0 a^{\varepsilon}$ $a > 1$

$y_0 a^{\varepsilon} < y < y_0 a^{-\varepsilon}$

i

$$a^{\varepsilon} < \frac{y}{y_0} < a^{-\varepsilon} \quad \text{za} \quad 0 < a < 1.$$

$\Rightarrow -\varepsilon < \log_a y - \log_a y_0 < \varepsilon$

Odavde dobivamo $y_0 a^{-\varepsilon} < y < y_0 a^{\varepsilon}$ za $a > 1$ ili $y_0 a^{\varepsilon} < y < y_0 a^{-\varepsilon}$ za $0 < a < 1$, što povlači $-\varepsilon < \log_a y - \log_a y_0 < \varepsilon$. Dakle,

$$\lim_{\mathbf{R}^+ \ni y \to y_0 \in \mathbf{R}^+} \log_a y = \log_a y_0.$$

Sada dokažimo 6.' Prvo za $\alpha = n \in \mathbf{N}$ tvrdnja je točna, jer zbog svojstva 2.' indukcijom po n dobivamo $\log_a(y_1 \cdot \ldots \cdot y_n) = \log_a y_1 + \ldots + \log_a y_n$. Dakle je $\log_a b^n = \log_a b + \ldots + \log_a b = n \log_a b$. Nadalje, vrijedi $\log_a(b)^{-1} = -\log_a b$, jer iz $\beta = a \log_a b$ slijedi $b = a^\beta$, $b^{-1} = a^{-\beta}$, pa je $\log_a(b)^{-1} = -\beta$. Iz ovih dviju činjenica neposredno slijedi $\log_a(b^\alpha) = \alpha \log_a b$, za $\alpha \in \mathbf{Z}$.
Pokažimo dalje da je $\log_a(b^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\log_a b$ za $n \in \mathbf{Z}$. Zaista, imamo

$$\log_a b = \log_a(b^{\frac{1}{n}})^n = n \log_a(b^{\frac{1}{n}}).$$

Odavde slijedi da 6.' vrijedi za sve racionalne brojeve $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$, jer imamo redom

$$\frac{m}{n}\log_a b = m \log_a b^{\frac{1}{n}} = \log_a(b^{\frac{1}{n}})^m = \log_a(b^{\frac{m}{n}}).$$

Konačno, kako vrijedi $\log_a b^r = r \log_a b$, $\forall r \in \mathbf{Q}$, to ako pustimo da r teži (u $\mathbf{Q}$) prema α, onda iz svojstva 3. eksponencijalne funkcije i svojstva 3.' logaritamske

funkcije dobivamo da ako je r dovoljno blizu α onda je b^r blizu b^α i $\log_a b^r$ je blizu $\log_a b^\alpha$. To znači da je $\lim_{\mathbf{Q} \ni r \to \alpha} \log_a b^r = \log_a b^\alpha$. No zbog $\log_a b^r = r \log_a b$ slijedi

$$\log_a b^\alpha = \lim_{\mathbf{Q} \ni r \to \alpha} \log_a b^r = \lim_{\mathbf{Q} \ni r \to \alpha} r \log_a b = \alpha \log_a b.$$

Time je 6.' dokazano. ∎

Iz svojstva 6.' prethodnog teorema možemo onda dokazati svojstvo

$$6. \qquad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}, \quad a > 0.$$

Zaista. Za $a = 1$, po definiciji je $1^\alpha = 1$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, pa je u tom slučaju tvrdnja trivijalna. Ako je $a \neq 1$, onda iz 6.' slijedi

$$\log_a((a^\alpha)^\beta) = \beta \log_a(a^\alpha) = \beta \cdot \alpha \log_a a = \alpha\beta = \log_a(a^{\alpha\beta}),$$

pa zbog svojstva 4.' slijedi tvrdnja i u ovom slučaju.

Pomoću ovih funkcija, za bilo koji $\alpha \in \mathbf{R}$ definiramo funkciju **opća potencija s eksponentom** α kao funkciju $x \mapsto x^\alpha$ s domenom $\mathbf{R}^+$ i kodomenom $\mathbf{R}^+$ definiranu kao kompoziciju eksponencijalne i logaritamske funkcije, tj. sa

$$x^\alpha = a^{\log_a x^\alpha} = a^{\alpha \log_a x}.$$

Najčešće se za a uzima vrijednost $a = e$, pa je

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} = \exp(\alpha \ln x).$$

Iz svojstva eksponecijalne i logaritamske funkcije imamo

$$(xy)^\alpha = \exp(\alpha \ln xy) = \exp(\alpha \ln x + \alpha \ln y) = \exp(\alpha \ln x)\exp(\alpha \ln y) = x^\alpha \cdot y^\alpha.$$

Opća potencija strogo raste za $\alpha > 0$, a strogo pada za $\alpha < 0$. Nadalje, opća potencija $x \mapsto x^\alpha$ je bijekcija $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ za $\alpha \neq 0$. Stoga za svako $y_0 > 0$ postoji jedinstveni $x_0 > 0$ takav da je $x_0^\alpha = y_0$. Za $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, često pišemo

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

i funkciju $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ zovemo (aritmetički) **n-ti korijen.**

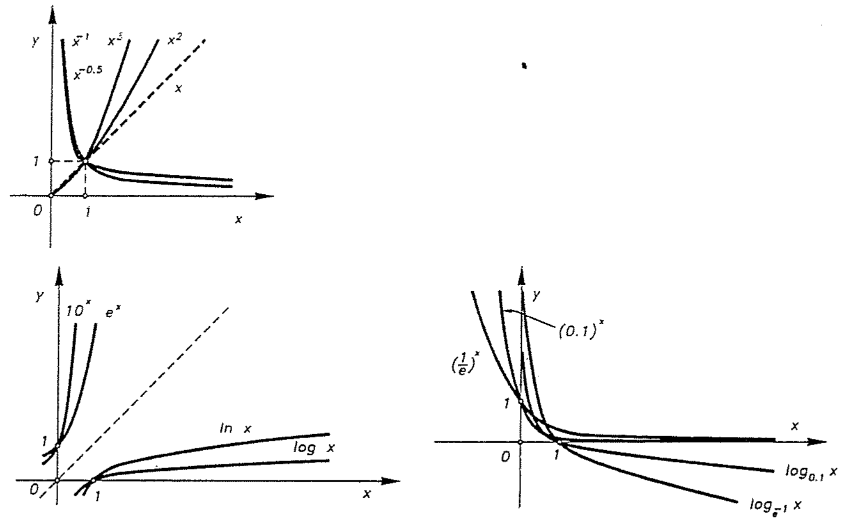
Neki grafovi eksponencijalne i logaritamske funkcije kao i opće potencije izgledaju kao na sl. 10.

Spomenimo još jednu korisnu formulu kojom se logaritmi mogu svesti na logaritme s nekom drugom bazom (npr. dekadske, prirodne):

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad a, b, c > 0, \quad a, c \neq 1.$$

To odmah slijedi ovako. Iz $\log_a b = x$, slijedi $b = a^x$, a odavde logaritmiranjem (s bazom c) slijedi formula. Stoga je i veza između prirodnih i dekadskih logaritama dana sa

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} = (\log e) \cdot \ln x \approx 0{,}43429448 \ln x.$$



Sl. 10.

odnosno

$$\ln x = \frac{\log x}{\log e} = (\ln 10) \log x \approx 2{,}30258509 \log x.$$

Napomenimo na kraju da se eksponencijalna i logaritamska funkcija mogu uvesti i pomoću derivacije ili pomoću redova:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Logaritmi su često tabelirani, pa se pomoću logaritama i logaritamskih tablica ili kalkulatora mogu vršiti relativno brzo razna računanja koja daju približnu ili katkad točnu vrijednost.

Primjer 1. Izračunajte (približno)

$$A = \frac{\sqrt[3]{58{,}11}}{\sqrt[5]{0{,}63}} \cdot 0{,}71^2.$$

Rješenje. Logaritmiranje (s bazom 10) gornje jednakosti daje

$$\log A = \frac{1}{3} \log 58{,}11 - \frac{1}{5} \log 0{,}63 + 2 \log 0{,}71.$$

Iz logaritamskih tablica ili kalkulatora dobivamo $\log A = 0{,}330732$. Sada to "antilogaritmiramo", tj. računamo $A = 10^{0{,}330732}$, za što također koristimo tablice ili kalkulator. Tako dobivamo $A = 2{,}1415696\ldots$. ■

Graf eksponencijalne funkcije $x \mapsto a^x$ prolazi točkom $(0,1)$, jer je $a^0 = 1$. Kada x raste desno od nule onda a^x u slučaju $a > 1$ vrlo brzo raste u beskonačnost. U to se čitatelj može intuitivno vrlo brzo uvjeriti uzevši npr. slučaj $a = 10$ i za $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. U stvari je $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ za $a > 1$. Isto tako je i $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$ za $a > 1$ što nije teško pokazati iz prethodna dva teorema, a i $\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$ za $\alpha \geq 1$. Postavlja se prirodno pitanje "kako brzo" eksponencijalna i ove druge funkcije rastu, tj. koja "brže" raste? Ta pitanja su ne samo od teorijske nego i od velike praktične važnosti. Naime, u analizama raznih alogritama važno je znati njihovu **efikasnost**, tj. vremensku složenost ili kraće **složenost algoritma**, što je naprosto broj osnovnih računskih operacija koje algoritam izvodi prilikom prijelaza od ulaznih podataka do izlaznih rezultata. Tako npr. za sortiranje od n podataka (realnih brojeva) tj. njihov uređaj po veličini treba običnom algoritmu kojim se uspoređuju svaka dva broja $\frac{n(n-1)}{2}$ uspoređivanja, dok postoje algoritmi sortiranja sa prosječno $n \log_2 n$ uspoređivanja. Da usporedimo koji algoritam je bolji, trebamo pogledati njihov relativni asimptotski odnos, tj. pogledati kvocijent i pustiti da n raste, tj. $n \to \infty$ (točnije $\mathbf{N} \ni n \to \infty$). Drugim riječima gledamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log_2 n}{n(n-1)/2} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{n-1} = 0,$$

jer je $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{n} = 0$. Kazat ćemo stoga da n raste brže u beskonačnost nego $\log_2 n$, pa ćemo i shodno tome reći da je drugi algoritam bolji od prvoga. Ta ideja se formalizira tako da se stavi za funkcije $f, g : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ da je

$$f(n) \prec g(n) :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Ova relacija je tranzitivna: $f(n) \prec g(n)$ & $g(n) \prec h(n) \Rightarrow f(n) \prec h(n)$. Tako je $n \prec n^2$, $\log n \prec n$, $n^5 \prec 2^n$, $10^n \prec n!$ itd. Ovu relaciju $\prec$ možemo tako primijeniti na asimptotsko rangiranje mnogih funkcija. Tako npr. imamo

$$1 \prec \log\log n \prec \log n \prec n^\varepsilon \prec n^c \prec n^{\log n} \prec c^n \prec n^n \prec c^{c^n},$$

pri čemu su ε i c proizvoljne konstante, $0 < \varepsilon < 1 < c$, a log je logaritamska funkcija s bazom > 1 (najčešće se u računarstvu javlja $\log_2$). Sve gornje funkcije osim konstante 1 idu u beskonačno kada n raste u beskonačnost pa stoga kada pokušavamo u ovu hijerarhiju ugurati novu funkciju onda se pitamo ne samo da li ta funkcija ide u beskonačnost nego i kako brzo.

Tu čitatelj treba kultivirati svoj stav i osjećaj kada radi asimptotsku analizu: treba misliti na VELIKO kada varijabla teži u beskonačnost. Npr. hijerarhija kaže da je $\log n \prec n^{0{,}001}$. Ovo se može nekome učiniti pogrešnim ako misli samo na malešne brojeve kao jedan "googol" $n = 10^{100}$, jer u tom slučaju je $\log n = 100$, dok je $n^{0{,}0001} = 10^{0{,}01} \approx 1{,}0233$. No ako idemo puno dalje na "googolplex" $n = 10^{10^{100}}$, onda je $\log n = 10^{100}$, a to je skoro ništa u odnosu na $n^{0{,}0001} = 10^{10^{96}}$. Ako je ε jako mali broj (recimo manji od $1/10^{10^{100}}$), vrijednost od $\log n$ je mnogo manja od

n^ε, ako je n dovoljno velik. Ako, naime, stavimo $n = 10^{10^{2k}}$, gdje je k tako velik da je $\varepsilon \geq 10^{-k}$, onda je $\log n = 10^{2k}$, ali $n^\varepsilon \geq 10^{10^k}$. Stoga kvocijent $(\log n)/n^\varepsilon$ teži nuli kada $n \to \infty$.

Kompleksna eksponencijalna funkcija i Eulerova formula

Eksponencijalnu funkciju $e^z = \exp z$ možemo definirati i na sljedeći način i to za kompleksne brojeve. Prvo promotrimo (kompleksni) red

$$1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Lako se vidi koristeći Cauchyjev kriterij da taj red apsolutno konvergira u $\mathbf{C}$. Tada definiramo

$$e^z = \exp z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \ldots . \tag{1}$$

Pokazuje se da se ova definicija eksponencijalne funkcije podudara s onom ranijom za realne brojeve. Na taj je način definirana **kompleksna eksponencijalna funkcija** $\exp : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. S tim u vezi definirajmo i funkcije

$$\cos z := 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \tag{2}$$

$$\sin z := \frac{1}{1!}z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \tag{3}$$

koje se redom zovu **kompleksni kosinus** i **sinus**. I ove funkcije se podudaraju s uobičajenim kosinusom i sinusom na skupu $\mathbf{R}$ (usp. pogl. IV). Ako u formulu (3) uvrstimo $z = ix$, grupiranjem sumanada u parcijalnim sumama, pa prelaskom na limes dobivamo jednakost redova

$$1 + \frac{1}{1!}(ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \ldots =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots\right) + i\left(\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots\right),$$

pri čemu smo koristili $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ itd. Uzmemo li u obzir gornje definicije za cos i sin dobivamo čuvenu **Eulerovu formulu**

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x} \tag{4}$$

Napomenimo da ona vrijedi za sve $x \in \mathbf{C}$, pa posebno i za sve realne x. Iz formule za cos i sin se odmah vidi da vrijedi

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

Dakle, cos je parna, a sin neparna funkcija. Stoga dobivamo

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Odavde i iz Eulerove formule slijedi

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

Ovo dakle vrijedi za svaki kompleksni broj x, pa je bolje pisati

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}). \tag{5}$$

Slično se tada definiraju i kompleksne **hiperbolne funkcije kosinus hiperbolni** ch i **sinus hiperbolni** sh

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}). \tag{6}$$

Izvedimo sada neke poznate formule. Prvo nam treba ova lema.

LEMA 1. *Za $a, b \in \mathbf{C}$ vrijedi*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}a^n\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}b^m\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(a+b)^k.$$

Dokaz. Znamo da redovi na lijevoj strani apsolutno konvergiraju. Množenjem tih redova grupirajmo zajedno monome $a^m b^n$ s jednakom sumom eksponenata $m + n = k$. Tako dobivamo red

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m+n=k} \frac{1}{n!}a^n \frac{1}{m!}b^m \right).$$

Koristeći binomnu formulu imamo dalje

$$\sum_{m+n=k} \frac{1}{n!m!}a^n b^m = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!(k-n)!} a^n b^{k-n} = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} a^n b^{k-n} = \frac{1}{k!}(a+b)^k.$$

Odavde slijedi formula u lemi. ■

Iz ove leme tada neposredno slijedi uobičajena formula za eksponencijalnu funkciju

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2, \quad \text{tj.} \quad e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}. \tag{7}$$

Posebno odavde slijedi da je $e^{2z} = (e^z)^2$.

Kvadriranjem formule (5), koristeći $(e^z)^2 = e^{2z}$ i zbrajanjem slijedi odmah osnovna veza među trigonometrijskim funkcijama:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1,$$

a slično se dobiva za hiperbolne funkcije $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$.

Izvedimo sada adicione teoreme za cos i sin. Iz Eulerove formule imamo

$$e^{i(z_1+z_2)} = \cos(z_1+z_2) + i\sin(z_1+z_2). \tag{8}$$

S druge strane koristeći formulu (7) i Eulerovu formulu slijedi

$$\begin{aligned} e^{i(z_1+z_2)} &= e^{iz_1}e^{iz_2} = (\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2) = \\ &= (\cos z_1\cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) + i(\sin z_1\cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2). \end{aligned} \tag{9}$$

Ako su z_1 i z_2 realni brojevi, onda bi izjednačavanjem realnih i imaginarnih dijelova u (8) i (9) dobili odmah tražene adicione formule. No, mi želimo te formule dokazati za sve $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$. U tu svrhu koristeći parnost funkcije $z \mapsto \cos z$ i neparnost funkcije $z \mapsto \sin z$, napišimo još jednakost

$$e^{-i(z_1+z_2)} = (\cos z_1\cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) - i(\sin z_1\cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2). \tag{10}$$

Zbrajanjem i oduzimanjem (9) i (10), iz formule (5) tada slijedi

$$\cos(z_1+z_2) = \frac{1}{2}(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1+z_2) = \frac{1}{2}(e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2.$$

Ove se formule nazivaju **adicione formule** za cos i sin. Na sličan bi se način mogle tako dobiti adicione formule za hiperboličke funkcije ch i sh. Osnovna veza među trigonometrijskim i hiperbolnim funkcijama slijedi odmah iz formula (5) i (6), a glasi

$$\operatorname{ch} z = \cos(iz), \qquad \operatorname{sh} z = -i\sin(iz). \tag{11}$$

Međutim, direktno iz definicija (2), (3) ili (5) je vrlo teško dobiti takve geometrijske očiglednosti kao što su npr. $\sin\pi = 0$ ili $\cos(z+2\pi) = \cos z$. Mi ćemo prirodna objašnjenja za te stvari dati u pogl. IV Trigonometrija. Ovdje smo dali jednu matematički preciznu definiciju trigonometrijskih funkcija. Kao što ćemo u pogl. IV vidjeti, za $x \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$\cos(x+2\pi) = \cos x, \quad \sin(x+2\pi) = \sin x, \quad \cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0.$$

Stoga uvrstimo li u Eulerovu formulu $z = 2\pi$, dobivamo

$$\boxed{e^{2\pi i} = 1} \tag{12}$$

Ta formula veže na neki način najvažnije konstante raznih područja matematike; naime 1, 2 iz aritmetike, π iz geometrije, e iz analize, i iz algebre.

Iz Eulerove formule slijedi sada da se trigonometrijski zapis kompleksnog broja z može napisati u obliku

$$z = re^{i\varphi}$$

gdje je $r = |z|$ modul broja z, a φ njegov argument. Formula (7) tada povlači da se kompleksni brojevi $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ množe ovako

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Posebno, odavde slijedi da Moivreova formula poprima vrlo jednostavan oblik:

$$z^n = r^ne^{in\varphi}.$$

SUBOTA

§ 6. Jednadžbe i nejednadžbe

6.1. Jednadžbe

Već smo se upoznali s algebarskom jednadžbom. Sada opišimo što se podrazumijeva općenito pod pojmom jednadžbe. Obično zadamo neki podskup brojeva $S \subseteq \mathbf{R}$ ili $S \subseteq \mathbf{C}$ koji zovemo **osnovno područje** i varijable $x, y, z, \ldots$ ili $a, b, c, \ldots$. Iz brojeva i varijabli formiramo tada algebarske izraze (tj. funkcije); npr.

$$5, \quad -4/\sqrt{3}, \quad (3x+2)/a \quad (a \neq 0), \quad \sqrt[5]{x^2+1}/(y-z) \quad \text{itd.}$$

Ovakve izraze možemo proširiti i sa algebarskim izrazima tj. funkcijama kao što su eksponencijalna i druge: a^x, $\log_a x$; trigonometrijske itd.

Općenito, neka su $S_1, S_2, \ldots, S_n \subseteq \mathbf{R}$ (ili $\mathbf{C}$) zadani skupovi, a $f_1, f_2 : S_1 \times \times S_2 \times \ldots \times S_n \to \mathbf{R}$ zadane funkcije od varijabli $x_1, \ldots, x_n$, $x_i \in S_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Izrazi $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ i $f_2(x_1, \ldots, x_n)$ su **ekvivalentni** obzirom na područje $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ ako vrijedi $f_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f_2(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, za sve $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S$. Prijelaz iz izraza f_1 na ekvivalentni izraz f_2 zove se **ekvivalentna transformacija izraza.** Taj pojam ovisi o području definicije S. Tako npr. $\sqrt{x^2} = x$ za nenegativne realne brojeve jest ekvivalentna transformacija, ali nije na skupu svih realnih brojeva.

Jednadžba nad S je jednakost $f_1(x_1, \ldots, x_n) = f_2(x_1, \ldots, x_n)$; u njoj imamo lijevu i desnu stranu. Ako se u njoj ne pojavljuju varijable, onda se radi o **jednakosti** koja je istinita ili lažna. Jednadžba predstavlja iskaz koji prelazi u istiniti ili lažni nakon uvrštavanja konkretnih brojeva umjesto varijabli. **Skup rješenja** ove jednadžbe je skup $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S | f_1(a_1, \ldots, a_n) = f_2(a_1, \ldots, a_n)\}$. Svaki element toga skupa zove se **rješenje jednadžbe,** a **riješiti jednadžbu** znači naći skup njenih rješenja. Dvije jednadžbe s n varijabli $x_1, \ldots, x_n$ nad istim skupom S su **ekvivalentne** ako su im skupovi rješenja jednaki. Tako su npr. $x^2 = 9$ i $x^3 = 27$ ekvivalentne nad $\mathbf{N}$, jer im je skup rješenja $\{3\}$, ali nisu ekvivalentne nad $\mathbf{Z}$, jer su im tu skupovi rješenja redom $\{-3, 3\}$ i $\{3\}$. **Ekvivalentne transformacije** jednadžbe su transformacije jednadžbe koje je prevode u ekvivalentnu jednadžbu.

Tako npr. promotrimo jednadžbu nad osnovnim područjem $\mathbf{R}$

$$\frac{3x+4}{x-2}=\frac{2x+12}{x+6}.$$

Napišemo li je u obliku $(3x+4)(x+6)=(x-2)(2x+12)$, dobili smo neekvivalentnu jednadžbu, jer su skupovi rješenja $\{8\}$, odnosno $\{-6,8\}$.

Ako je jednadžba $F_1=F_2$ ekvivalentna jednadžbi $F_1'=F_2'$, pišemo $F_1=F_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow F_1'=F_2'$.

Vrijede ova pravila (dokažite ih): 1) $F_1=F_2 \Leftrightarrow F_2=F_1$. 2) Ako je $F_1=F_1'$ i $F_2=F_2'$, onda $F_1=F_2 \Leftrightarrow F_1'=F_2'$. 3) $F_1=F_2 \Leftrightarrow F_1+F=F_2+F$, gdje je F funkcija s istim (ili većim) područjem definicije kao F_1 i F_2. 4) $F_1=F_2 \Leftrightarrow F_1F=$ $=F_2F \Leftrightarrow F_1/F=F_2/F$, gdje je $F\not\equiv 0$ definirana na istom području kao F_1 i F_2 i tu je različita od nule.

Promotrimo npr. iracionalnu jednadžbu

$$\sqrt{x+4}=2x-7.$$

Njeno osnovno područje (nad $\mathbf{R}$) je $[-4,+\infty)$. Kvadriranjem dobivamo $4x^2-29x+$ $+45=0$, čija su rješenja $x_1=5$, $x_2=9/4$. Jedino rješenje polazne jednadžbe je $x=5$. Dakle, kvadriranjem smo dobili neekvivalentnu jednadžbu (stoga, oprez!).

Uočite da je $x_2=9/4$ korijen jednadžbe $\sqrt{x+4}=7-2x$, kvadriranjem koje se dobije opet ista kvadratna jednadžba.

Iracionalna jednadžba je ona u kojoj se nepoznanica javlja (u obliku polinoma) pod korijenom.

Transcendentna jednadžba je ona koja uključuje transcendentne funkcije kao što su eksponencijalna, logaritamska, trigonometrijske (i njeni inverzi). Sada ćemo primjerima pokazati neke tipove iracionalnih jednadžbi i sustava i načine njihovih rješavanje.

Primjer 1. Riješite jednadžbu $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-11}$.
Rješenje. Kvadriranje daje

$$2x+6-2\sqrt{(2x+6)(x-1)}+x-1=3x-11,$$

odnosno

$$\sqrt{(2x+6)(x-1)}=8.$$

Ponovnim kvadriranjem i sređivanjem slijedi

$$x^2+2x-35=0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1=-7$ i $x_2=5$. No kako je područje definicije jednadžbe $x\geq 11/3$, slijedi da je jedino rješenje naše jednadžbe $x=5$. ■

Primjer 2. Riješite jednadžbu $\sqrt{x^2+2x+13}-\sqrt{x^2+2x+6}=1$.
Rješenje. Pomnožimo jednadžbu s konjugiranim izrazom lijeve strane. Dobivamo

$$\sqrt{x^2+2x+13}+\sqrt{x^2+2x+6}=7.$$

Zbrajanjem ovih jednadžbi slijedi $\sqrt{x^2+2x+13}=4$, a odavde kvadriranjem $x^2+2x-3=$ $=0$. Rješenja ove jednadžbe su $x_1=-3$ i $x_2=1$. Kako je područje definicije polazne jednadžbe čitav $\mathbf{R}$, to su i sva rješenja naše jednadžbe. ■

Primjer 3. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{3x-2}$.
Rješenje. Kubiranjem jednadžbe slijedi

$$x+1+3\sqrt[3]{(x+1)^2(2x-3)}+3\sqrt[3]{(x+1)(2x-3)^2}+2x-3=3x-2,$$

a odavde

$$\sqrt[3]{(x+1)(2x-3)}(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{2x-3})=0.$$

Stoga su sva rješenja $x_1=-1$, $x_2=\frac{3}{2}$, $x_3=\frac{2}{3}$. ■

Primjer 4. Riješite sustav jednadžbi

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7$$
$$3x+2y=23.$$

Rješenje. Kvadriranjem prve jednadžbe slijedi

$$x+y+2\sqrt{(x+y)(2x+y+2)}+2x+y+2=49.$$

Iz druge jednadžbe slijedi da je $x+y+2x+y+2=25$, pa dobivamo

$$\sqrt{(x+y)(2x+y+2)}=12, \quad \text{tj.} \quad (x+y)(2x+y+2)=144.$$

Stavimo li $u=x+y$, $v=2x+y+2$, dobivamo sustav jednadžbi

$$u+v=25$$
$$uv=144.$$

u i v su korijeni kvadratne jednadžbe $z^2-25z+144=0$, čija rješenja su $u_1=16$, $v_1=9$, odnosno $u_2=9$, $v_2=16$. Sada sustav

$$x+y=16$$
$$2x+y+2=9$$

daje rješenje $(x,y)=(-9,25)$, a sustav

$$x+y=9$$
$$2x+y+2=16$$

rješenje $(x,y)=(5,4)$ polaznog sustava. ■

Sada pogledajmo neke **eksponencijalne i logaritamske jednadžbe** i sustave.

Primjer 5. Riješite jednadžbu $4^{x-2}=17\cdot 2^{x-4}-1$.
Rješenje. Stavimo $2^{x-2}=t$. Tada dobivamo jednadžbu

$$4t^2-17t+4=0,$$

čija su rješenja $t_1=1/4$, $t_2=4$. Tada iz $2^{x-2}=2^{-2}$ slijedi da je $x_1=0$, a iz $2^{x-2}=2^2$ slijedi $x_2=4$. x_1 i x_2 su sva rješenja polazne eksponencijalne jednadžbe. ■

Primjer 6. Riješite jednadžbe a) $9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$; b) $5^x = 3^{x-4} \cdot 2^x$.

Rješenje. a) Podijelimo jednadžbu sa 4^x. Dobivamo

$$(9/4)^x + (6/4)^x - 2 = 0, \quad \text{odnosno} \quad (3/2)^{2x} + (3/2)^x - 2 = 0.$$

Stavimo li $(3/2)^x = t$, dobivamo jednadžbu

$$t^2 + t - 2 = 0, \quad \text{s rješenjima} \quad t_1 = -2, \quad t_2 = 1.$$

Kako je $t_1 < 0$, slijedi $(3/2)^x = 1$, pa je $x = 0$ jedino rješenje. ■
b) $x \log 5 = (x-4)\log 3 + x \log 2$, a odavde $x = \frac{\log 81}{\log 6/5}$. ■

Primjer 7. Riješite jednadžbu $\log(3-x) + \log 2(1-x) = 3$.

Rješenje. Prvo mora biti $3 - x > 0$ i $1 - x > 0$, odakle slijedi da mora biti $x < 1$. Iz jednadžbe dobivamo

$$\log_2((3-x)(1-x)) = 3 \Rightarrow (3-x)(1-x) = 2^3 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. Kako je područje definicije $x < 1$, slijedi da je jedino rješenje naše jednadžbe $x = -1$. ■

Primjer 8. Riješite jednadžbu

$$|x-1|^{\log_3 x^2 - 2\log_x 9} = (x-1)^2.$$

Rješenje. Jednadžbu možemo napisati u obliku

$$|x-1|^{\log_3 x^2 - 2\log_x 9} = |x-1|^2.$$

To može vrijediti ako i samo ako je baza $|x-1| = 1$ ili ako su eksponenti jednaki, tj. $\log_3 x^2 - 2\log_x 9 = 2$. U prvom slučaju je $x = 0$ ili $x = 2$, ali je $x = 0$ van domene jednadžbe, dok $x = 2$ zadovoljava jednadžbu. U drugom slučaju stavimo $y = \log_3 x$. Tada dobivamo

$$2y - \frac{4}{y} = 2, \quad \text{tj.} \quad y^2 - y - 2 = 0.$$

Dva rješenja $y_1 = 2$, $y_2 = -1$ daju $x_1 = 9$, $x_2 = 1/3$. Dakle, polazna jedandžba ima rješenja $x_1 = 9$, $x_2 = 1/3$, $x_3 = 2$. ■

Primjer 9. Riješite ove sustave jednadžbi:

$$\text{a)} \begin{array}{c} 7^{x+1} \cdot 2^y = 4 \\ y - x = 3 \end{array}; \quad \text{b)} \begin{array}{c} \log_y x + \log_x y = 5/2 \\ xy = 8 \end{array}; \quad \text{c)} \begin{array}{c} 5^{\log x} = 3^{\log y} \\ (3x)^{\log 3} = (5y)^{\log 5} \end{array}.$$

Rješenje. a) Stavimo $y = x + 3$ u prvu jednadžbu. Dobivamo

$$7^{x+1} \cdot 2^{x+3} = 4 \Rightarrow 14^{x+1} = 1 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Stoga je $y = 2$.
b) Zbog $\log_y x = \frac{1}{\log_x y}$, stavivši $\log_y x = z$, prva jednadžba se svodi na jednadžbu $z + \frac{1}{z} = \frac{5}{2}$. Iz ove jednadžbe dobijemo dva rješenja $z_1 = 2$, $z_2 = 1/2$. Iz $\log_y x = 2$, odnosno $\log_y x = 1/2$ slijedi $x = y^2$ odnosno $x = y^{1/2}$. Tada iz druge jednadžbe slijedi $y^3 = 8$ odnosno $y^{3/2} = 8$. Prva jednadžba ima jedinstveno rješenje $y_1 = 2$, pa stoga $x_1 = 4$. Ako drugu jednadžbu kvadriramo, dobivamo $y^3 = 64$, a ova ima jedinstveno

realno rješenje $y_2 = 4$, odakle je $x_2 = 2$. Dakle, naš sustav ima dva realna rješenja $(x, y) = (4, 2), (2, 4)$.
c) Logaritmiramo li obje jednadžbe dobivamo sustav

$$\log x \log 5 = \log y \log 3$$

$$(\log x + \log 3)\log 3 = (\log y + \log 5)\log 5.$$

Iz prve jednadžbe dobivamo

$$\log y = \log x \cdot \frac{\log 5}{\log 3}.$$

To uvrsimo u drugu jednadžbu pa dobivamo

$$(\log x + \log 3)\log 3 = (\log x + \log 3)\frac{\log^2 5}{\log 3} \Rightarrow$$

$$(\log x + \log 3)\left[\log 3 - \frac{\log^2 5}{\log 3}\right] = 0.$$

Izraz u uglatoj zagradi je očito $\neq 0$, pa slijedi $\log x + \log 3 = 0$, pa je $x = 1/3$. Odavde se odmah dobiva $y = 1/5$. ■

6.2. Nejednakosti i nejednadžbe

Znamo da je polje realnih brojeva *potpuno uređeno* (v. pogl. I). Stoga za svaka dva realna broja a, b vrijedi jedna od tri relacije $a < b$, $a = b$, $a > b$. Podsjetimo da se osim simbola $>, <$ često koristimo i simbolima $\le, \ge$, tako npr. $a \le b$ znači da je $a < b$ ili $a = b$. Relacije $a < b$, $a > b$, $a \le b$, $a \ge b$ se naprosto zovu **nejednakosti.** Prve dvije se još zovu **stroge nejednakosti.** Iz aksioma za realne brojeve mogu se izvesti razna pravila za nejednakosti, ali se mi nećemo sada u to detaljno upuštati.

S nekim važnim nejednakostima smo se već susreli u pogl. I, kao što su

$$|a + b| \le |a| + |b|, \quad a, b \in \mathbf{C} \quad \textbf{(nejednakost trokuta)}$$

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|, \quad n \in \mathbf{N}, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$$

("nejednakost poligona")

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \quad n \in \mathbf{N}, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}^+$$

(aritmetičko-geometrijska nejednakost).

Kasnije ćemo dokazati još neke takve korisne "univerzalne nejednakosti"; a sada opišimo što se podrazumijeva pod nejednadžbom. Kao i kod jednadžbe, obično se zadaju funkcije $f_1, f_2 : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \to \mathbf{R}$ od n varijabli $x_1, \ldots, x_n$, $x_i \in S_i$. **Nejednadžba** nad S je nejednakost $f_1(x_1, \ldots, x_n) \le f_2(x_1, \ldots, x_n)$ u kojoj također imamo lijevu i desnu stranu. Naravno, ovdje možemo znak $\le$ varirati s $\ge, <, >$ i opet ćemo to zvati nejednadžbom. Ako tu uvrstimo za vrijednost varijable neke konkretne elemente, npr. $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$, pa ako vrijedi nejednakost

$f_1(a_1,\ldots,a_n) \le f_2(a_1,\ldots,a_n)$, onda kažemo da je **nejednadžba ispunjena** ili da **vrijedi** za vrijednosti $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. **Skup rješenja** ove nejednadžbe je skup $\{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in S | f_1(a_1,\ldots,a_n) \le f_2(a_1,\ldots,a_n)\}$, tj. skup svih elemenata područja definicije za koje je nejednadžba ispunjena. Svaki element toga skupa zove se **rješenje nejednadžbe**, a **riješiti nejednadžbu** znači naći skup njenih rješenja. Ako je skup rješenja prazan skup $\emptyset$, obično se kaže da nejednadžba nema rješenja. Dvije nejednadžbe (nad istim skupom S) su **ekvivalentne** ako se skupovi rješenja podudaraju. Tako su npr. $x^2 \le 9$, $|x| \le 3$ i $-3 \le x \le 3$ ekvivalentne nejednadžbe nad $\mathbf{R}$. U tom slučaju pišemo $x^2 \le 9 \Leftrightarrow |x| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3$. Ekvivalentnim transformacijama prevodimo nejednadžbu u njoj ekvivalentnu. Osnovna pravila za nejednadžbe su ova (dokažite ih):

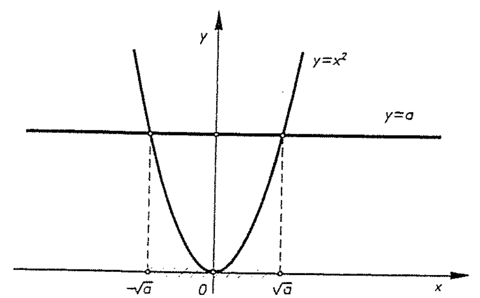
1) $F_1 < F_2 \Leftrightarrow F_2 > F_1$; 2) $F_1 \le F_2$ & $F_2 \le F_1 \Rightarrow F_1 = F_2$;
3) $F_1 \le F_2$ & $F_2 \le F_3 \Rightarrow F_1 \le F_3$;
4) $F_1 \le F_2$ & $F_3 \le F_4 \Rightarrow F_1 + F_3 \le F_2 + F_4$;
5) $F_1 \le F_2, F_3 > 0 \Rightarrow F_1F_3 \le F_2F_3$; 6) $F_1 \le F_2, F_3 < 0 \Rightarrow F_1F_3 \ge F_2F_3$;
7) $0 < F_1 \le F_2$ ili $F_1 \le F_2 < 0 \Rightarrow 1/F_1 \ge 1/F_2$; 8) $F_1 < F_2$ & $F_2 \le F_3 \Rightarrow F_1 < F_3$.

Pokažimo sada nekim primjerima kako se rješavaju nejednadžbe.

Primjer 10. Riješite nejednadžbe a) $2x + 4 \le 5x - 7$; b) $x^2 \le a$ ($a \in \mathbf{R}$ zadan broj); c) $ax^2 + bx + c \ge 0$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$ zadani brojevi, $a \ne 0$).

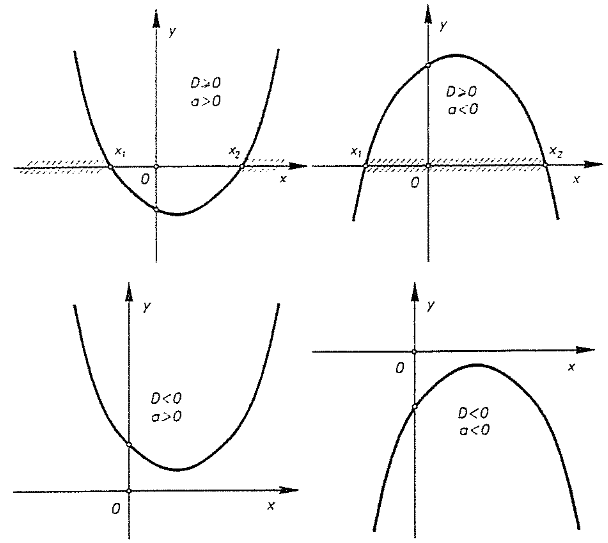
Rješenje. a) $2x + 4 \le 5x - 7 \Leftrightarrow 3x \ge 11 \Leftrightarrow x \ge 11/3$. Stoga je skup svih rješenja beskonačni zatvoreni poluinterval $[11/3, +\infty) \subset \mathbf{R}$.

b) Ako je $a < 0$, nejednadžba nema rješenja nad $\mathbf{R}$, tj. skup rješenja je prazan skup $\emptyset$. Ako je pak $a > 0$, onda je $x^2 \le a \Leftrightarrow -\sqrt{a} \le x \le \sqrt{a}$. Dakle, skup rješenja je segment $[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$. To se može ilustrirati s grafom parabole $y = x^2$ (v. pogl. VI) iz kojeg se točno vidi gdje je vrijednost funkcije $x \mapsto x^2 = y$ manja od vrijednosti funkcije $x \mapsto a$, tj. od pravca $y = a$. Treba parabolu i pravac presjeći i naći apscise presjecišta. Parabola je ispod pravca između apscisa točaka presjeka.



Sl. 11.

c) Opet se "elegantno" rješenje nalazi grafički. Nacrta se graf parabole $y = ax^2 + bx + c$. Odrede se nultočke x_1, x_2 ($x_1 \le x_2$). Skup rješenja nejednadžbe ovisi o tome da li parabola siječe os x, tj. da li je diskriminanta $D = b^2 - 4ac \ge 0$ ili $D < 0$ kao i o tome kakav je predznak od a. Tako za $D \ge 0$, $a > 0$, rješenje čine unija $\langle -\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty\rangle$; za $D \ge 0$ $a < 0$ rješenje je segment $[x_1, x_2]$; za $D < 0$, $a > 0$ rješenje je čitav $\mathbf{R}$, i konačno za $D < 0$, $a < 0$ rješenje je $\emptyset$. ■

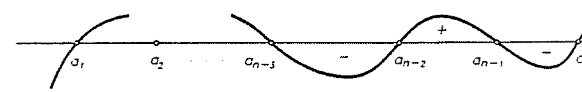


Sl. 12.

Komentirajmo pobliže sljedeći problem. Neka su zadani brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Treba riješiti nejednadžbu

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) > 0. \qquad (*)$$

Takve nejednadžbe se mogu riješiti tzv. **metodom intervala.** Ta se metoda sastoji u sljedećem. Na brojevnom pravcu nanesemo brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ u rastućem poretku. Na intervalu iza najvećeg broja a_n stavimo znak plus, a na sljedećem lijevom intervalu znak minus, pa zatim opet znak plus pa minus itd. (v. sl. 13)



Sl. 13.

Tada je rješenje nejednadžbe (*) unija intervala nad kojima je znak plus. Slično se postupa kada rješavamo nejednadžbu

$$\frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)}{(x - \beta_1)(x - \beta_2) \cdot \ldots \cdot (x - \beta_m)} > 0, \qquad (**)$$

gdje su svi realni brojevi α_i, β_j međusobno različiti. Opet treba nanijeti sve točke α_i, β_j na brojevni pravac i postaviti predznake kao i prije. Skup rješenja nejednadžbe (**) je tada unija intervala nad kojima je znak plus. Dokazi ovih tvrdnji nisu teški, pa ih prepuštamo čitatelju.

Primjer 11. Riješite nejednadžbu

$$\frac{(x-2)(x-5)(x-6)}{(x-3)(x-4)} > 0.$$

Rješenje. Pomnožimo nejednadžbu s $(x-3)^2(x-4)^2$ Dobivamo

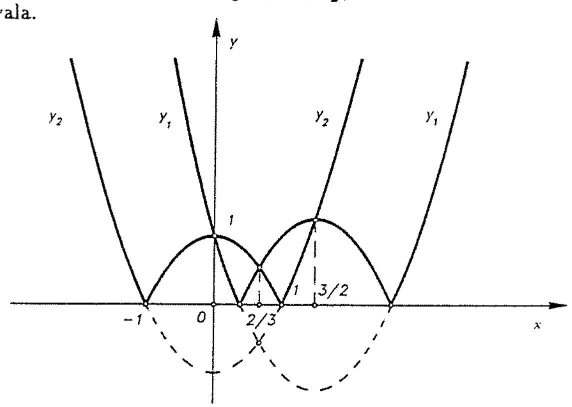
$$(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) > 0.$$

Metodom intervala dobivamo da je skup rješenja $\langle 2,3\rangle \cup \langle 4,5\rangle \cup \langle 6,+\infty\rangle$. ■

Primjer 12. Riješite nejednadžbu

$$\left|\frac{x^2-3x+1}{x^2-1}\right| > 1.$$

Rješenje. Nejednadžba je ekvivalentna za $x \neq \pm 1$ sa nejednadžbom $|x^2-3x+1| > |x^2-1|$. Prema tome treba vidjeti gdje je graf funkcije $y_1 = |x^2-3x+1|$ veći (tj. iznad) grafa funkcije $y_2 = |x^2-1|$, osim u točkama $x = \pm 1$. Sa slike 14. se vidi da je $y_1 > y_2$ za $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, 0\rangle \cup \langle \frac{2}{3}, 1\rangle \cup \langle 1, \frac{3}{2}\rangle$. Skup rješenja nejednadžbe je stoga ova unija intervala.



Sl. 14.

Primjer 13. Riješite nejednadžbe

a) $\dfrac{4x-1}{x-2} > -5$; b) $\dfrac{x^2-x}{x^2+9x+8} \geq 0$.

Rješenje. a) Prenesemo li sve na lijevu stranu, dobivamo ekvivalentnu nejednadžbu

$$\frac{9x-11}{x-2} > 0.$$

Množenjem s $(x-2)^2$, dobivamo $(9x-11)(x-2) > 0$. Odavde slijedi da je skup rješenja $\langle -\infty, 11/9\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle$.

b) Nejednadžba je ekvivalentna sa

$$\frac{x(x-1)}{(x+8)(x+1)} \geq 0.$$

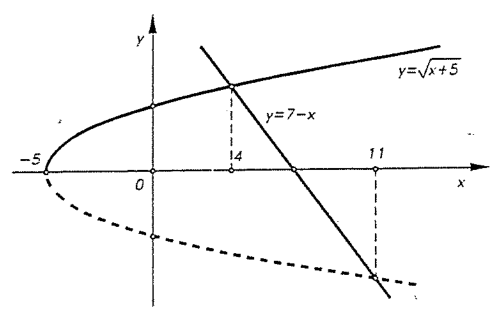
Metodom intervala (uz mali oprez s jednakošću) dobivamo skup rješenja $\langle -\infty, -8\rangle \cup$ $\cup \langle -1, 0] \cup [1, \infty\rangle$. ■

Za rješavanje raznih iracionalnih, eksponencijalnih i logaritamskih nejednadžbi često se koristimo sljedećim pravilima koja se lako dokazuju iz svojstava tih funkcija:

1. Neka su $f, g : S \to \mathbf{R}$, $f(x), g(x) \geq 0$ za $x \in S$ i neka je $n \in \mathbf{N}$. Tada su na skupu S nejednadžbe $f(x) > g(x)$ i $(f(x))^n > (g(x))^n$ ekvivalentne.
2. Za čvrst broj $a \in \langle 1, \infty\rangle$, nejednadžbe $f(x) > g(x)$ i $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ su ekvivalentne.
3. Za čvrst broj $a \in \langle 0, 1\rangle$, nejednadžbe $f(x) < g(x)$ i $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ su ekvivalentne.
4. Neka su $f, g : S \to \mathbf{R}$ dvije pozitivne funkcije na S, $a \in \langle 1, \infty\rangle$ čvrst broj. Tada su na S nejednadžbe $f(x) > g(x)$ i $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ ekvivalentne. Ako je $a \in \langle 0, 1\rangle$, onda su na S ekvivalentne nejednadžbe $f(x) > g(x)$ i $\log_a f(x) < \log_a g(x)$.

Primjer 14. Riješite nejednadžbu $\sqrt{x+5} > 7 - x$.

Rješenje. Prvo, mora biti $x + 5 \geq 0$, tj. $x \geq -5$. Ako je desna strana negativna, tj. $7 - x < 0$, $x > 7$, onda je nejednadžba zadovoljena jer je lijeva strana nenegativna (jer se uvijek uzima glavna vrijednost korijena!). U slučaju $x \leq 7$, obje strane su nenegativne, pa je naša nejednadžba tada ekvivalentna sa $x + 5 > 49 - 14x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 15x + 44 < 0$. Ova posljednja je zadovoljena za $4 < x < 11$. To zajedno sa $x \leq 7$ daje $4 < x \leq 7$. Dakle, rješenja naše nejednadžbe su za $x > 7$ i $4 < x \leq 7$, tj. skup rješenja je $\langle 4, +\infty\rangle$.



Sl. 15.

Na drugi način, našu nejednadžbu možemo riješiti tako da skiciramo grafove funkcija kao na sl. 15. Graf funkcije $y = \sqrt{x+5}$ $(x \geq 5)$ je pozitivni dio parabole $y^2 = x + 5$ (pogl. VI). Pravac $y = 7 - x$ siječe parabolu u točkama $x_1 = 4$ i $x_2 = 11$. Graf od $y = \sqrt{x+5}$ je "veći" (tj. iznad je) grafa funckije $y = 7 - x$ za $x \in \langle 4, +\infty\rangle$. Stoga je skup rješenja interval $\langle 4, +\infty\rangle$.

Primjer 15. Riješite nejednadžbu $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}\le 5$.

Rješenje. Područje definicije ovih funkcija je određeno sa $x\ge -1$. Stoga je za $x\ge -1$, naša nejednadžba ekvivalentna onoj koju dobivamo kvadriranjem:

$$x+1+x+6+2\sqrt{(x+1)(x+6)}\le 25 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+7x+6}\le 9-x.$$

Na lijevoj strani je nenegativni izraz, pa mora biti $x\le 9$. U tom slučaju opet kvadriranjem dobivamo

$$x^2+76+6\le 81-18x+x^2 \Leftrightarrow x\le 3.$$

Uzevši u obzir sve uvjete na x: $x\ge -1, x\le 9, x\le 3$, dobivamo konačno rješenje naše nejednakosti. To je segment $[-1,3]$. ■

Primjer 16. Riješite nejednadžbu

$$\sqrt{2(5^x+24)}-\sqrt{5^x-7}\ge\sqrt{5^x+7}.$$

Rješenje. Zajedničko područje definicije svih funkcija koje se pojavljuju je određeno s $5^x-7\ge 0$, tj. $7\le 5^x$, odakle slijedi $\log_5 7\le x<+\infty$. Naša nejednadžba je ekvivalentna s nejednadžbom

$$\sqrt{2(5^x+24)}\ge\sqrt{5^x+7}+\sqrt{5^x-7}.$$

Na obje strane su nenegativne funkcije (za dopustive x), pa kvadriranjem dobivamo ekvivalentnu nejednadžbu

$$2(5^x+24)\ge 5^x+7+5^x-7+2\sqrt{5^{2x}-49},$$

tj.

$$24\ge\sqrt{5^{2x}-49}.$$

Opet su obje strane nenegativne za dopustive x, pa kvadriranjem dobivamo ekvivalentnu nejednadžbu $576\ge 5^{2x}-49$, tj. $5^{2x}\le 625=5^4$. Rješenje ove nejednadžbe je za $-\infty<x\le 2$. Kako rješenje polazne nejednadžbe mora biti sadržano u području definicije, slijedi da je rješenje naše nejednadžbe presjek

$$[\log_5 7,+\infty\rangle\cap\langle-\infty,2]=[\log_5 7,2].\ ■$$

Primjer 17. Riješite nejednadžbu

$$\sqrt{3-9^{\sqrt{2-x}}+2\cdot 3^{\sqrt{2-x}}}+2\cdot 3^{2-x}>4.$$

Rješenje. Prvo mora biti $2-x\ge 0$, tj. $x\le 2$. Stavimo $3^{\sqrt{2-x}}=t$. Tada dobivamo

$$\sqrt{3-t^2+2t}+2t>4,$$

odnosno

$$\sqrt{3+2t-t^2}>4-2t.$$

Iz $3+2t-t^2\ge 0$ slijedi $t\in[-1,3]$. Za $t\in[-1,3]$ kvadriranjem i sređivanjem dobivamo $5t^2-18t+13<0$, što povlači $t\in\langle 1,13/5\rangle$. Stoga mora biti

$$1<3^{\sqrt{2-x}}\le 3.$$

Lijeva nejednakost daje $x<2$, a desna $x\ge 1$. Skup rješenja je dakle $[1,2\rangle$. ■

Primjer 18. Riješite nejednadžbu $\log_{1+x}(2-x)\le 1$.

Rješenje. Područje definicije funkcije na lijevoj strani je određeno s nejednadžbama $1+x>0$, $1+x\ne 1$ i $2-x>0$. Stoga je to područje $\langle-1,0\rangle\cup\langle 0,2\rangle$.

Sada nejednadžbu napišimo u obliku

$$\log_{1+x}(2-x)\le\log_{1+x}(1+x).$$

Razlikujemo dva slučaja.
I. $-1<x<0$. U tom slučaju je baza manja od jedinice, pa se antilogaritmiranjem znak nejednakosti obrće, tj. dobivamo

$$2-x\ge 1+x\Rightarrow x\le\frac{1}{2}.$$

Uzmemo li u obzir gornje restrikcije slijedi $-1<x<0$.
II. $0<x<2$. Sada je baza veća od jedinice, pa antilogaritmiranjem slijedi

$$2-x\le 1+x\Rightarrow x\ge\frac{1}{2}.$$

Uz restrikcije iz područja definicije dobivamo $[1/2,2\rangle$. Prema tome, skup svih rješenja nejednadžbe je $\langle-1,0\rangle\cup[1/2,2\rangle$. ■

Sada dokažimo još neke opće nejednakosti.

TEOREM 1 (Cauchy-Schwartzova nejednakost). *Za svako $n\in\mathbf{N}$ i $a_1,\dots,a_n$, $b_1,\dots,b_n\in\mathbf{R}$ vrijedi*

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\le(a_1^2+b_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots b_n^2).$$

Dokaz I. Promotrimo funkciju $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definiranu sa

$$f(t)=(a_1t+b_1)^2+\ldots+(a_nt+b_n)^2.$$

Očito je $f(t)\ge 0$ za sve $t\in\mathbf{R}$. Napišimo $f(t)$ drukčije:

$$f(t)=(a_1^2+\ldots+a_n^2)+2t(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)+(b_1^2+\ldots+b_n^2).$$

Zbog $f(t)\ge 0$, za sve $t\in\mathbf{R}$ za diskriminantu D ove kvadratne funkcije mora vrijediti da je $D\le 0$. Stoga je

$$D=4(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2-4(a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2)\le 0,$$

a odavde slijedi tvrdnja.

Zbog prvog zapisa funkcije f vidimo odmah da jednakost vrijedi ako i samo ako postoji $\lambda\ne 0$, tako da je $a_1=\lambda b_1,\dots,a_n=\lambda b_n$.

Dokaz II. Prvo se lako provjeri **Lagrangeov identitet:**

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)-\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^n(a_ib_j-a_jb_i)^2,$$

odakle odmah slijedi tvrdnja.

Dokaz III. Ovaj je dokaz geometrijske naravi, a u vezi je sa skalarnim produktom vektora u n–dimenzionalnom realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$. Naime, u tom prostoru se **skalarni produkt** (usp. pogl. IV) dvaju vektora $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ i $\underline{b} = b_1, \ldots, b_n)$ definira kao

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n,$$

a **norma** ili **modul vektora** $\|\underline{a}\| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$.

S druge strane, skalarni produkt $\underline{a} \cdot \underline{b}$ je jednak produktu modula vektora $\underline{a}$ i $\underline{b}$ i kosinusa kuta φ među njima, tj.

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\varphi.$$

Zbog $|\cos\varphi| \leq 1$ slijedi da je $|\underline{a} \cdot \underline{b}| \leq \|a\| \cdot \|b\|$, a odavde odmah slijedi Cauchy–Schwartzova nejednakost. ■

Primjer 19. Neka su $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, \ldots, b_n)$ dvije n–torke kompleksnih brojeva. Dokažite da tada vrijedi

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right).$$

(Pritom $|z|$ znači modul kompleksnog broja z).

Rješenje. Koristeći redom nejednakost trokuta i prethodni teorem, imamo

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right).$$

Time je tvrdnja dokazana. ■

TEOREM 2 (Hölderova nejednakost). *Neka su $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ dvije n–torke pozitivnih realnih brojeva, a p i q pozitivni brojevi takvi da je*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Tada vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako postoji $\lambda \neq 0$ tako da je $a^p = \lambda b^p$, tj. $a_i^p = \lambda b_i^p$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Prvo iskažimo jednu lemu.

LEMA 1. *Za brojeve $a, b > 0$ i $p, q > 0$ za koje je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, vrijedi*

$$\frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q} \geq ab.$$

Dokaz Hölderove nejednakosti. Stavimo

$$a = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}}, \qquad b = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}}.$$

Koristeći Lemu slijedi

$$\frac{1}{p} \frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} + \frac{1}{q} \frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q} \geq \frac{a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}}.$$

Ako ove nejednakosti sumiramo po $i = 1, 2, \ldots, n$, slijedi

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}},$$

a odavde odmah slijedi Hölderova nejednakost.

Dokaz Leme. Slijedi odmah iz ove opće geometrijsko–aritmetičke nejednakosti za pozitivne n-torke $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $p = (p_1, \ldots, p_n)$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}\right)^{1/P} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right) \Big/ P,$$

gdje je $P = \sum_{i=1}^{n} p_i$. ■

TEOREM 3 (Čebiševljeva nejednakost). *(i) Ako je $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ i $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, onda vrijedi*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n},$$

Ako je $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n > 0$, onda vrijedi

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \geq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n}.$$

(ii) **(Poopćena Čebiševljeva nejednakost)** *Za $r \in \mathbb{N}$ i $a_1, \ldots, a_n > 0$ definiramo r-tu* **težinsku sredinu** *od $a = (a_1, \ldots, a_n)$ sa*

$$S_r(a) = \sqrt[r]{\frac{a_1^r + \ldots + a_n^r}{n}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{1/r}.$$

Tada vrijedi

$$S_r(a)S_r(b) \leq S_r(ab),$$

gdje je $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $ab = (a_1b_1, \ldots, a_nb_n)$. *Za* $r = 1$ *to je Čebiševljeva nejednakost.*
Težinske sredine monotono rastu, tj. vrijedi

$$p \leq q \Rightarrow S_p(a) \leq S_q(a).$$

Inače se težinske sredine mogu definirati za svako $r \in \mathbf{R}$, pa i za $r = \pm\infty$. Tako je npr. S_1 aritmetička sredina, S_0 (tj. $\lim_{r\to 0} S_r$) geometrijska, a S_{-1} harmonijska sredina, dok je $S_{-\infty}$ minimum, a S_∞ (tj. $\lim_{r\to\infty} S_r$) maksimum brojeva $a_1, \ldots, a_n$.

Dokaz. Dokažimo samo Čebiševljevu nejednakost (i). Uvedimo oznake

$$\sum a = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \sum b = \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad \sum ab = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Tada imamo

$$\sum_i \sum_j (a_i b_i - a_i b_j) = \sum_i \left(n a_i b_i - a_i \sum b\right) = n \sum ab - \sum a \sum b,$$

$$\sum_i \sum_j (a_j b_j - a_j b_i) = \sum_j \left(n a_j b_j - a_j \sum b\right) = n \sum ab - \sum a \sum b.$$

Odavde izlazi

$$n \sum ab - \sum a \sum b = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (a_i b_i - a_i b_j + a_j b_j - a_j b_i) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (a_i - a_j)(b_i - b_j).$$

Zbog pretpostavke je $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pa je

$$n \sum ab - \sum a \sum b \geq 0,$$

što je trebalo dokazati. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = \ldots = a_n$ ili $b_1 = \ldots = b_n$. ∎

III. PLANIMETRIJA - GEOMETRIJA RAVNINE

§ 1. Aksiomatska izgradnja planimetrije

Osnovni objekti (euklidske) geometrije u ravnini su točke, pravci i ravnine i njih smatramo intuitivno jasnim tvorevinama. Svi ostali objekti se iz njih mogu izgraditi. Točke i pravci se ne definiraju, već su oni indirektno definirani svojim svojstvima koja se opisuju sistemom aksioma. Riječ aksiom izvedena je od grčke riječi *aksios* što znači tvrdnju koja ne izaziva nikakve sumnje. Prema tome, aksiomi će biti osnovne istine o točkama, pravcima i geometrijskim tvorevinama koje uzimamo kao istinite i onda koristeći samo njih i određene definicije putem dedukcije izvodimo teoreme geometrije. Da li je neka tvrdnja aksiom ili ne stvar je dogovora, pa zbog toga postoje različiti sistemi aksioma (ili aksiomatike) kojima se izgrađuje jedna te ista teorija. Prvi sistem aksioma kojima se izgrađuje elementarna geometrija dao je starogrčki matematičar Euklid, III st.p.n.e. u svojem čuvenom djelu *"Elementi"* u 13 svezaka. Taj je sistem aksioma bio prilično nedorečen, ali je ipak bitno utjecao na razvoj cjelokupne matematike, a posebno geometrije i doveo do otkrića drugih tipova geometrije, npr. hiperboličke geometrije (Gauss–Lobačevski–Bolyai), eliptičke geometrije (Riemann) itd.

Kasnije su se pojavili savršeniji sistemi aksioma, a u prvom redu treba spomenuti Hilbertovu aksiomatiku geometrije oko 1900. g. U novije vrijeme se najčešće koriste tzv. metričke aksiomatike. Postoje i aksiomatike u kojima je osnovni pojam gibanje kao i vektorska aksiomatika. Napomenimo, međutim, da kakvu god aksiomatiku izaberemo, taj izbor mora zadovoljavati izvjesne razumne uvjete (tzv. principe). Ti principi jesu:

1. Princip nezavisnosti,
2. Princip neproturječnosti,
3. Princip potpunosti.

Princip nezavisnosti zahtijeva da sistem aksioma bude takav da nijedan od aksioma niti ikoji njegov dio nije moguće deduktivno izvesti iz preostalih aksioma. Princip neproturječnosti zahtijeva da sistem aksioma bude neproturječan, tj. da se iz njega ne može dedukcijom izvesti neka tvrdnja i njezina negacija. Da je sistem aksioma potpun znači da on daje odgovor na svako pitanje teorije izgrađene iz tog sistema.

U izboru aksioma se često od principa nezavisnosti odstupa, jer to odstupanje znači neekonomičnost na početku, a ekonomičnost pri izgradnji teorije. Najbitniji je princip neproturječnosti.

1.1. Aksiomi euklidske geometrije ravnine

Euklidska ravnina (ili kraće **ravnina**) je skup M čije elemente nazivamo **točkama**, a neke njezine istaknute podskupove zovemo **pravcima**. Ta dva tipa objekata zadovoljavaju sljedeće aksiome.

I Aksiomi incidencije (pripadanja)

I1. Za svake dvije različite točke $A, B \in M$ postoji jedinstveni pravac iz M kojemu one pripadaju. (Kaže se još da postoji jedinstveni pravac koji **prolazi** tim točkama ili da su te točke **incidentne** s tim pravcem ili da one **leže** na tom pravcu). Taj se pravac obilježava sa AB.

I2. Na svakom pravcu leže barem tri različite točke.

I3. Postoje tri **nekolinearne** točke, tj. takve tri točke koje ne leže na jednom te istom pravcu.

Točke koje leže na istom pravcu zovu se **kolinearne**.

II Aksiomi uređaja (poretka)

II1. Na svakom pravcu ravnine postoje točno dva međusobno suprotna linearna uređaja.

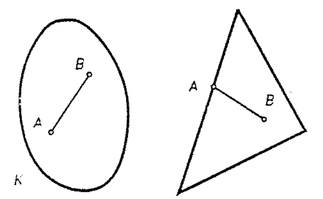
Taj aksiom omogućava da se definira pojam "ležati između" i pomoću njega pojam **dužine i polupravca**. Označimo uređaje iz aksioma II 1. sa $\prec$ i $\succ$. Ako su A i B dvije različite točke ravnine, onda postoji prema I 1. jedinstveni pravac na kojemu one leže. Za točku T tog pravca reći ćemo da **leži između točaka** A i B ako vrijedi ili $A \preceq T \preceq B$ ili $A \succeq T \succeq B$. Skup svih točaka pravca AB koje leže između A i B zovemo **dužinom** i označavamo sa $\overline{AB}$, a točke A i B **krajevima** te dužine. **Polupravac** kojemu je A **početna točka (vrh)**, a prolazi još točkom $B \neq A$ je skup svih onih točaka T pravca AB za koje vrijedi $A \preceq T \preceq B$ ili $A \preceq B \preceq T$.

Skup $K \subseteq M$ je **konveksan**, ako vrijedi

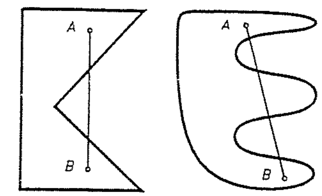
$$A, B \in K \Rightarrow \overline{AB} \subseteq K.$$

Iz svojstva tranzitivnosti uređaja odmah slijedi da su dužina, polupravac i pravac konveksni skupovi

Neka je $S \subseteq M$ bilo koji skup. Tada je **konveksna ljuska** od S, u oznaci $\operatorname{conv} S$ presjek svih konveksnih skupova iz M koji sadrže S. To je ujedno i najmanji (u smislu $\subseteq$) konveksni skup koji sadrži S. Kako je presjek konveksnih



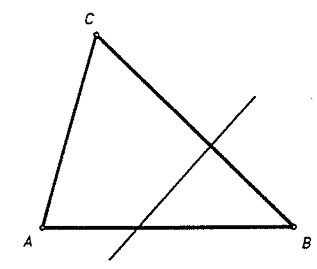
Sl. 1. Konveksni skupovi



Sl. 2. Nekonveksni skupovi

skupova opet konveksan skup (dokažite to!) to je i konveksna ljuska opet konveksan skup. Npr. za $S = \{A, B\}$, je $\operatorname{conv} S = \overline{AB}$. Za $\Delta = \{A, B, C\}$, gdje su A, B, C tri nekolinearne točke, $\operatorname{conv} \Delta$ zovemo **trokut**. Točke A, B, C su **vrhovi trokuta**, a dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ **stranice trokuta**. Trokut s vrhovima A, B, C se najčešće bilježi sa $\triangle ABC$.

II2. (**Paschov aksiom**) Ako pravac siječe jednu stranicu trokuta i ne prolazi niti jednim vrhom na toj stranici, onda on siječe još bar jednu stranicu.



Sl. 3.

III Aksiomi metrike

Zadana je funkcija $d : M \times M \to \mathbf{R}$ i zovemo je **metrika** (ili **razdaljinska funkcija ili funkcija udaljenosti**) na M ako vrijedi

III1. $d(A, B) \geq 0 \quad \forall A, B \in M, \quad d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B.$

III2. $d(A, B) = d(B, A), \quad \forall A, B \in M.$

III3. (**Nejednakost trokuta**) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B), \forall A, B, C \in M$ i pri tome znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $C \in \overline{AB}$.

unutrašnji prostor

III4. Za svaki polupravac (Ou) s vrhom u O i za svaki realni broj $x > 0$ postoji (jedinstvena) točka T na tom polupravcu takva da je $d(O, T) = x$.

Kaže se da je par (M, d) sa svojstvima III1–3 **metrički prostor**.

Broj $d(A, B)$ zovemo **duljinom** dužine $\overline{AB}$ ili **udaljenost** točaka A i B. Katkad ćemo je označavati i sa $|AB|$. Nejednakost trokuta sada možemo izreći riječima ovako. Zbroj duljina dviju stranica trokuta uvijek je veći od duljine treće stranice. Umjesto duljina stranice često se još kaže stranica, pa se kratko nejednakost trokuta još izriče ovako: Zbroj dviju stranica trokuta je veći od treće.

Def: Pojam udaljenosti nam omogućava da definiramo izometrije ravnine. Preslikavanje $f : M \to M$ je **izometrija ravnine** M ako vrijedi

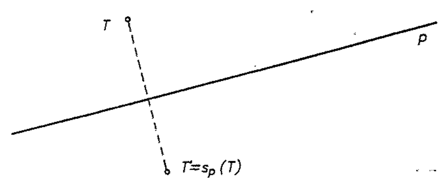
$$d(f(A), f(B)) = d(A, B), \quad \forall A, B \in M.$$

Uočimo da je izometrija injektivno preslikavanje. To je neposredna posljedica aksioma III 1 (dokažite to!). Kasnije ćemo pokazati da je svaka izometrija i surjektivno preslikavanje, dakle i bijektivno. Detaljnije će o izometrijama ravnine biti govora u 1.3. Tamo ćemo dokazati još da izometrija preslikava dužine na dužine, polupravce na polupravce, pravce na pravce itd.

IV Aksiomi simetrije

Ti su aksiomi u srednjoškolskoj geometriji u vezi sa "presavijanjem ravnine po pravcu". Važnu klasu izometrija čine tzv. **osne simetrije** (ili **zrcaljenja**). Njihova egzistencija je dana ovim aksiomima.

IV1. Za svaki pravac $p \subset M$ postoji jedinstvena izometrija $s_p : M \to M$ različita od identitete, za koju je $s_p(T) = T$, $\forall T \in p$. Ta se izometrija zove **osna simetrija** obzirom na pravac p. Pravac p se zove **os simetrije** (v.sl. 4).



Sl. 4.

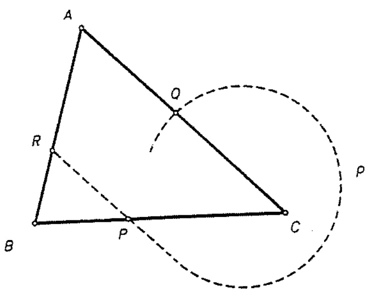
IV2. Za svaki par (Ox, Oy) polupravaca s vrhom u O postoji bar jedan pravac p takav da je $s_p(Ox) = Oy$.

Kasnije ćemo pokazati (1.3) da je takav pravac p jedinstven.

1.2. Neke posljedice aksioma uređaja

PROPOZICIJA 1. *Pravac ravnine M koji ne prolazi niti jednim vrhom trokuta ABC ne siječe sve tri stranice tog trokuta.*

Dokaz. Pretpostavimo da pravac p siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P, $\overline{CA}$ u točki Q, a $\overline{AB}$ u R, te da ne prolazi niti jednim vrhom A, B, C (sl. 5). Tada su točke P, Q i R međusobno različite i određenosti radi, uzimamo da P leži između druge dvije. Pravac BC siječe dužinu QR u točki P, ali ne siječe niti jednu od dužina $\overline{AQ}$, $\overline{AR}$, što proturječi Paschovom aksiomu za trokut $\triangle AQR$ i pravac BC. ∎



Sl. 5.

PROPOZICIJA 2. *Za svaki pravac $p \subset M$, definiramo binarnu relaciju $\mathcal{R}$ na $M \setminus p$ sa*

$$A \,\mathcal{R}\, B \Leftrightarrow \overline{AB} \cap p = \emptyset \tag{1}$$

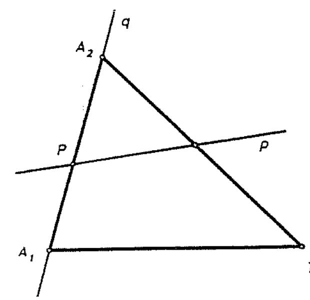
Relacija $\mathcal{R}$ je relacija ekvivalencije, koja $M \setminus p$ rastavlja na dvije klase ekvivalencije koje se zovu **poluravnine** *definirane sa p.*

Dokaz. Refleksivnost i simetričnost relacije $\mathcal{R}$ su gotovo očiti. Tranzitivnost je ekvivalentna sljedećoj izjavi

> Ako su $A, B, C \in M$ tri točke iz M, takve da je $\overline{AB} \cap p = \emptyset$ i $\overline{BC} \cap p = \emptyset$, onda i $\overline{AC} \cap p = \emptyset$.

No ova tvrdnja (kao kontrapozicija) je ekvivalentna Paschovom aksiomu II2.

Nadalje, možemo konstruirati dvije točke $A_1, A_2 \in M \setminus p$, tako da je $\overline{A_1A_2} \cap p = \{P\}$ ovako. Uzmimo točku $P \in p$ i povucimo neki pravac $q (\neq p)$ i primijenimo aksiom III4. za konstrukciju točke $A_1, A_2 \in q$ s raznih strana od P, takvih da je $d(P, A_1) = d(P, A_2) = 1$ (sl. 6). Ako je $T \in M \setminus p$, onda pravac p ne prolazi niti jednim vrhom trokuta TA_1A_2. Kako p siječe $\overline{A_1A_2}$, slijedi da siječe samo jednu od dužina $\overline{TA_1}$, $\overline{TA_2}$, tj. T pripada ili klasi od A_1 ili klasi od A_2. Dakle, relacija $\mathcal{R}$ zaista definira samo dvije klase ekvivalencije. ∎



Sl. 6.

Pokažimo sada da je svaki pravac iz M izometričan "brojevnom pravcu" $\mathbf{R}$. Pravac $p \subset M$ je **orijentirani** ako smo na njemu odabrali jednu od dvije relacije uređaja.

PROPOZICIJA 3. *Za svaki orijentirani pravac p i svaku točku $O \in p$ postoji jedinstvena rastuća bijekcija $f : p \to \mathbf{R}$ za koju je $f(O) = 0$ i*

$$|f(B) - f(A)| = d(A, B), \quad \forall A, B \in p.$$

Dokaz. Neka je (Ox) (odn. (Ox')) polupravac s početkom O, čije točke leže "poslije" (odn. "prije") O obzirom na odabrani uređaj. Lako se vidi da je jedinstvena funkcija s navedenim svojstvima zadana formulom $f(T) = d(O, T)$ za $T \in (Ox)$ i $f(T) = -d(O, T)$ za $T \in (Ox')$. ■

Realni broj $f(T)$ zove se **apscisa** točke T na orijentiranom pravcu.

KOROLAR 1. *Za svaki par $A, B \in M$ različitih točaka postoji jedinstvena točka C na pravcu AB za koju je $d(A,C) = d(B,C)$. Ta točka leži između A i B i zove se* **polovište dužine** $\overline{AB}$.

Dokaz. Iz aksioma III3. slijedi da A ne može ležati između B i C niti B između A i C. Stoga C leži između A i B. Ako orijentiramo pravac AB, onda je točka C definirana (zbog Propozicije 3) jednakošću

$$d(A, C) = \frac{1}{2}\, d(A, B). \blacksquare$$

Ako je $A = B$, reći ćemo da je polovište dužine $\overline{AA}$ točka A.

1.3. Osnovna svojstva izometrija i osnih simetrija

Kao što smo rekli, izometrija je preslikavanje $f : M \to M$ sa svojstvom $|A'B'| = |AB|$, za sve točke $A, B \in M$, gdje je $A' = f(A)$, $B' = f(B)$.

Fiksna točka preslikavanja $f : M \to M$ je točka $T \in M$ za koju je $f(T) = T$.

Osna simetrija $s_p : M \to M$ je izometrija ravnine, $s_p \neq 1_M$, kojoj su sve točke pravca p fiksne točke.

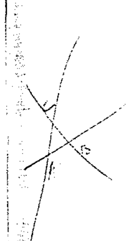
Očito je kompozicija izometrija opet izometrija.

Iz aksioma III3 (dijela koji govori o jedinstvenosti) slijedi da svaka izometrija čuva relaciju "biti između".

TEOREM 1. *Svaka izometrija ravnine M preslikava bijektivno pravac na pravac.*

Dokaz. Kako smo već istakli, kasnije ćemo dokazati da je izometrija bijekcija. Dovoljno je stoga dokazati da je izometrična slika pravca opet pravac. Neka je $f : M \to M$ izometrija, a $A, B, C \in M$ tri kolinearne točke. Jedna od njih, npr. C leži između druge dvije (tj. $A \preceq C \preceq B$). Tada je $|AB| = |AC| + |BC|$, a odavde slijedi $|f(A)f(B)| = |f(A)f(C)| + |f(B)f(C)|$. Ova jednakost povlači da $f(C)$ leži na pravcu $f(A)f(B)$. Zbog toga f čuva kolinearnost, a odavde zbog bijektivnosti neposredno slijedi da je slika pravca opet pravac. ■

Stoga, ako je $f : M \to M$ izometrija, a $p \subset M$ pravac, onda izborom orijentacija na pravcima p i $f(p)$ odmah slijedi da je restrikcija od f na p monotona bijekcija sa p na $f(p)$. Odavde neposredno slijede ove tvrdnje.



PROPOZICIJA 4. *Neka je $f : M \to M$ izometrija. Tada vrijedi:*

(a) slika dužine $\overline{AB}$ je dužina $\overline{f(A)f(B)}$;

(b) slika polupravca s početkom O je polupravac s početkom $f(O)$;

(c) slika poluravnine određene pravcem p je poluravnina određena pravcem $f(p)$.

■

PROPOZICIJA 5. *Neka je $f : M \to M$ izometrija ravnine. Tada vrijedi:*

(a) Ako su A i B fiksne točke od f, onda je i svaka točka pravca AB fiksna točka od f;

(b) Ako je $f(A) = B$ i $f(B) = A$, tj. A i B zamijene mjesta, onda je polovište dužine $\overline{AB}$ fiksna točka od f;

(c) Ako su $A, B, C \in M$ tri nekolinearne fiksne točke od f, onda je f identiteta.

(d) $s_p = s_{p'} \Rightarrow p = p'$.

Dokaz. (a) Ovo slijedi odatle što je točka $T \in AB$ potpuno određena svojim udaljenostima od A i B. Također se tvrdnja može svesti na Propoziciju 3, tj. na izometriju od $\mathbf{R}$.

(b) Ako je $f(A) = B$, $f(B) = A$, onda je slika polovišta C od $\overline{AB}$ polovište dužine $\overline{f(A)f(B)} = \overline{BA}$, tj. C.

(c) Prema tvrdnji (a), sve točke pravaca AB, BC, CA su fiksne točke od f. Neka je $T \in M$ točka koja ne leži na tim pravcima. Tada kroz T prolazi bar jedan pravac p koji siječe dva od tih pravaca u dvije različite točke. Treba, naime, samo primijeniti Paschov aksiom II2 na pravac p koji spaja T s jednom unutrašnjom točkom dužine $\overline{BC}$. Tada su sve točke od p fiksne za f, pa je posebno i $f(T) = T$.

(d) Slijedi lagano kontradikcijom iz (c). ■

Sada opišimo neka svojstva osnih simetrija (na njih, a i na izometrije ćemo se još vratiti kasnije, vidi §6).

PROPOZICIJA 6. *Svaka osna simetrija s_p je* **involucija**, *tj. $s_p \circ s_p = 1_M$, a $s_p \neq 1$. s_p nema drugih fiksnih točaka osim onih na osi p, a poluravnine određene s p preslika jednu u drugu. Posebno s_p je bijekcija čiji je inverz jednak s_p, tj. $(s_p)^{-1} = s_p$.*

Dokaz. Kompozicija $s_p \circ s_p$ je izometrija od M različita od s_p (jer bi u protivnome bilo $s_p = 1_M$) i svaka točka od p je njena fiksna točka. Stoga je prema aksiomu IV1. $s_p \circ s_p = 1_M$. S druge strane, osna simetrija s_p ima jedine fiksne točke na pravcu p, prema Propoziciji 5(c). Nadalje, ako je $T \in M \setminus p$, onda je polovište P dužine $\overline{Ts_p(T)}$ fiksna točka od s_p (zbog Prop. 5(b) i involutivnosti s_p). Stoga je $P \in p$ i $s_p(T)$ leži u drugoj poluravnini od p nego što je točka T. ■

PROPOZICIJA 7. *Neka su $A, B \in M$, $A \neq B$. Tada postoji jedinstveni pravac p takav da je $s_p(A) = B$.*

Dokaz. *Egzistencija.* Neka je O polovište dužine $\overline{AB}$, a Ox (odn. Oy) polupravac s početkom O koji sadrži točku A (odn. B). Prema aksiomu IV2 postoji pravac p takav da je $s_p(Ox) = Oy$. Kako je $d(O, A) = d(O, B)$ slijedi da je $s_p(A) = B$.

Jedinstvenost. Neka su $p \neq p'$ pravci za koje je $s_p(A) = B$ i $s_{p'}(A) = B$. Tada su s_p i $s_{p'}$ izometrije kojima A i B zamijene mjesta, pa prema Prop. 5(a), svaka točka od $q = AB$ je njihova fiksna točka. Također je $s_p, s_{p'} \neq s_q$. Zbog toga s_p i $s_{p'}$ imaju fiksnih točaka van pravca q. Kompozicija $s_p \circ s_{p'}$ je izometrija čije su A i B fiksne točke, pa je ona stoga fiksna na pravcu q (Prop. 5(a)) i različita je od s_q jer ona čuva poluravnine određene s q. Stoga je $s_p \circ s_{p'} = 1_M$, dakle $s_p = s_{p'}$ pa je stoga (Prop. 5(d)) $p = p'$. ■

KOROLAR 2. *Neka su Ox, Oy dva polupravca sa zajedničkim početkom O. Tada postoji* **jedinstveni** *pravac p takav da je $s_p(Ox) = Oy$. Taj pravac prolazi vrhom O i zove se* **simetrala polupravaca** *Ox i Oy.*

Dokaz. Egzistencija pravca p je garantirana Aksiomom IV2. Nadalje, iz Prop. 4(b) slijedi da $s_p(Ox) = Oy$ povlači $s_p(O) = O$, pa je stoga $O \in p$.
Neka su sada $A \in (Ox)$, $B \in (Oy)$ takve točke da je $d(O, A) = d(O, B) > 0$. Uvjet $s_p(Ox) = Oy$ povlači $s_p(A) = B$. Ako je $Ox = Oy$, onda je $A = B$ pa je p pravac OA koji sadrži Ox. Ako je $Ox \neq Oy$, onda je $A \neq B$, pa je p os simetrije koja zamijeni A i B. Iz ove konstrukcije je tada jasno da je takav p jedinstven. ■

TEOREM 2. *Neka su $A, B \in M$, $A \neq B$. Skup svih točaka iz M koje su jednako udaljene od A i B je os p jedinstvene osne simetrije koja zamijeni mjesta A i B, tj. koja preslikava A u B, a B u A. Taj se pravac zove* **simetrala dužine** $\overline{AB}$.

Dokaz. Neka je, dakle, p os simetrije osne simetrije s_p za koju je $s_p(A) = B$ (i $s_p(B) = A$). Ako je $T \in p$ onda je T fiksna točka od s_p, pa je $d(A, T) = d(s_p(A), s_p(T)) = d(B, T)$. Obratno, neka je $T \in M$ takva točka za koju je $d(A, T) = d(B, T)$ i neka je q os simetrije koja zamjenjuje polupravce s početkom T koje sadrže redom A i B (Korolar 2). Tada je $s_q(A) = B$, a odavde $q = p$ i stoga $T \in p$. ■

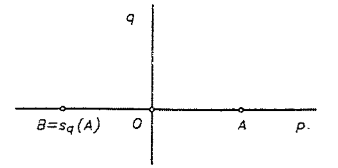
Kažemo da je pravac q **okomit** (ili **ortogonalan**) na pravac p ako je $q \neq p$ i $s_q(p) = p$. Pišemo još $q \perp p$.

Pokažimo da je relacija ortogonalnosti simetrična. (Uočite da nije refleksivna i tranzitivna.)

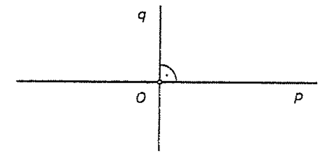
TEOREM 3. $q \perp p \Rightarrow p \perp q$. *Posebno, pravci q i p se sijeku.*

Dokaz. Neka je $A \in p$, $A \notin q$. Ako je $s_q(p) = p$, onda je točka $B = s_q(A)$ različita od A i leži na p (v. sl. 7).

Polovište O dužine $\overline{AB}$ je fiksna točka od s_q pa je zajednička točka od p i q, pa je q simetrala dužine $\overline{AB}$. Kako osna simetrija čuva udaljenosti, slijedi da je $s_q(p)$ simetrala dužine $\overline{s_p(A)s_p(B)} = \overline{AB}$ i $s_p(q) = q$. Time smo pokazali da $q \perp p \Rightarrow p \perp q$. ■



Sl. 7.



Sl. 8.

Napomena 1. Iz ovog dokaza je jasno da je simetrala dužine $\overline{AB}$ okomica na pravac AB koja prolazi polovištem O dužine $\overline{AB}$. Standardna oznaka za okomite pravce p i q bit će na crtežu kao na sl. 8.

PROPOZICIJA 8. *Kroz svaku točku A prolazi jedan i samo jedan pravac okomit na dani pravac p.*

Dokaz. Ako je $A \notin p$ onda traženi pravac prolazi kroz točku $B = s_p(A)$. Znači da to može biti samo pravac AB, a njezina slika pri simetriji s_p je pravac $s_p(A)s_p(B) = AB$.

Ako je $A \in p$, onda je tražena okomica os jedine simetrije koja zamjenjuje dva polupravca pravca p s početkom A. ■

Sada kad imamo dobro definiran pojam simetrale dužine, možemo dati drugi dokaz Propozicije 5(c) i to ovako:
Pretpostavimo da postoji $T \in M$, tako da je $T' = f(T) \neq T$. Tada je $|AT| = |f(A)f(T)| = |AT'|$, i slično $|BT| = |BT'|$, $|CT| = |CT'|$, pa A, B, C leže na simetrali dužine $\overline{TT'}$, suprotno pretpostavci da su nekolinearne.

Isto tako imamo

PROPOZICIJA 9. *Neka su $A \neq B$ fiksne točke izometrije $f : M \to M$, a $p = AB$. Tada je $f = 1_M$ ili $f = s_p$.*

Dokaz. Pretpostavimo $f \neq 1_M$. Tada postoji $C \in M$, $C' = f(C) \neq C$. Tada za izometriju $g = s_p \circ f$ vrijedi $g(A) = s_p(f(A)) = s_p(A) = A$ jer je $A \in p$ i slično $g(B) = B$. No, $|AC| = |f(A)f(C)| = |AC'|$, $|BC| = |BC'|$, pa je p simetrala dužine $\overline{CC'}$. Dakle, $g(C) = s_p(f(C)) = s_p(C') = C$. Prema Propoziciji 5(c) je $g = 1_M$, tj. $s_p \circ f = 1_M$, pa je $s_p = s_p \circ 1_M = s_p \circ (s_p \circ f) = (s_p \circ s_p) \circ f = 1_M \circ f = f$. ■

TEOREM 4 (Osnovni teorem o izometrijama). *Svaka izometrija $f : M \to M$ je ili osna simetrija ili kompozicija dviju osnih simetrija ili kompozicija triju osnih simetrija, tj. svaka izometrija je kompozicija najviše tri osne simetrije.*

Dokaz. a) Ako je $f = 1_M$, onda za svaki pravac $p \subset M$ vrijedi $s_p \circ s_p = 1_M$ (Propozicija 6), pa je $f = s_p \circ s_p$.
b) Neka je $f \neq 1_M$. Tada postoji $A \in M$, $A' = f(A) \neq A$. Neka je a simetrala dužine $\overline{AA'}$. Tada izometrija $g = s_a \circ f$ ima svojstvo $g(A) = s_a(f(A)) = s_a(A') = A$.
b1) Ako je $g = 1_M$, onda je $s_a \circ f = 1_M \Rightarrow f = (s_a)^{-1} = s_a$.
b2) Neka je $g \neq 1_M$. Tada postoji $B \in M$ takva da je $B' = g(B) \neq B$. Kako je $g(A) = A$, to je $A \neq B$. Neka je b simetrala dužine $\overline{BB'}$. Promotrimo izometriju

$h = s_b \circ g$. Zbog $|AB| = |g(A)g(B)| = |AB'| \Rightarrow A \in b$, pa je $h(A) = s_b(g(A)) = s_b(A) = A$. Nadalje, $h(B) = s_b(g(B)) = s_b(B') = B$.

Ako je $h = 1_M$, tj. $s_b \circ g = 1_M$, onda je $g = s_b \Rightarrow s_a \circ f = s_b \Rightarrow f = s_a \circ s_b$.

Ako je pak $h \neq 1_M$, neka je c pravac koji prolazi fiksnim točkama A i B izometrije h. Tada je prema Propoziciji 9 $h = s_c$, pa je $s_c = h = s_b \circ g \Rightarrow g = s_b \circ s_c \Rightarrow s_a \circ f = s_b \circ s_c \Rightarrow f = s_a \circ s_b \circ s_c$. ■

KOROLAR 3. *Svaka izometrija f ravnine je bijekcija ravnine na samu sebe.*

Dokaz. Svaka osna simetrija je bijekcija, a kompozicija od konačno mnogo bijekcija je bijekcija. Tvrdnja sada slijedi iz Teorema 4. ■

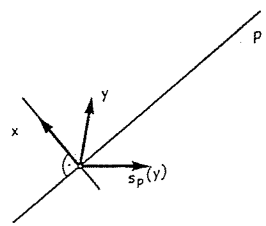
KOROLAR 4. *Ako je $f : M \to M$ izometrija, onda je i $f^{-1} : M \to M$ izometrija.*

Dokaz. Ako je $f = s_p$, onda je $f^{-1} = s_p^{-1} = s_p$. Ako je $f = s_a \circ s_b$, onda je $f^{-1} = (s_a \circ s_b)^{-1} = s_b^{-1} \circ s_a^{-1} = s_b \circ s_a$, a ako je $f = s_a \circ s_b \circ s_c$, onda je $f^{-1} = (s_a \circ s_b \circ s_c)^{-1} = s_c^{-1} \circ s_b^{-1} \circ s_a^{-1} = s_c \circ s_b \circ s_a$, pa je u svakom slučaju f^{-1} opet izometrija. Na drugi način tvrdnja slijedi direktno iz Korolara 3 i definicije izometrije. ■

KOROLAR 5. *Ako se dvije izometrije $f, g : M \to M$ podudaraju u tri nekolinearne točke, onda je $f = g$. Odavde slijedi da je svaka izometrija ravnine potpuno određena s tri para pridruženih točaka (s time da nijedna trojka nije kolinearna).*

Dokaz. Neka su $A, B, C \in M$ nekolinearne točke za koje je $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$, $f(C) = g(C)$. Tada je zbog Korolara 4 $h = g^{-1} \circ f$ izometrija i $h(A) = A$, $h(B) = B$, $h(C) = C$. Prema Propoziciji 5(c) slijedi $h = 1_M$, tj. $g^{-1} \circ f = 1_M \Rightarrow f = g$. ■

Iz ovih svojstava se odmah vidi da skup svih izometrija ravnine M čine grupu koja se označava sa $\mathrm{Iso}(M)$. Napomenimo da ta grupa nije komutativna. Konačno, napomenimo da se osna simetrija s_p može eksplicitno zapisati vektorski ovako: Neka je $x \neq 0$ vektor okomit na pravac p kroz ishodište. Tada je



$$s_p(y) = y - 2\,\frac{(x|y)}{\|x\|^2}\,x,$$

Sl. 9.

gdje je $(x|y)$ skalarni produkt vektora x i y, a $\|x\|$ norma vektora x.

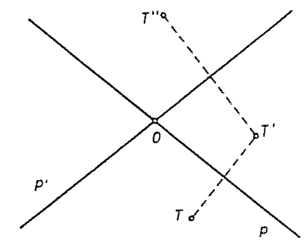
Rotacije

Rotacija s centrom O (ili oko O) je izometrija ravnine M, čija je jedina fiksna točka O ili je identiteta 1_M.

Rotacija očito nije osna simetrija.

TEOREM 5. *(a) Neka su $p, p' \subset M$ dva pravca u ravnini M koji se sijeku u točki O. Tada je kompozicija $r = s_p \circ s_{p'}$ rotacija oko O.*
(b) Obratno, za svaku rotaciju $r : M \to M$ s centrom O i svaki pravac p kroz O, postoje pravci p', p'' koji se sijeku u O, takvi da je $s_{p'} \circ s_p = r = s_p \circ s_{p''}$.

Dokaz. (a) $r = s_p \circ s_{p'}$ je očito izometrija od M s fiksnom točkom O. Neka je A još jedna fiksna točka od r. Tada je $s_{p'}(A) = s_{p'}(r(A)) = s_{p'}(s_{p'} \circ s_p(A)) = s_p(A)$. Neka je $B = s_{p'}(A)$. Tada imamo $s_p(B) = s_p(s_{p'}(A)) = r(A) = A$. Dakle, $s_p(A) = B$, $s_p(B) = A$, pa prema Propoziciji 7 (jedinstvenost) slijedi $A = B$ ili $p = p'$. No, ako je $A = B$ onda je $A \in p \cap p'$, pa zbog $A \neq O$ slijedi $p = p'$, tj. $r = 1_M$. Prema tome r je rotacija s centrom u O.



Sl. 10.

(b) Ako je $r = 1_M$ onda je tvrdnja očita.
Neka je $r \neq 1_M$ i neka je $A \in p \setminus \{O\}$ i $B = r(A)$. Tada je $|AO| = |r(O)r(A)| = |OB|$, pa je O jednako udaljena od A i B. Prema Propoziciji 7 postoji simetrija s osi p' koja zamijeni mjesta A i B. Kompozicija $s_{p'} \circ r$ je izometrija od M različita od 1_M, (jer bi inače bilo $r = s_{p'}$) s fiksnim točkama O i A, pa je stoga to simetrija s osi $p = OA$. Stoga je $s_{p'} \circ r = s_p$, tj. $r = s_{p'} \circ s_p$. Nadalje, zbog osnovnog teorema o izometrijama postoji r^{-1} i opet je to rotacija i analogno kao gore postoji pravac p'' takav da je $r^{-1} = s_{p''} \circ s_p$, tj. $r = s_p \circ s_{p''}$. ■

Neposredna posljedica Teorema je ovaj:

KOROLAR 6. *Neka je $r : M \to M$ rotacija s centrom O, a $p \subset M$ pravac kroz O. Tada su $s_p \circ r$ i $r \circ s_p$ osne simetrije s osima kroz O.* ■

KOROLAR 7. *Za svaki par (Ox, Oy) polupravaca s vrhom O postoji jedinstvena rotacija r s centrom O, za koju je $r(Ox) = Oy$.*

Dokaz. Neka je s osna simetrija obzirom na pravac (Ox). Postoji rotacija r oko O za koju je $r(Ox) = Oy$ ako i samo ako je izometrija $r \circ s$ neka osna simetrija s' koja zamjenjuje Ox i Oy. To slijedi odmah iz Teorema. Odavde je $r = s' \circ s$. ■

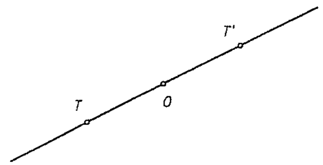
KOROLAR 8. *Ako je r rotacija ravnine oko točke O, onda je i r^{-1} rotacija oko O.*

Dokaz. Ako je $r = s_p \circ s_q$, onda je $r^{-1} = s_q^{-1} \circ s_p^{-1} = s_q \circ s_p$, pa je r^{-1} rotacija. ■

Stoga skup svih rotacija ravnine oko točke O čini grupu.

Centralna simetrija

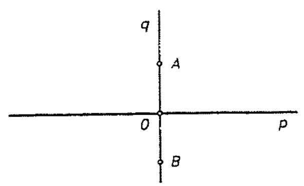
Neka je $O \in M$ točka ravnine M. **Centralna simetrija** $s_O : M \to M$ je bijekcija definirana ovako. Ako je $T \in M$, a $T' = s_O(T)$, onda je O polovište dužine $\overline{TT'}$ (ili vektorski $\overrightarrow{OT'} = -\overrightarrow{OT}$).



Sl. 11.

TEOREM 6. *Centralna simetrija s_O s centrom O je kompozicija $s_p \circ s_q$ dviju osnih simetrija s bilo kojim okomitim osima p i q koje prolaze kroz O. Nadalje $s_p \circ s_q = s_q \circ s_p$. Stoga je s_O rotacija s centrom O i to jedinstvena involutorna rotacija s centrom O.*

Dokaz. Neka su p i q okomiti pravci kroz O. Pokažimo prvo da osne simetrije s_p i s_q komutiraju i da im je kompozicija involutorna rotacija.



Sl. 12.

Neka je $A \in q\setminus\{O\}$. Točka $B = s_p(A)$ leži na q. Stoga je

$$(s_q \circ s_p)(A) = s_q(B) = B \quad \text{i}$$
$$(s_p \circ s_q)(A) = s_p(A) = B.$$

Prema prethodnom Korolaru 7 slijedi da je $s_p \circ s_q = s_q \circ s_p$ (jer postoji jedinstvena rotacija s centrom O koja prevodi A u B). Stoga je $(s_p \circ s_q) \circ (s_p \circ s_q) = (s_p \circ s_q) \circ (s_q \circ s_p) = s_p \circ 1_M \circ s_p = s_p \circ s_p = 1_M$.

Sada pokažimo da je involutorna rotacija r s centrom O centralna simetrija s_O. Zaista, neka je $T \in M$. Polovište dužine $\overline{Tr(T)}$ je tada fiksna točka od r (provjerite to!).

Kako je kompozicija osnih simetrija obzirom na dva okomita pravca p i q različita od identitete (jer je $p \neq q$), onda je ona centralna simetrija s centrom O. Time je teorem u potpunosti dokazan. ■

1.4. Kutovi

S pojmom "kuta" je oduvijek u nastavi i poimanju bilo poteškoća. Katkad se pod istim pojmom "kut" podrazumijevaju različite stvari. Naime, polazeći od intuitivno jasnog pojma "kuta" kao figure koja se sastoji od dva polupravca sa zajedničkim vrhom, često se tome pridružuju razna matematička značenja koja su nam u danoj situaciji potrebna, npr. pod pojmom "kut" često se misli na isječak ravnine, par polupravaca, neka mjera ("kutna mjera") itd.

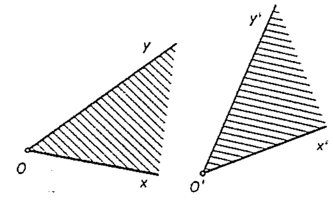
Mi ćemo sada dati preciznu definiciju kuta. Krenimo redom.

Uređenom paru (Ox, Oy) polupravaca sa zajedničkim vrhom, koji ne leže na istom pravcu pridružimo pripadni **otvoreni kutni isječak** dobiven kao presjek poluravnine P_x koja sadrži Oy omeđene pravcem Ox i poluravnine P_y koja sadrži Ox

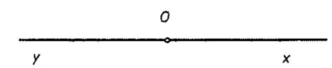
omeđene pravcem Oy. **Zatvoreni kutni isječak** se dobiva kao presjek zatvorenih poluravnina (zatvorena poluravnina je unija poluravnine s pripadnim graničnim pravcem).

Dva para (Ox, Oy) i $(O'x', O'y')$ polupravaca se nazivaju **kongruentni** (a katkada, iako nepravilno, jednakima), ako postoji izometrija f ravnine M takva da je $f(Ox) = O'x'$ i $f(Oy) = O'y'$.

Lako se vidi da je ova kongruencija relacija ekvivalencije, pa se pripadne klase ekvivalencije zovu **neorijentirani kutovi**. Klasa koja sadrži par (Ox, Oy) označava se sa $\sphericalangle x\,Oy$.



Sl. 13. Kongruentni parovi



Sl. 14. Komplementarni polupravci

Ako se polupravci Ox, Oy podudaraju, odnosno ako su komplementarni[1] (tj. ne podudaraju se ali leže na istom pravcu), onda se klasa $\sphericalangle x\,Oy$ dobivena podudarnim odnosno komplementarnim polupravcima zove redom **nul-kut**, odnosno **ispružen kut** $\sphericalangle x\,Oy$. Nul-kut se obilježava naprosto s 0, a ispružen (za sada) s ω.

Očito je $\sphericalangle xOy = \sphericalangle yOx$ (jer postoji simetrija koja prevodi Ox u Oy, a Oy u Ox). Isto tako ako su Ox' i Oy' dva polupravca koja su redom komplementarna polupravcima Ox i Oy, onda je $\sphericalangle x'Oy' = \sphericalangle xOy$ (jer simetrija s centrom u O zamijeni mjesta Ox sa Ox' i Oy sa Oy').

Nadalje, kao što ćemo ubrzo vidjeti, ako su pravci (Ox) i (Oy) okomiti, onda par (Ox, Oy) čini jednu klasu ekvivalencije koja se zove **pravi kut**.

PROPOZICIJA 10. *Neka je Ox polupravac, a P zatvorena poluravnina omeđena pravcem (Ox). Za svaki neorijentirani kut α, postoji jedinstveni reprezentant oblika (Ox, Oy), pri čemu je $Oy \subset P$. Drugim riječima, preslikavanje $Oy \mapsto \sphericalangle xOy$ je bijekcija skupa polupravaca iz P s početkom O (i čvrstim polupravcem Ox) na skup kutova.*

Dokaz. Tvrdnja je očito ispravna za nul-kut i ispruženi kut. Stoga ćemo pretpostaviti da je $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq \omega$.

Jedinstvenost. Pretpostavimo da je $\sphericalangle xOy = \sphericalangle xOz$. Tada postoji izometrija f ravnine takva da je $f(Ox) = Ox$ i $f(Oy) = Oz$. Odavde odmah slijedi da f drži

[1] Zadavanje dvaju polupravaca Ox, Oy sa zajedničkim početkom O ekvivalentno je zadavanju skupa $(Ox) \cup (Oy)$ jedino u slučaju da ti polupravci nisu komplementarni. U slučaju komplementarnih polupravaca njihovo zadavanje ističe na pravcu točku O, a pravac s istaknutom točkom je figura koje je različita od samog pravca. Tako su npr. dužina i dužina s istaknutim središtem isto tako različite.

fiksnom svaku točku pravca (Ox). Ako su Oy, Oz s iste strane tog pravca onda je f identiteta zbog Propozicije 5.

Egzistencija. Pretpostavimo da je α reprezentiran u obliku $\alpha = \sphericalangle uAv$. Neka je s_1 osna simetrija za koju je $s_1(A) = O$ (Propozicija 7). Stavimo $Ou_1 = s_1(Au)$ i $Ov_1 = s_1(Av)$ (usp. Propoziciju 4). Prema Korolaru 2 postoji (jedinstvena) simetrija s_2 čija os prolazi vrhom O tako da je $s_2(Ou_1) = Ox$. Ako je $s_2(Ov_1) \subset P$ onda polupravac $Oy = s_2(Ov_1)$ zadovoljava tražene uvjete. U protivnome je traženi polupravac Oy simetričan $s_2(Ov_1)$ obzirom na Ox. ■

Posebno odavde slijedi da postoji jedinstveni polupravac Oy koji je okomit na Ox i leži u P. Klasa $\sphericalangle xOy$ dobivena na taj način parom okomitih polupravaca zove se **pravi kut**. Taj ćemo kut (privremeno) označiti sa δ.

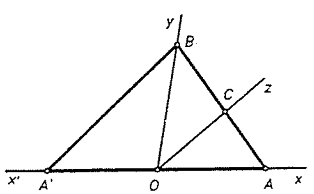
Relacija uređaja među kutovima

Odaberimo polupravac Ox i zatvorenu poluravninu P omeđenu pravcem (Ox). Neka je $\alpha = \sphericalangle xOy$, gdje je $Oy \subset P$. Tada kutu α pridružimo **zatvoreni kutni isječak** S_α koji je omeđen sa Ox i Oy i po definiciji stavljamo da je $S_\alpha = P$ ako je α ispružen kut ω, a stavljamo da je $S_\alpha = Ox$ ako je α nul-kut.

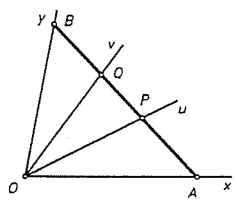
Neka je $\mathcal{K}$ skup svih neorijentiranih kutova. Na skupu $\mathcal{K}$ definiramo relaciju uređaja stavljajući

$$\alpha \leq \beta \ :\Leftrightarrow \ S_\alpha \subseteq S_\beta$$

Očito je da ta relacija uređaja ne ovisi o izboru para (Ox, P). Pokazat ćemo da se tu radi o linearnom (totalnom) uređaju na $\mathcal{K}$ koji je izomorfan sa standardnim segmentom u skupu $\mathbf{R}$.



Sl. 15.



Sl. 16.

Kako je ispruženi kut najveći element u $\mathcal{K}$, a nul-kut najmanji, to je dovoljno uspoređivati kutove različite od njih. U tu svrhu dovoljno je primijetiti da svaki polupravac Ou koji sadrži neku točku $A \neq O$ kutnog isječka s vrhom O, čitav leži u tom isječku. Označit ćemo zatvoreni kutni isječak omeđen polupravcima Ox, Oy sa $S(Ox, Oy)$.

PROPOZICIJA 11. *Neka je P zatvorena poluravnina određena pravcem $x'Ox$, a Oy polupravac koji leži u P, $Oy \neq Ox, Ox'$. Neka su nadalje A, B, A' točke različite od O, koje redom leže na polupravcima Ox, Oy, Ox' (v. sl. 15). Tada vrijedi*

(a) Svaki polupravac $Oz \subset P$, $Oz \neq Ox, Oy, Ox'$, siječe samo jednu od dužina $\overline{AB}$, $\overline{BA'}$. Ako taj polupravac siječe $\overline{AB}$, odn. $\overline{BA'}$ tada je $S(Ox, Oz) \subset S(Ox, Oy)$, odnosno $S(Ox, Oy) \subset S(Ox, Oz)$.

(b) Neka su Ou, Ov polupravci koji leže u $S(Ox, Oy)$, tj. koji sijeku dužinu $\overline{AB}$ u točkama P, Q (v. sl. 16). Tada je inkluzija $S(Ox, Ou) \subset S(Ox, Ov)$ ekvivalentna s tvrdnjom "P leži između A i Q".

Dokaz. (a) Prema Paschovom aksiomu i Propoziciji 1, slijedi da pravac (Oz) siječe samo jednu od dužine $\overline{AB}$ i $\overline{BA'}$ i to sjecište nužno leži na polupravcu Oz, stoga jer on leži u P. U drugu ruku iz definicije poluravnine i kutnog isječka nužno slijedi da je $\overline{AB} \subset S(Ox, Oy)$ i $\overline{BA'} \subset S(Oy, Ox')$. Prema prethodnoj napomeni ili je $Oz \subset S(Ox, Oy)$ ili $Oz \subset S(Oy, Ox')$, već prema tome, siječe li Oz $\overline{AB}$ ili $\overline{BA'}$.

Ako je $Oz \cap \overline{AB} = \{C\}$, onda nam to kazuje (uz nešto izmijenjene oznake) da je $S(Ox, Oz)$ unija onih polupravaca s početkom O koji sijeku $\overline{AC}$. Na isti način je $S(Ox, Oy)$ unija polupravaca s početkom O koji sijeku $\overline{AB}$. Odavde slijedi inkluzija $S(Ox, Oz) \subset S(Ox, Oy)$.

Ako pak Oz siječe $\overline{BA'}$, slično slijedi $S(Ox', Oz) \subset S(Ox', Oy)$. Prelaskom na komplemente slijedi $S(Ox, Oz) \supset S(Ox, Oy)$.

(b) Prema prethodnom je inkluzija $S(Ox, Ou) \subset S(Ox, Ov)$ ekvivalentna sa $Ou \subset S(Ox, Ov)$, tj. $P \in \overline{AQ}$. ■

KOROLAR 9. *Relacija uređaja definirana na skupu $\mathcal{K}$ je relacija* **linearnog** *(totalnog)* **uređaja** *i svaki podskup iz $\mathcal{K}$ ima infimum i supremum.*

Dokaz. Linearnost uređaja slijedi iz tvrdnje (a) prethodne Propozicije. U drugu ruku, tvrdnja (b) povlači da je skup $[0, \alpha]$ svih kutova između 0 i neispruženog kuta $\alpha = \sphericalangle xOy$ strogo rastuće bijektivan sa orijentiranom dužinom $\overline{AB}$, orijentiranom od A prema B (tj. dužinom kojoj je A najmanji, a B najveći element u smislu uređaja ležati između). Odavde slijedi da postoji strogo rastuća bijekcija sa skupa $\mathcal{K}$ na izlomljenu crtu ABA' (tj. uniju dužina $\overline{AB}$ i $\overline{BA'}$, orijentiranih od A prema A'). Prema tome postoji bijekcija koja čuva uređaj i preslikava $\mathcal{K}$ na zatvoreni interval I iz $\mathbf{R}$ duljine $|AB| + |BA'|$. Odavde slijedi tvrdnja, jer svaki podskup iz I ima u I infimum i supremum (v. pogl. I). ■

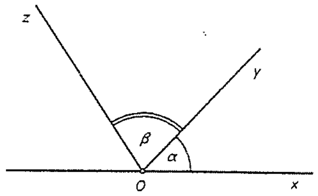
Zbrajanje i mjerenje kutova

U ovom odjeljku ćemo pod pojmom kuta podrazumijevati **neorijentirani kut**, a sa $S(Ox, Oy)$ označavat ćemo zatvoreni kutni isječak omeđen sa dva polupravca Ox, Oy koji nisu komplementarni, ili polupravac Ox ako je $Ox = Oy$.

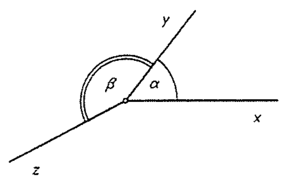
Reći ćemo da je kut γ **zbroj** kutova α i β i pisati $\gamma = \alpha + \beta$, ako postoje polupravci Ox, Oy, Oz, takvi da je $\alpha = \sphericalangle xOy$, $\beta = \sphericalangle yOz$, $\gamma = \sphericalangle xOz$ i takvi da je ili $S(Ox, Oz) = S(Ox, Oy) \cup S(Oy, Oz)$ ili je Oz polupravac komplementaran sa Ox; u tom ćemo slučaju reći da je kut β **suplement** od α i da je $\alpha + \beta$ ispruženi kut.

Zapis $\gamma = \alpha + \beta$ je ekvivalentan (po definiciji) sa svakim od zapisa $\beta = \gamma - \alpha$, $\alpha = \gamma - \beta$.

Primijetimo da u svakom od ovih slučajeva navedena tri polupravca leže u istoj poluravnini (v. sl. 17).



Sl. 17.



Sl. 18.

Iz ove definicije koja je skupovnog karaktera slijedi da je zbrajanje kutova asocijativno i komutativno, a vrijedi i pravilo skraćivanja, tj. da $\alpha+\beta=\alpha+\beta' \Rightarrow \beta=\beta'$. Primijetimo, međutim, da zbroj $\alpha+\beta$ nije uvijek definiran (v. sl. 18).

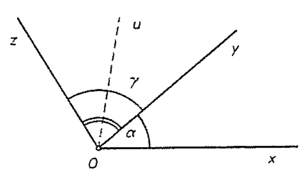
Po definiciji je **unutarnja simetrala** nekomplementarnih polupravaca Oy, Oz polupravac Ou, koji leži na simetrali polupravaca Oy, Oz i leži u $S(Oy, Oz)$. Očito je (v. sl. 19) da vrijedi $\sphericalangle yOu = \sphericalangle uOz$ i $\sphericalangle yOu + \sphericalangle uOz = \sphericalangle yOz$, što povlači $\sphericalangle yOz = 2\sphericalangle yOu$. U ovom slučaju kažemo da je kut $\sphericalangle yOu$ jednak **polovini kuta** $\sphericalangle yOz$ i pišemo $\sphericalangle yOu = \frac{1}{2}\sphericalangle yOz$. Pravi kut δ je jedinstven kut za koji vrijedi $2\delta = \delta+\delta = \omega$. Prema tome, polovica zadanog kuta je definirana.

Indukcijom slijedi da je za zadani kut α uvijek definiran niz kutova (α_n), takvih da je $2^n\alpha_n = \alpha$. Kut α_n označavamo sa $\alpha_n = 2^{-n}\alpha$.

Konstrukcija mjerenja kuta

Mjeru kuta definirat ćemo pomoću predstavnika kuta. Neka je α kut reprezentiran sa $\sphericalangle xOy$, gdje je Ox zadani polupravac, a Oy polupravac sadržan u zatvorenoj poluravnini P određenoj pravcem (Ox).

Neka je Ou unutarnja simetrala polupravaca Oy, Oz koji leže u P. Stavimo $\alpha = \sphericalangle xOy$, $\gamma = \sphericalangle yOz$ (v. sl. 19) Tada je očito $\sphericalangle xOu = \alpha + \frac{\gamma}{2}$. Štoviše, svaki polupravac koji leži u $S(Oy, Oz)$ sadržan je u jednom od isječaka $S(Oy, Ou)$ ili $S(Oz, Ou)$. Odavde indukcijom slijedi da vrijedi



Sl. 19.

PROPOZICIJA 12. *Za svaki kut α i svako $n \in \mathbf{N}$ postoji jedinstveni cijeli broj $q_n \geq 0$ takav da je*

$$q_n 2^{-n}\omega \leq \alpha < (q_n+1)2^{-n}\omega,$$

gdje je ω ispružen kut.

Dokaz se svodi na slijedeće. Za dani cijeli broj q, $0 \leq q \leq 2^n$, konstruiraju se polupravci Oy_n^q koji leže u P, takvi da je $\sphericalangle xOy_n^q = q \cdot 2^{-n}\omega$ i na provjeri tvrdnje

da 2^n kutnih isječaka $S(Oy_n^q, Oy_n^{q+1})$ $(0 \leq q \leq 2^n - 1)$ za svaki n pokrivaju čitav P. Detalje prepuštamo čitatelju. ■

Ta je konstrukcija mjerenja to točnija što je veći n i ona nam omogućuje da definiramo "mjeru" kuta. Prije svega navedimo tvrdnju koja je ekvivalentna Arhimedovu aksiomu.

PROPOZICIJA 13. *Za svaki kut $\alpha > 0$ postoji cijeli broj $n \geq 0$ takav da je $2^{-n}\omega \leq \alpha$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon = \inf\{2^{-n}\omega \mid 2^{-n}\omega \leq \alpha,\ n \in \mathbf{N}\}$. Taj ε postoji prema Korolaru 9. Kako je preslikavanje $\alpha \mapsto \frac{\alpha}{2}$ strogo rastuća bijekcija $\mathcal{K} \to [0,\delta] \subset \mathcal{K}$, to slijedi da je

$$\frac{\varepsilon}{2} = \inf\{2^{-(n+1)}\omega \mid 2^{-(n+1)}\omega \leq \alpha,\ n \in \mathbf{N}\},$$

a odavde $\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, pa je $\varepsilon = 0$. Odavde slijedi tvrdnja. ■

KOROLAR 10. *Za svaki kut α vrijedi $\alpha = \sup E_\alpha$, gdje je E_α skup kutova*

$$E_\alpha = \{q \cdot 2^{-n}\omega \mid \alpha \geq q \cdot 2^{-n}\omega,\ 0 \leq q \leq 2^n,\ n \in \mathbf{N}\}.$$

Dokaz. α je očito gornja međa skupa E_α. Dalje, za svaki kut $\beta < \alpha$ postoji $n \in \mathbf{N}$ takav da je $2^{-n}\omega < \alpha - \beta$. Neka je q najmanji prirodan broj za koji je $q \cdot 2^{-n}\omega > \alpha$. Tada kut $(q-1)2^{-n}\omega$ leži u intervalu $[\beta, \alpha]$ i pripada skupu E_α. Stoga je α najmanja gornja međa od E_α. ■

Mjera neorijentiranih kutova je svaka strogo rastuća funkcija $\varphi : \mathcal{K} \to \mathbf{R}^+$ takva da vrijedi $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$, kadgod je suma $\alpha+\beta$ definirana.

TEOREM 7. *Za svaki realni broj $s > 0$ postoji jedinstvena mjera φ na $\mathcal{K}$ takva da je $\varphi(\omega) = s$ i φ je bijekcija sa $\mathcal{K}$ na segment $[0, s] \subset \mathbf{R}$.*

Dokaz. *Jedinstvenost.* Ako takva funkcija φ postoji, onda za svaki par (n, q) prirodnih brojeva za koje je $q \leq 2^n$ mora vrijediti

$$\varphi(q \cdot 2^{-n}\omega) = q \cdot 2^{-n}s. \tag{1}$$

U drugu ruku, s oznakama iz prethodnog Korolara, za svaki kut α mora vrijediti

$$\varphi(\alpha) = \sup\{\varphi(x) \mid x \in E_\alpha\}. \tag{2}$$

Formule (1) i (2) definiraju jednoznačno E_α.

Egzistencija. Neka je $\varphi : \mathcal{K} \to \mathbf{R}^+$ preslikavanje definirano sa (1) i (2). Neka je $E = \{q \cdot 2^{-n} \mid q \leq 2^n,\ n \in \mathbf{N}\}$. Tada se lako provjeri da vrijedi

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \tag{3}$$

za sve parove $(x, y) \in E^2$ za koje je definirana suma $x+y$.

Sada metodom aproksimacije koristeći Propoziciju 4 nije teško pokazati (iako je prilično mukotrpno) da (3) vrijedi za svaki par kutova x, y za koje je zbroj $x+y$

definiran. Odavde slijedi da je φ strogo rastuća funkcija. Stoga je i injekcija. Da se dokaže da je $\varphi : \mathcal{K} \to [0, s]$ surjekcija, dovoljno je primijetiti da je svaki realni broj $\xi \in (0, s]$ gornja međa skupa $D_\xi = \{q \cdot 2^{-n} s \mid q \cdot 2^{-n} s < \xi,\ q \in \mathbb{N},\ q \leq 2^n,\ n \in \mathbb{N}\}$, te da je $x = \sup\{\frac{1}{s}\omega \mid t \in D_\xi\}$ jedinstveni realni broj za kojeg vrijedi $\varphi(x) = \xi$. ■

Na taj način je mjera kuta definirana sasvim elementarno i strogo matematički. Uočimo da smo se u dokazu umjesto dekadskim koristili "binarnim sustavom" koji omogućuje da se bolje shvati princip navedene konstrukcije.

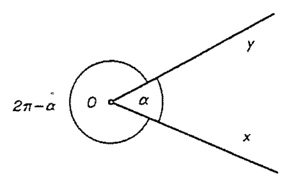
Posebno, ako je $s = 180$, onda se realan broj $\varphi(\alpha)$ zove **mjera kuta α u stupnjevima** i piše se $\varphi(\alpha) = \alpha^\circ$. Za $s = 200$ dobije se **mjera u gradima**, a za $s = \pi$ **mjera kuta u radijanima**.

Ovdje nismo razmatrali orijentirani kut i njegovu mjeru. O pojmu orijentacije bit će više govora u poglavlju o analitičkoj geometriji.

Napomenimo na kraju da iz konstrukcije mjere kuta slijedi da kut i njegova izometrična slika imaju istu mjeru. Posebno, simetrala kuta dijeli kut na dva kuta s istom mjerom, tj. na dva jednaka kuta. Zbog bijekcije u teoremu vrijedi i obratno, ako dva kuta imaju istu mjeru, oni su jednaki.

Nadalje, iz svega rečenoga slijedi da je kutna mjera pravog kuta jednaka 90°, a radijanska $\pi/2$. Svaki kut čija je mjera između 0° i 90° (odnosno u radijanima između 0 i $\pi/2$ radijana) zove se **šiljast kut**, onaj čija je mjera između 90° i 180° (odnosno između $\pi/2$ i π u radijanima) **tup kut**.

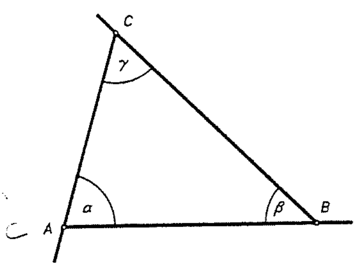
Nadalje, ukazuje se potreba da se pojam kuta proširi. Ako je zadan neki kut $\alpha = \sphericalangle xOy$, onda je njime potpuno određen njegov kutni isječak $S_\alpha \subseteq M$. Dogovorno se uzima da je komplementarni zatvoreni isječak $(M \setminus S_\alpha) \cup (Ox \cup Oy)$ također isječak nekog kuta, koji ima iste krakove kao i polazni kut. Takav kut zovemo **izbočeni kut**. Dogovorno uzimamo da je mjera takvog kuta $360^\circ - \alpha^\circ$ (odn. $2\pi - \alpha$ u radijanima). Kut i njemu pridruženi izbočeni kut zovu se **eksplementarni kutovi**. Dogovorom smatramo da postoji tzv. **puni kut**, kojemu je mjera 360° ili 2π radijana, i da je zbroj bilo kojeg kuta i njegovog eksplementarnog kuta puni kut. Formalnim zbrajanjem kutova može se dobiti zbroj koji je veći od 2π (radijana), pa ćemo tako dobiveni zbroj također zvati **zbroj kutova**, iako prema našoj definiciji ne postoji kut kojem je to mjera.

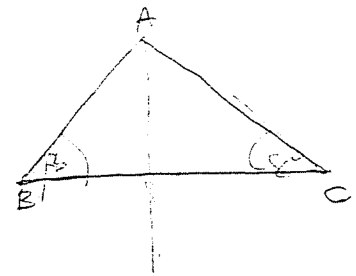


Sl. 20

1.5. Nejednakosti u trokutu. Primjene

Oznake. U daljenjem tekstu ćemo trokut čiji su vrhovi A, B, C označavati sa $\triangle ABC$. Kutove $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle ACB$ zvat ćemo unutarnji kutovi trokuta ili kraće **kutovi trokuta**. (Točnije, $\sphericalangle BAC$ je kut među polupravcima AB i AC, itd.). Njihove mjere redom označavamo sa α, β, γ. Uobičajeno je kut identificirati s njegovom mjerom i pisati $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle ACB$ (v. sl. 21).





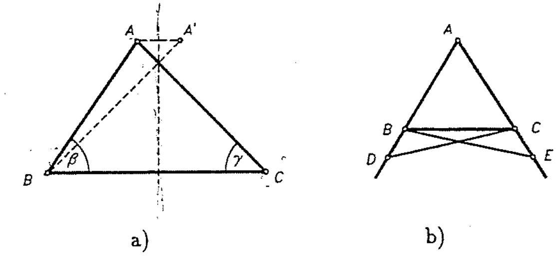
Sl. 21.

Vanjski kut trokuta $\triangle ABC$ pri vrhu A je kut između polupravca AB i polupravca koji je komplementaran polupravcu AC. Za $\triangle ABC$ kažemo da je **jednakokračan** ako bilo koje dvije stranice trokuta imaju jednaku duljinu. Takve dvije stranice zovu se **kraci** tog trokuta, a preostala stranica **osnovica** ili **baza**. Ako sve tri stranice trokuta imaju istu duljinu, onda takav trokut zovemo **jednakostranični**.

Jedna od najvažnijih karakterizacija jednakokračnog trokuta je dana ovom Propozicijom.

PROPOZICIJA 14. [2] *U trokutu $\triangle ABC$ vrijedi ekvivalencija*

$$|AB| = |AC| \Leftrightarrow \gamma = \beta.$$



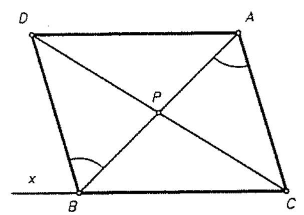
Sl. 22.

Dokaz. Prvo, $|AB| = |AC| \Rightarrow \gamma = \beta$. Ako je $|AB| = |AC|$, onda postoji simetrija s čija os prolazi vrhom A koja zamjenjuje B i C. Odatle slijedi jednakost $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$ (v. sl. 22).
Obratno, ako je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$ i A' simetrična točki A obzirom na simetralu dužine $\overline{BC}$, onda jednakost $\sphericalangle A'BC = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC$ pokazuje da se polupravci BA' i BA koji se nalaze s iste strane pravca BC podudaraju. Analogno se polupravac CA' podudara s polupravcem CA, pa odatle slijedi da je $A' = A$ i $|AB| = |AC|$. ■

[2] U starijim udžbenicima iz geometrije, ova se propozicija zvala "pons asinorum" (lat.), tj. magareći most, jer je smatrana "testom inteligencije". Smatralo se naime, da onaj koji dokaz ove propozicije nije mogao shvatiti, nije za školu, tj. da je "magarac". Drugi razlog za naziv "pons asinorum" je Euklidov dokaz te činjenice u kojem je koristio sukladnost (v. sl. 22b).

PROPOZICIJA 15. *Vanjski kut trokuta je strogo veći od svakog unutarnjeg kuta koji s njime nema zajednički vrh (koji mu nije susjedan).*

Dokaz. Neka je Bx polupravac komplementaran s polupravcem BC. Vanjski kut pri vrhu B je kut $\sphericalangle ABx$ (v. sl. 23). Dovoljno je dokazati da je $\sphericalangle ABx > \sphericalangle BAC$. Označimo polovište dužine $\overline{AB}$ sa P. Neka je D točka simetrična vrhu C obzirom na P. Kako je centralna simetrija s vrhom P izometrija, to je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABD$. U drugu ruku, točka D pripada kutnom isječku omeđenom polupravcima Bx i BA. Odavde slijedi da je $\sphericalangle ABx > \sphericalangle ABD = \sphericalangle BAC$. ∎



Sl. 23.

KOROLAR 11. *Zbroj dvaju kutova trokuta je strogo manji od ispruženog kuta ω.*

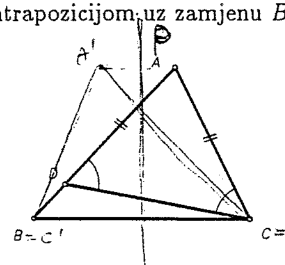
Dokaz. Zaista, uz prethodne oznake imamo

OBRAT 2

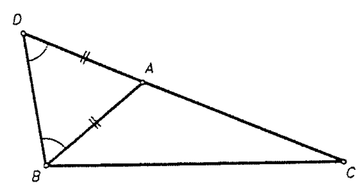
$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle CBA < \sphericalangle ABx + \sphericalangle CBA = \omega. ∎$$

PROPOZICIJA 16. *U svakom trokutu nasuprot većoj stranici leži veći kut i obrnuto.*

Dokaz. Neka je ΔABC trokut u kojem je $|AB| > |AC|$. Dokažimo da je tada $\sphericalangle ACB > \sphericalangle ABC$. U tu svrhu uzimamo točku D na stranici $\overline{AB}$ takvu da je $|AC| = |AD|$ (v. sl. 24). Prema Propoziciji 14 vrijedi $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ACD$, a prema Propoziciji 15 je $\sphericalangle ABC < \sphericalangle ADC$. Odavde slijedi $\sphericalangle ABC < \sphericalangle ACB$. Obrat se dobije kontrapozicijom uz zamjenu B i C i primjenom Propozicije 14. ∎



Sl. 24.



Sl. 25.

PROPOZICIJA 17 **(nejednakost trokuta).** *Svaka stranica trokuta manja je od zbroja ostalih dviju.*

Dokaz I. Neka je D točka na polupravcu koji je komplementaran polupravcu AC takva da je $|AD| = |AB|$ (v. sl. 25). Tada je $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ABD < \sphericalangle CBD$.

Prema Propoziciji 16 primjenjenoj na ΔBCD slijedi da je $|BC| < |CD|$, pa je $|BC| < |AB| + |BC|$.

Dokaz II. To je neposredna posljedica Aksioma III3. Napomenimo da smo zbog toga Aksiom III3 mogli oslabiti time da u njemu zahtijevamo samo da točka C pravca AB leži na dužini $\overline{AB}$ ako i samo ako je $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$. ∎

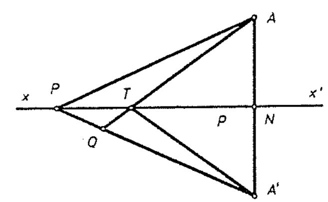
Udaljenost točke od pravca. Problemi presjeka.

PROPOZICIJA 18. *Neka je p pravac ravnine M i A točka koja ne leži na p. Označimo nadalje sa N nožište okomice spuštene iz A na p. Tada za svaku točku $T \in p$ vrijedi $|AT| \geq |AN|$. Nadalje, na svakom od polupravaca Nx, Nx' određenih točkom N na pravcu p, udaljenost $|AT|$ strogo raste kada $|NT|$ raste i teži prema $+\infty$, kada $|NT|$ teži prema $+\infty$.*

Dokaz. Neka je A' simetrična točka od A obzirom na p (v. sl. 26). Očito za svaku točku $T \in p$ vrijedi

$$2|AT| = |AT| + |A'T| \geq |AA'| = 2|AN|,$$

pa je $|AT| \geq |AN|$. Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako $T \in \overline{AA'}$, tj. za $T = N$. Ako su sada T, P bilo koje točke pravca p koje leže na istom polupravcu, recimo Nx i ako je $|NP| > |NT|$, onda je, $T \in \overline{NP}$, pa primjenom Paschovog aksioma na $\Delta NPA'$ zaključujemo da pravac AT siječe $\overline{PA'}$ u nekoj točki Q. Stoga vrijedi



Sl. 26.

$$2|AP| = |AP| + |PQ| + |QA'| > |AQ| + |QA'| =$$
$$= |AT| + |TQ| + |QA'| > |AT| + |TA'| = 2|AT|,$$

pa je $|AP| > |AT|$. Konačno, zamijenimo li uloge od A i T, dobivamo da je $|AT| > |TN|$ prema prvom dijelu dokaza. To znači da $|AT|$ teži prema $+\infty$ kada $|NT|$ teži prema $+\infty$. ∎

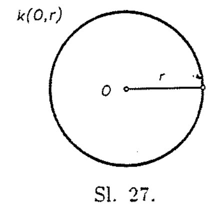
Realni broj $|AN|$ zovemo **udaljenost točke A od pravca p**. Prema dokazanoj Propoziciji, udaljenost točke od pravca je apsolutni minimum $|AT|$, kada $T \in p$. Oznaka je $d(A,p)$.

Trokut koji ima jedan pravi kut zove se **pravokutni trokut**. Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se **katete**, a preostala stranica **hipotenuza**. Iz prethodne propozicije slijedi da je svaka kateta manja od hipotenuze pravokutnog trokuta.

Primjena: Presjek pravca s kružnicom

Neka je $O \in M$ bilo koja točka ravnine M, a $r > 0$ realni broj. **Kružnica** $k(O,r)$ sa središtem (ili centrom) O i polumjerom (ili radijusom) r je skup svih točaka T ravnine M takvih da je $|OT| = r$, tj.

$$k(O,r) = \{T \in M \mid |OT| = r\}.$$



Sl. 27.

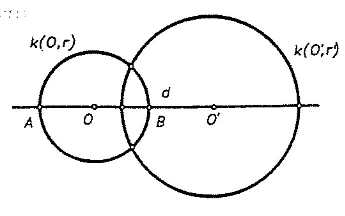
Lako se vidi da je svaki pravac kroz središte kružnice os simetrije kružnice, tj. osnom simetrijom obzirom na tu os se kružnica preslikava u samu sebe.

PROPOZICIJA 19. *Pravac $p \subset M$ siječe kružnicu $k(O,r)$ ako i samo ako je udaljenost $d(O,p) \leq r$. Pri tome pravac i kružnica imaju jednu ili dvije točke zajedničke već prema tome da li je $d(O,p) = r$ ili $d(O,p) < r$. Ako je $d(O,p) > r$, kružnica i pravac se ne sijeku.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da pravac p siječe kružnicu $k(O,r)$ u bar jednoj točki P. Tada je prema prethodnoj propoziciji $d(O,p) \leq |OP| = r$. Obrat. Neka je $d(O,p) < r$. Označimo sa N ortogonalnu projekciju O na p. Na svakom od polupravaca Nx, Nx' određenih točkom N na p, udaljenost $|OT|$ strogo raste kada $|NT|$ raste i mijenja se od $d(O,p)$ do $+\infty$ kada se $|NT|$ mijenja od 0 do $+\infty$. Prema tome ona jedan jedini puta poprima vrijednost r (zbog neprekidnosti funkcije $T \mapsto d(O,T)$). Slučaj $d(O,p) = r$ je očit. ∎

Presjek dviju kružnica

Neka su $k(O,r)$ i $k(O',r')$ dvije kružnice s različitim središtima O i O'. Pitanje presjeka tih kružnica iako intuitivno sasvim jasno, za strogi dokaz zahtijeva izvjesno poznavanje elementarne topologije ravnine i to pojam povezanog skupa, činjenice da



Sl. 28.

je kružnica povezan skup u ravnini kao i činjenica da je neprekidna slika povezanog skupa i sama povezan skup, te da je povezan neprazan skup od $\mathbf{R}$ interval (otvoren, zatvoren, poluotvoren itd.); to je Bolzano–Weierstrassov teorem (v. cit. knjigu S. Kurepe). Imajući to u vidu vrijedi

PROPOZICIJA 20. *Kružnice $k(O,r)$ i $k(O',r')$ s različitim središtima O i O' se sijeku ako i samo ako vrijedi*

$$|r - r'| \leq d \leq r + r', \qquad (*)$$

gdje je $d = |OO'|$.
One imaju dvije odnosno jednu zajedničku točku već prema tome vrijede li u prethodnoj nejednakosti obje stroge nejednakosti ili pak vrijedi jedna od jednakosti.

Dokaz. Nužnost uvjeta $(*)$ slijedi iz nejednakosti trokuta. Obrnuto. Neka vrijedi $(*)$. Neka je $f : k(O,r) \to \mathbf{R}$ funkcija definirana sa $f(T) = |O'T|$, za $T \in k(O,r)$. Na trokut $\Delta TOO'$ primijenimo nejednakost trokuta. Tada dobivamo $|d - r| \leq f(T) \leq d + r$. Osim toga f poprima vrijednosti $|d - r|$, odnosno $d + r$ u točkama A i B u kojima pravac OO' siječe kružnicu $k(O,r)$, a te točke postoje po prethodnoj Propoziciji. No f je neprekidno preslikavanje $k(O,r) \to \mathbf{R}$ (jer je ono restrikcija na $k(O,r)$ funkcije udaljenosti koja je očito neprekidna). Kako je pak kružnica povezan skup, to f poprima na svakoj od polukružnica dijametra $\overline{AB}$ sve vrijednosti između $|d-r|$ i $d+r$, pa će stoga primiti i vrijednost r', jer iz $(*)$ slijedi $|d-r| \leq r' \leq d+r$.

Preostaje pokazati da f na svakoj od polukružnica poprima vrijednost r' samo jednom. Zaista, kad bi postojale različite točke T_1 i T_2 jedne te iste polukružnice, takve da je $f(T_1) = f(T_2) = r'$, onda bi pravac OO' bila simetrala dužine $\overline{T_1T_2}$ pa bi te točke mogle pripadati istoj polukružnici samo ako je $T_1 = T_2$. Odatle slijedi tvrdnja, jer $T \in k(O,r) \cap k(O',r') \Leftrightarrow f(T) = r'$. ∎

Presjek dvaju pravaca

Pokazat ćemo da postoje pravci ravnine koji se ne sijeku. Vrijedi naime ova

PROPOZICIJA 21. *Neka je p pravac iz M, a O točka koja ne leži na p. Tada pravac p' centralno simetričan sa p obzirom na točku O ne siječe p.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno da se p i p' sijeku u točki A. Neka je $B = s_O(A)$. Kako je $B \neq A$ (radi $A \neq O$), to bi se pravci p i p' morali podudarati. Kako pravac p prolazi točkama A i B, to on sadrži i njihovo polovište O, što je u suprotnosti s pretpostavkom da O ne leži na p. ∎

PROPOZICIJA 22. *Različiti pravci p, p' okomiti na jedan pravac q se ne sijeku.*

Dokaz. To odmah slijedi iz Propozicije 8 (jedinstvenost okomice kroz danu točku). ∎

PROPOZICIJA 23. *Za svaki pravac p i svaku točku $T \notin p$ postoji bar jedan pravac koji prolazi točkom T i ne siječe p.*

Dokaz I. Odaberimo na p bilo koju točku P. Neka je O polovište dužine $\overline{PT}$. Tada pravac $s_O(p)$ prema Propoziciji 21 ne siječe p.

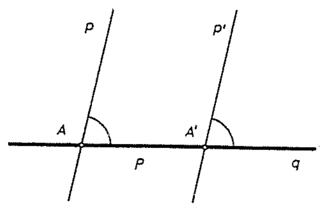
Dokaz II. Točkom T provucimo okomicu q_1 na p (Propozicija 8), a zatim točkom T okomicu q_2 na q_1. Prema prethodnoj Propoziciji p i q se ne sijeku. ■

Ova Propozicija dopušta sljedeće poopćenje

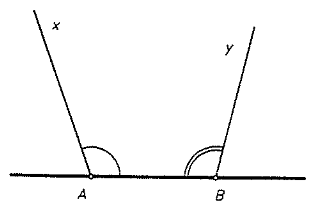
PROPOZICIJA 24. *Ako dva različita pravca p i p' zatvaraju s nekim pravcem q iste kutove* (v. sl. 29), *onda se p i p' ne sijeku.*

Dokaz. Ako p i p' sijeku q u točkama A i A', onda se lako vidi da su pravci p i p' simetrični obzirom na polovište dužine $\overline{AA'}$. Stoga tvrdnja slijedi iz Propozicije 21. ■

Ova se propozicija može preciznije formulirati i ovako



Sl. 29.



Sl. 30.

PROPOZICIJA 25. *Ako su Ax, By polupravci takvi da je zbroj $\sphericalangle xAB + \sphericalangle yBA$ jednak ispruženom kutu ili nije definiran, tada se ti polupravci ne sijeku* (v. sl. 30).

Dokaz. Kada bi se Ax i By sjekli u točki C, onda bi to bilo u kontradikciji s Propozicijom 15 primijenjenoj na $\triangle ABC$. ■

NEBJEGA

1.6. Aksiom o paralelama

U prošlom smo odjeljku vidjeli da danom točkom T izvan pravca p prolazi bar jedan pravac q koji ne siječe p. Mnogo je složenije pitanje da li iz do sada navedenih aksioma slijedi da je takav pravac q *jedinstven*. Zato se to zahtijeva posebnim aksiomom, koji se zove **aksiom o paralelama**. Pravce p i q zovemo **paralelni pravci** (**paralele** ili **usporednice**) ako se oni ili podudaraju ili se ne sijeku. To zapisujemo simbolom $p \| q$. Uočite da je relacija "biti paralelan" relacija ekvivalencije na skupu svih pravaca ravnine. Formulirajmo sada slijedeći aksiom (podsjetimo da smo na početku imali četiri skupine aksioma I, II, III, IV, a petu skupinu čini samo jedan aksiom):

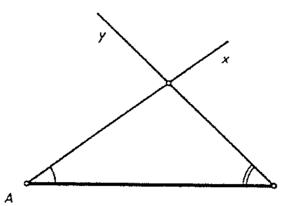
V. Aksiom o paralelama

V. Zadanom točkom T izvan zadanog pravca p prolazi najviše jedan pravac q paralelan sa p.

Iz Propozicije 23 i Aksioma o paralelama sada proizlazi da točkom T izvan pravca p prolazi točno jedan pravac q paralelan sa p.

Ovako formulirani aksiom o paralelama zove se **Playfairov**[3] **oblik** tzv. Euklidovog petog postulata o paralelama.

Prvu sistematsku aksiomatiku u geometriji razvio je starogrčki matematičar Euklid koji je živio oko 300–te godine p.n.e. i koji je napisao čuveno djelo "Elementi" ($\Sigma TOIXEIA$) u 13 knjiga. U tim je knjigama planimetrija i stereometrija prvi puta sustavno i aksiomatski izložena i služila je kao uzor rigorozne izgradnje matematičkih (a i ostalih) disciplina kroz gotovo 2 000 godina. On je osnovne istine od kojih se polazi dijelio na postulate i aksiome. Postulati su bili izreke geometrijske prirode, a aksiomi općenite prirode (npr. njegov prvi aksiom glasi: objekti koji su jednaki istom objektu i međusobno su jednaki ili npr. osmi aksiom: cjelina je veća od dijela itd.). Poznat je njegov **peti postulat**(odn. Euklidov peti postulat EPP), koji je on ovako formulirao



Sl. 31.

(E_0) Ako se dva polupravca Ax, By nalaze s iste strane pravca AB i ako je zbroj kutova $\sphericalangle xAB + \sphericalangle yBA$ strogo manji od ispruženog kuta, onda se ti polupravci sijeku (v. sl. 31).

Iz Propozicije 24 lako slijedi da je peti postulat (E_0) ekvivalentan s petim aksiomom o paralelama.

U usporedbi s ostalim Euklidovim postulatima (svega ih je bilo pet), činila se izreka petog postulata vrlo složenom pa se mislilo da peti postulat nije nezavisan od ostalih, nego da se iz preostalih postulata on može izvesti. Drugim riječima, mislilo se da je on teorem, a ne aksiom. Mnogo je eminentnih matematičara pokušalo dokazati peti postulat, no nikome to nije uspjelo. Pokazalo se, naime, da je peti posulat nezavisan od ostalih, pa je to dovelo najprije do izgradnje geometrije bez petog postulata. To je tzv. **apsolutna geometrija**. Kasnije su nezavisno jedan od drugog Gauss[4], Lobačevski[5], Bolyai[6] i drugi razvili geometriju u kojoj su peti postulat zamijenili postulatom koji kaže da točkom izvan pravca prolaze bar dva pravca paralelna s njime. Taj se postulat zove hiperbolički postulat o paralelama HPP. To je dovelo do otkrića tzv. **hiperboličke geometrije**. Kasnije su se proučavale i druge geometrije koje su se razvijale na osnovi aksioma da točkom izvan danog pravca ne prolazi ni jedan pravac koji ne siječe dani pravac. Tako je nastala tzv. Riemannova[7] **eliptička geometrija**.

[3] J. Playfair (1748–1819) engleski matematičar. Katkad se još taj Playfairov aksiom naziva i Proklov aksiom, prema starogrčkom matematičaru Proklosu (410–485).
[4] Carl Friedrich Gauss (1777–1855), njemački matematičar, fizičar i astronom.
[5] Nikolaj Ivanovič Lobačevski (1792–1856), ruski matematičar.
[6] János Bolyai (1802–1868), mađarski matematičar.
[7] G. F. Bernhard Riemann (1826–1866), njemački matematičar.

Pokazuje se da je Euklidov peti postulat, odnosno Playfairov peti aksiom o paralelama ekvivalentan s ovim tvrdnjama:

(E_1) U ravnini postoji bar jedan pravokutnik (tj. četverokut s četiri prava kuta).

(E_2) Zbroj kutova u svakom trokutu jednak je ispruženom kutu.

(E_3) Postoji par neizometričnih trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ s jednakim kutovima: $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$.

Drugim riječima, postoje dva slična, a nesukladna trokuta. O sukladnosti i sličnosti trokutova će biti riječi kasnije.

Ovaj aksiom se zove **Wallisov[8] aksiom**.

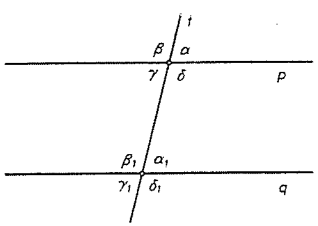
(E_4) Za svake tri točke koje ne leže na jednom pravcu postoji (jedinstvena) kružnica koja prolazi tim točkama.

Ovaj aksiom se zove **aksiom F. Bolyai-a**[9].

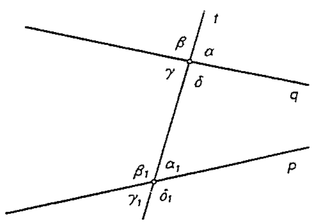
(E_5) Postoji funkcija površine $p : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ na skupu $\mathcal{P}$ svih poligona ravnine različita od nul-funkcije, tako da je $p(\Pi) \geq 0$, $\forall \Pi \in \mathcal{P}$, p je aditivna za poligone koji se sijeku samo u vrhovima i stranicama, a $p(\triangle ABC)$ ovisi samo o osnovici i visini trokuta ABC.

O poligonima i njihovim površinama će kasnije biti riječi.

Ako su zadana dva (različita) paralelna pravca p i q, onda se svaki pravac t koji siječe pravce p i q zove **transverzala (prijećnica)** pravaca p i q (v. sl. 32). Kutovi α i α_1, β i β_1, γ i γ_1, δ i δ_1 zovu se **protukuti**, γ i α_1, te δ i β_1 se zovu **unutarnji izmjenični kutovi**, a α i γ_1, te β i δ_1 **vanjski izmjenični kutovi**. Kutovi α i δ_1, β i γ_1 se zovu **vanjski**, a γ i β_1 te δ i α_1 **unutarnji prikuti**.



Sl. 32.



Sl. 33.

Lako se vidi da vrijedi

PROPOZICIJA 26. *Paralelni pravci zatvaraju sa svakom transverzalom jednake protukute, jednake izmjenične kutove i suplementarne prikute. Vrijedi i obrnuto, tj. ako dva pravca p i q presječemo trećim pravcem t, pa ako je $\alpha = \alpha_1$ (v. sl. 33), onda su pravci p i q paralelni. Slično vrijedi ako je $\alpha = \gamma_1$, odnosno, ako je $\alpha + \delta_1$ ispružen kut, tj. prikuti suplementni.*

[8] John Wallis (1616–1703), engleski matematičar.

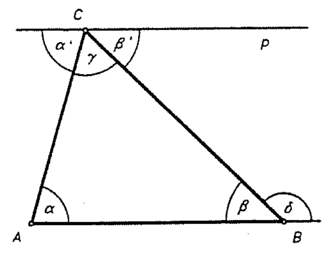
[9] Farkas Bolyai (1775–1856), mađarski matematičar, otac J. Bolyaia.

Ova Propozicija se katkad zove i **teorem o kutovima uz transverzalu dvaju paralelnih pravaca**.

Sada dokažimo **poučak o zbroju kutova u trokutu**:

PROPOZICIJA 27. *Zbroj (unutarnjih) kutova u trokutu jednak je ispruženom kutu, tj. iznosi 180° ili π radijana.*

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ dani trokut. Točkom C povucimo paralelu p s pravcem AB. Ta paralela postoji i jedinstvena je prema V aksiomu o paralelama i napomeni iz tog aksioma. Uz transverzalu AC odnosno BC paralelnih pravaca AB i p, iz Propozicije 26 slijedi da je $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$. Stoga je $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma = 180°$. Time je Propozicija dokazana. ∎



Sl. 34.

Trokut zovemo **pravokutni trokut** ako mu je jedan unutarnji kut pravi. U pravokutnom trokutu su ostala dva kuta šiljasta. Stranice uz pravi kut zovemo **katete**, a nasuprot pravom kutu **hipotenuza**.

Trokut zovemo **tupokutan** ako mu je jedan kut tupi kut. Očito, svaki trokut ima najviše jedan pravi ili tupi kut. Trokut koji nije ni pravokutan ni tupokutan, zove se **šiljastokutan**. U njemu su sva tri kuta šiljasta. U jednakostraničnom trokutu su (zbog "pons asinorum") sva tri kuta međusobno jednaka, pa iznose $180°/3 = 60°$.

Odmah se vidi da je poučak o zbroju kutova u trokutu ekvivalentan s aksiomom V o paralelama. Isto tako vrijedi **poučak o vanjskom kutu trokuta**:

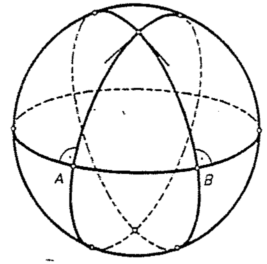
PROPOZICIJA 28. *Svaki vanjski kut trokuta jednak je zbroju onih dvaju unutarnjih kutova trokuta koji s njime nisu susjedni.*

Dokaz. Kao u dokazu Propozicije 27 imamo da je $\beta + \delta = 180°$, pa zbog $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, slijedi oduzimanjem da je $\delta = \alpha + \gamma$. ∎

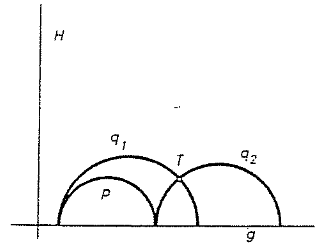
Uočite da ova Propozicija povlači Propoziciju 15. Stvar je međutim u tome da je Propozicija 15 teorem apsolutne geometrije, a Propozicija 28 to nije. Na ovom mjestu spomenimo da je poučak o zbroju kutova u trokutu "tipični" poučak **euklidske geometrije**, tj. geometrije u kojoj prihvaćamo V aksiom o paralelama kao istinit. U hiperboličkoj geometriji se pokazuje da je zbroj kutova u trokutu manji od 180°, a u eliptičkoj geometriji Riemanna je on veći od 180°. Jedan od modela u kojem vrijedi eliptička geometrija je model na sferi. Ako točkom te geometrije nazovemo par dijametralno suprotnih točaka sfere, a pravcima te geometrije glavne (najveće) kružnice na sferi, onda dobivamo model eliptičke geometrije. Odatle slijedi da je u eliptičkoj geometriji zbroj kutova u trokutu veći od 180° (v. sl. 35).

Postoji jednostavan euklidski model i hiperboličke geometrije, tzv. **Poincaréov[10] model**. Uzmimo u euklidskoj ravnini jedan pravac g i otvorenu poluravninu H

[10] Jules Henri Poincaré (1854-1912), francuski matematičar.

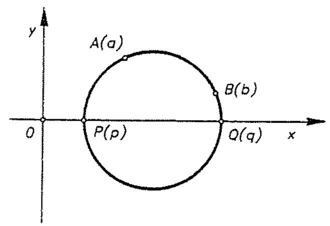


Sl. 35.



Sl. 36.

određenu tim pravcem. Točke te poluravnine H zovemo točkama tog modela hiperboličke geometrije. Nadalje, pravci te geometrije neka su polukružnice iz H s centrom na g i (otvoreni) polupravci iz H okomiti na g. Lako se vidi da u tom modelu vrijedi hiperbolički aksiom o paralelama, tj. da danom točkom T izvan danog pravca p prolaze bar dvije paralele q_1 i q_2 sa zadanim pravcem p (v. sl. 36). Ako identificiramo ravninu $\mathbf{R}^2$ sa kompleksnom ravninom $\mathbf{C}$, pa ako su točke A i B dane kompleksnim brojevima a i b, onda se udaljenost $d(A,B)$ između točaka $A(a)$ i $B(b)$ može definirati formulom (v. sl. 37)



Sl. 37.

$$d(A,B) = 2\,\mathrm{Arth}\left|\frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}}\right| = \left|\ln\left(\frac{b-p}{b-q} : \frac{a-p}{a-q}\right)\right|,$$

gdje su $\overline{a}, \overline{b}$ konjugirano kompleksni brojevi od a i b, a Arth je funkcija

$$t \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right), \qquad (|t|<1).$$

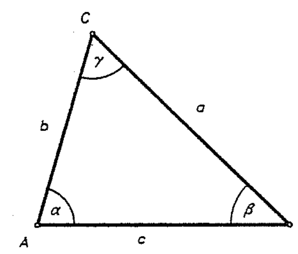
Pokazuje se da u hiperboličkoj geometriji (tj. ako vrijedi HPP) ne postoji funkcija površine kao u (E_5), ali postoji funkcija površine δ koja je za $\triangle ABC$ jednaka "defektu" $\delta(\triangle ABC) = \pi - (\alpha+\beta+\gamma)$.

§ 2. Klasična geometrija trokuta

2.1. Sukladnost trokuta

Neka je $\triangle ABC$ trokut s vrhovima A, B, C. Duljine stranica tog trokuta ćemo označavati sa $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, a tim stranicama nasuprotne kutove sa $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle ACB$. Duljine stranica i kutovi zovu se **osnovni elementi trokuta**.

Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ dva trokuta. Kažemo da su ti trokuti **sukladni** ili **kongruentni** ako postoji bijekcija $f : \{A,B,C\} \to \{A',B',C'\}$ između njihovih vrhova, tako da je $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ i takva da je $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ (tu je $a' = |B'C'|$, $\alpha' = \sphericalangle B'A'C'$ itd.). Kratko, trokuti su sukladni, ako su im korespodentne stranice (tj. njihove duljine) i korespodentni kutovi jednaki. Za sukladne trokute pišemo $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



Sl. 38.

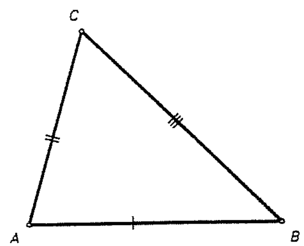
Relacija $\cong$ je relacija ekvivalencije na skupu svih trokutova ravnine (dokažite to!).

Da se u ovoj definiciji zahtijeva "previše" govore nam **teoremi** ili **poučci o sukladnosti trokuta**, tj. minimalni dovoljni uvjeti za sukladnost trokuta.

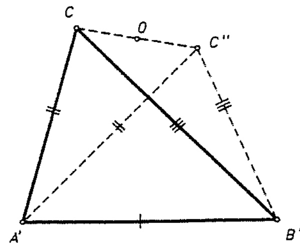
TEOREM 1 (S–S–S). *Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.*

Dokaz I. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ dva trokuta takvi da je $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$. Treba dokazati da je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, tj. da je $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Bijekciju $f : \{A,B,C\} \to \{A',B',C'\}$ iz definicije sukladnosti konstruiramo ovako. Prema Korolaru 5 iz §1. osnovnog teorema o izometrijama slijedi da postoji jedinstvena izometrija $g : M \to M$ takva da je $g(A) = A'$, $g(B) = B'$, $g(C) = C'$. Sada f definiramo sa $f = g|_{\{A,B,C\}}$. Ova izometrija očito preslikava kut α na α', β na β', γ na γ' i teorem je dokazan.

Dokaz II. Mogli smo uzeti $g : M \to M$ tako da je $g(A) = A'$, $g(B) = B'$. Ta izometrija preslikava poluravninu određenu pravcem AB u poluravninu određenu pravcem $A'B'$. Neka je $g(C) = C''$ (v. sl. 40). Ako C' i C'' leže u istoj poluravnini obzirom na $A'B'$, pokažimo da je $C' = C''$. Pretpostavimo suprotno $C' \neq C''$. Neka je O polovište dužine $\overline{C'C''}$. Kako je $|A'C'| = |A'C''|$, to je $A'O \perp C'C''$. Isto tako se vidi da je $B'O \perp C'C''$, pa bi imali dvije okomice na $C'C''$ u točki O, što je u kontradikciji s jedinstvenošću okomice povučene iz točke na zadani pravac. Prema tome je $C' = C''$. Tražena bijekcija je stoga opet $f = g|_{\{A,B,C\}}$.



Sl. 39.

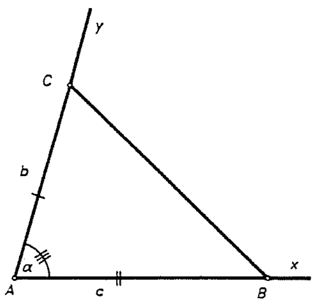


Sl. 40.

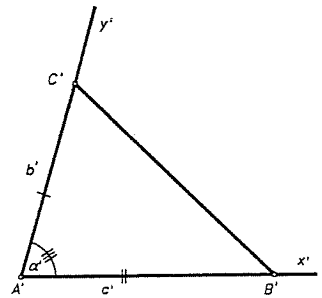
Ako C' i C'' leže u različitim poluravninama obzirom na pravac $A'B'$, onda je tražena bijekcija $f = (s \circ g)|_{\{A,B,C\}}$, gdje je s ona simetrija kojoj je os pravac $A'B'$. ∎

TEOREM 2 (S–K–S). *Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu među njima.*

Dokaz. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ trokuti takvi da je $b = b'$, $c = c'$ i $\alpha = \alpha'$.



Sl. 41.



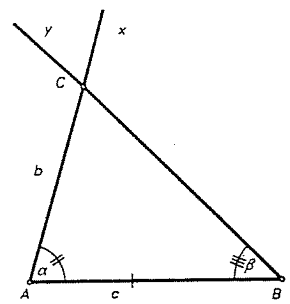
Sl. 42.

Po definiciji jednakosti kutova, postoji izometrija $g : M \to M$ takva da je $g(A) = A'$, $g(Ax) = A'x'$, $g(Ay) = A'y'$. Kako je g izometrija, to je $g(B) = B'$, $g(C) = C'$ radi $c = c'$ i $b = b'$. Stoga je i $a = a'$, pa je prema teoremu S–S–S, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. ∎

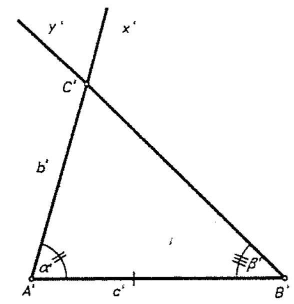
TEOREM 3 (K–S–K). *Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i dva kuta uz tu stranicu.*

Dokaz. Neka je $c = c'$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$. Neka je $g : M \to M$ izometrija za koju je $g(A) = A'$, $g(B) = B'$.

Ako C' i $g(C)$ leže u istoj poluravnini obzirom na $A'B'$, onda radi $\alpha = \alpha'$ slijedi da je $g(Ax) = A'x'$, a radi $\beta = \beta'$ da je $g(By) = B'y'$. Dokažimo da je $g(C) = C'$. Kako je g bijekcija, to je $g(C) = g(Ax \cap By) = g(Ax) \cap g(By) = A'x' \cap B'y' = C'$,



Sl. 43.

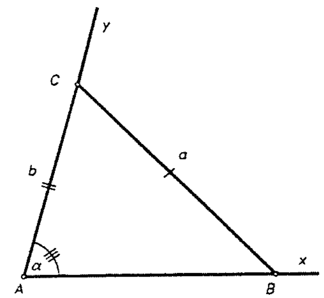


Sl. 44.

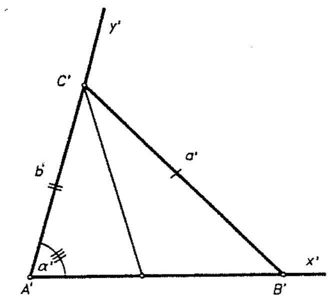
pa smo došli u uvjete teorema S–S–S, odakle slijedi $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Ako su C' i $g(C)$ u različitim poluravninama, onda se umjesto g uzme kompozicija g i osne simetrije obzirom na $A'B'$, pa se problem svodi na prethodni. ∎

TEOREM 4 ($S^{>}$–S–K). *Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.*

Dokaz. Neka je $a = a'$, $b = b'$, $a > b$, $\alpha = \alpha'$. Neka je g izometrija sa M u M,

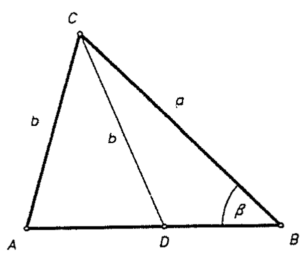


Sl. 45.



Sl. 46.

takva da je $g(A) = A'$, $g(Ax) = A'x'$, $g(Ay) = A'y'$ (takva postoji radi $\alpha = \alpha'$). Tada je očito $g(C) = C'$. Teorem će biti dokazan ako pokažemo da je $g(B) = B'$. Pretpostavimo obrnuto da je $g(B) = B'' \neq B'$. Tada B'' leži između točaka A' i B' ili je to točka poluzrake $B'x'$. Uzmimo prvo da je $A' \prec B'' \prec B'$. Tada je $|C'B''| = a'$, jer je g izometrija, a po pretpostavci je i $|B'C'| = a'$, pa je $\triangle B''B'C'$ jednakokračan. Stoga je $\measuredangle C'B''B'$ šiljast, pa je njegov suplement $\measuredangle A'B''C'$ tupi kut. Prema Propoziciji 16 iz §1 ("nasuprot većem kutu, leži veća stranica"), slijedi da je $b' > a'$, tj. $b > a$ suprotno pretpostavci. Slično se vidi da ne može biti $A' \prec B' \prec B''$, pa je stoga $g(B) = B'$. Ovime je teorem dokazan, jer je opet tražena bijekcija $f = g|_{\{A,B,C\}}$. ∎



Sl. 47.

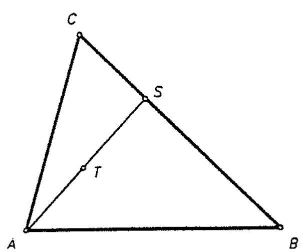
Napomena Pokažimo primjerom da dva trokuta ne moraju biti sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot manjoj od njih. Uzmimo šiljastokutan trokut $\triangle ABC$ takav da je $b < a$. Na dužini $\overline{AB}$ uzimamo točku D takvu da je $|AC| = |CD| = b$. Tada se trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle BCD$ podudaraju u dvije stranice $|AC| = |CD|$, stranici $|BC|$ i kutu β, a ti trokuti nisu sukladni, jer je $\triangle ABC$ šiljastokutan, a $\triangle BCD$ to nije.

Sva četiri poučka o sukladnosti trokuta nalazimo već u prvoj knjizi Euklidovih "*Elemenata*".

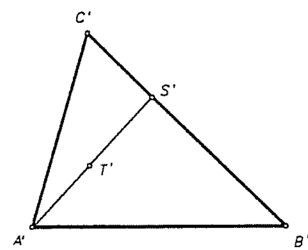
Reći ćemo općenito da su dva skupa $S, S' \subseteq M$ **izometrična (sukladna)**, ako postoji izometrija $f : M \to M$, takva da je $S' = f(S)$. Tada pišemo $S \cong S'$. Relacija $\cong$ je također relacija ekvivalencije na skupu svih podskupova od M. Da je ova oznaka u skladu s ranijom definicijom sukladnosti trokuta, pokazuje sljedeći teorem.

TEOREM 5. *Dva su trokuta $\triangle, \triangle' \subset M$ sukladna ako i samo ako postoji izometrija $f : M \to M$, takva da je $f(\triangle) = \triangle'$.*

Dokaz. $\Longleftarrow$: Neka je $f : M \to M$ izometrija, a $\triangle = \triangle ABC$. Tada točke $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ čine vrhove nekog trokuta $\triangle'$. Vrijedi $|A'B'| = |AB|$, $|B'C'| = |BC|$, $|C'A'| = |CA|$. Prema teoremu S–S–S, trokuti $\triangle$ i $\triangle'$ su kongruentni. Treba još pokazati da je zaista $f(\triangle) = \triangle'$.



Sl. 48.



Sl. 49.

Neka je točka $S \in \overline{BC}$. Kako je f izometrija, to je $|B'f(S)| + |f(S)C'| = |B'C'|$, pa $S' = f(S)$ leži na dužini $\overline{B'C'}$. Stoga f bijektivno preslikava dužinu $\overline{BC}$ na $\overline{B'C'}$. Neka je $T \in \triangle$ unutarnja točka od $\triangle$. Neka je $AT \cap BC = \{S\}$. Tada $|AT| + |TS| = |AS| \Rightarrow |A'T'| + |T'S'| = |A'S'|$, pa je $T' \in \overline{A'S'}$. Odavde slijedi da je $f(\triangle) = \triangle'$.

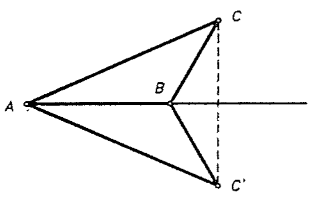
$\Longrightarrow$: Pretpostvimo sada da je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (tj. $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$). Neka je $\varphi : \{A, B, C\} \to \{A', B', C'\}$, $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\varphi(C) = C'$ bijekcija vrhova. Tvrdimo da φ možemo proširiti do

izometrije $f : M \to M$, tj. da postoji izometrija f takva da je $f(T) = \varphi(T)$ za $T \in \{A, B, C\}$. Iscrpst ćemo sve mogućnosti:

a) $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$. Tada je traženi $f = 1_M$.

b) $A = A'$, $B = B'$, $C \neq C'$. Neka je c pravac kroz A i B. Tada $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \Rightarrow |AC| = |A'C'| = |AC'|$. No tada je $s_c(A) = A = A'$, $s_c(B) = B = B'$, $s_c(C) = C'$. Dakle, izometrija $f = s_c$ proširuje φ na čitav M.

c) $A = A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$. Neka je b simetrala dužine $\overline{BB'}$. Tada $|AB| = |A'B'| = |AB'| \Rightarrow A \in b \Rightarrow s_b(A) = A = A'$, $s_b(B) = B'$. Stavimo $C_1 = s_b(C)$. Tada je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ i $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C_1$, pa je $\triangle A'B'C_1 \cong \triangle A'B'C'$.



Sl. 50.

Ako je $C_1 = C'$, onda $f = s_b$ proširuje φ na M. Ako je $C_1 \neq C'$ onda prema slučaju b) postoji pravac c tako da je $s_c(A') = A'$, $s_c(B') = B'$ i $s_c(C_1) = C'$. Tada $f = s_c \circ s_b$ proširuje φ na M.

d) $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$. Označimo simetralu dužine $\overline{AA'}$ sa a. Tada je $s_a(A) = A'$, $s_a(B) = B_2$, $s_a(C) = C_2$. Tada je $\triangle A'B_2C_2 \cong \triangle A'B'C'$, pa prema c) postoji izometrija g tako da je $g(A') = A'$, $g(B_2) = B'$, $g(C_2) = C'$. Izometrija $f = g \circ s_a$ proširuje tada φ na M. ■

Ovaj bi se teorem mogao dokazati kraće na drugi način da se pozovemo na Korolar 5 iz §1 osnovnog teorema o izometrijama, ali navedeni dokaz sadrži efektivnu konstrukciju proširenja. Napomenimo da ćemo sukladne trokutove sa stanovišta euklidske geometrije do na izometriju smatrati jednoznačno određenim.

2.2. Četiri osnovne konstrukcije trokuta

Kada se u geometriji govori o tome da je npr. trokut (ili neki geometrijski objekt) jednoznačno određen, onda se obično misli da je on određen do na izometriju ravnine.

U tom smislu teoreme o sukladnosti trokuta možemo izreći i ovako:

1. Trokut je jednoznačno određen sa svoje tri stranice.
2. Trokut je jednoznačno određen sa dvije stranice i kutom među njima.
3. Trokut je jednoznačno određen sa jednom stranicom i dva kuta uz nju.
4. Trokut je jednoznačno određen sa dvije stranice i kutom nasuprot većoj od njih.

Kada tražimo da se konstruira trokut kojem su zadane sve tri stranice, onda mislimo na to da se konstruira bilo koji trokut u ravnini, kojemu su duljine stranica jednake zadanim brojevima. Naime, u smislu gore rečenog svi su ti trokuti izometrični.

Pojasnimo sada što znači riječ **konstruirati**. Pri geometrijskim konstrukcijama služimo se samo s dva pomagala, a to su jednobridno ravnalo s kojim možemo nacrtati pravac koji prolazi kroz dvije zadane točke i šestarom s kojim možemo oko svake točke opisati kružnicu zadanog polumjera. Pri tome smatramo da znamo konstruirati presjek dvaju pravaca, presjek pravca i kružnice i presjek dviju kružnica.

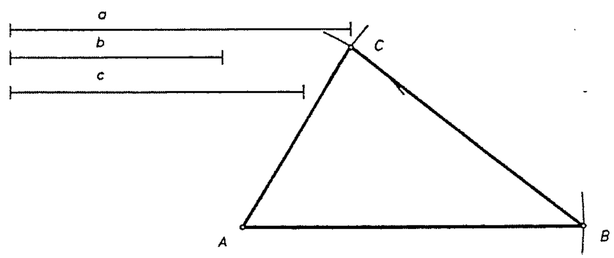
Točku ćemo smatrati konstruiranom ako je ona dobivena jednom od navedenih konstrukcija.

Trokut smatramo konstruiranim ako znamo konstruirati njegove vrhove.

Pokažimo sada četiri osnovne konstrukcije trokuta.

1. Konstruirajte $\triangle ABC$ kojem su zadane duljine stranica $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, pri čemu je $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$.

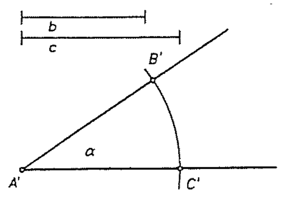
   Rješenje. Uzmimo bilo koju točku A u ravnini. Povucimo kroz A bilo koji polupravac. Oko A kao središta opišimo kružnicu polumjera c. Sjecište te kružnice i polupravca označimo sa B. Tada je $|AB| = c$. Oko točaka A i B opišimo kružnice polumjera b i c redom. Neka je C jedno od sjecišta tih dviju kružnica (Te se kružnice sijeku u dvije točke zbog gornjih nejednakosti.). Tada je $\triangle ABC$ traženi trokut. ■



Sl. 51.

2. Konstruirajte $\triangle ABC$ kojem su zadane dvije stranice $|AB| = c$, $|AC| = b$ i $\measuredangle BAC = \alpha < 180°$.

   Rješenje. Neka je A bilo koja točka u ravnini i povucimo kroz A bilo koji polupravac. Oko A kao središta opišimo kružnicu polumjera c. Ta kružnica siječe polupravac u točki B. Očito $|AB| = c$. Oko vrha zadanog kuta (zadanog grafički) opišemo kružnicu bilo kojeg radijusa. Ta kružnica siječe krakove kuta u točkama B' i C'. Oko točke A opišimo kružnicu istoga polumjera. Neka ona siječe polupravac u točki B''. Nadalje, oko B'' opišimo kružnicu radijusa $|B'C'|$, a oko točke A kružnicu polumjera $|A'C'|$. Te se dvije kružnice sijeku u dvije točke. Neka je jedno od tih sjecišta točka C''. Spojimo A sa C''. Radi S–K–S je kut $\measuredangle BAC'' = \alpha$. Oko točke A opišimo kružnicu polumjera b. Ona polupravac AC'' siječe u točki C. Tada je $\triangle ABC$ traženi trokut. ■



Sl. 52.

3. Konstruirajte $\triangle ABC$ ako su zadani jedna stranica $|AB| = c$ i dva kuta $\measuredangle BAC = \alpha$ i $\measuredangle ABC = \beta$ $(0 < \alpha + \beta < 180°)$.

   Rješenje. Nacrta se bilo koja dužina $\overline{AB}$, takva da je $|AB| = c$. Sada nanesemo kutove α i β na isti način kao i u konstrukciji 2. Drugi krakovi tih kutova sijeku se u vrhu C. $\triangle ABC$ je traženi trokut. ■

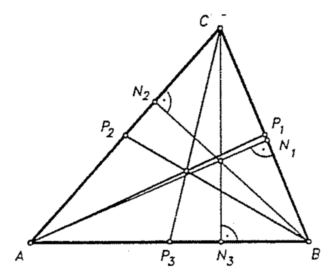
4. Konstruirajte $\triangle ABC$ kojem su zadane dvije stranice a i b, $a > b$ i kut $\measuredangle BAC = \alpha < 180°$.

   Rješenje. Uzmimo bilo koju točku A u ravnini i povucimo bilo koji polupravac točkom A. Nanesimo kut α tako da mu vrh bude u A, a jedan krak da mu bude taj polupravac. Oko A opišimo kružnicu polumjera b. Ona siječe drugi krak kuta u točki C. Oko C opišemo kružnicu polumjera a. Ona siječe prvi krak kuta u točki B. $\triangle ABC$ je traženi trokut. ■

O drugim geometrijskim konstrukcijama govorit ćemo kasnije (v. §7).

2.3. Četiri osobite točke trokuta

Uvedimo još neke osnovne pojmove u svezi s trokutom. Neka je $\triangle ABC$ dani trokut. Označimo sa N_1, N_2, N_3 sjecišta okomica povučenih iz točaka A, B, C na pravce BC, CA, AB redom (v. sl. 53).



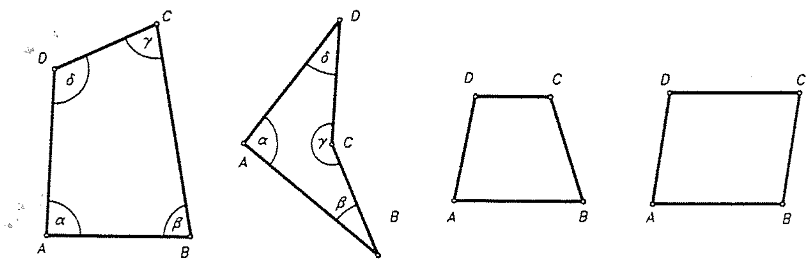
Sl. 53.

Dužine $\overline{AN_1}$, $\overline{BN_2}$, $\overline{CN_3}$ zovemo **visine trokuta** $\triangle ABC$. Katkada se visine trokuta identificiraju sa njihovim duljinama v_a, v_b, v_c, gdje je $v_a = |AN_1|$, $v_b = |BN_2|$, $v_c = |CN_3|$.

Neka su P_1, P_2, P_3 polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ΔABC redom. Dužine $\overline{AP_1}$, $\overline{BP_2}$ i $\overline{CP_3}$ zovemo **težišnice** trokuta ΔABC. Uobičajene su oznake $|AP_1| = t_a$, $|BP_2| = t_b$ i $|CP_3| = t_c$. I ovom prilikom težišnice se identificiraju s njihovim duljinama. Dužina koja spaja polovišta dviju stranica zove se **srednjica trokuta**.

Simetrale s_α, s_β, s_γ unutarnjih kutova α, β, γ trokuta ΔABC zovemo **simetrale (raspolovnice) kutova trokuta** ABC. Označimo sjecište simetrale s_α kuta α i suprotne stranice $\overline{BC}$ sa S_1 itd. Duljina $|AS_1|$ zove se **duljina simetrale kuta** α itd. Uobičajeno je simetrale identificirati s njihovim duljinama, tj. $s_\alpha = |AS_1|$, $s_\beta = |BS_2|$, $s_\gamma = |CS_3|$.

Neka su u ravnini zadane četiri točke A, B, C, D. Promotrimo uniju dužina $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ takvih da se nikoje dvije dužine ne sijeku u svojoj unutrašnjoj točki. Takvu uniju dužina zovemo **(zatvorenom) poligonalnom crtom**. Dio ravnine omeđen tom poligonalnom crtom (detaljnije v. u §3), zovemo **četverokut** i obilježavamo sa $ABCD$. Točke A, B, C, D zovemo **vrhovi četverokuta**, a dužine $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ **stranice** tog četverokuta. Parove $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, te $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ zovemo **nasuprotnim stranicama četverokuta**. Vrhove koji leže na istoj stranici zovemo **susjedni vrhovi**, a ako ne leže na istoj stranici, onda ih zovemo **suprotnim vrhovima**. Stranice sa zajedničkim vrhom zovemo **susjedne stranice**. Dužinu koja spaja suprotne vrhove zovemo **dijagonala četverokuta**. Svaki četverokut ima očito dvije dijagonale. Kutove $\alpha = \sphericalangle BAD$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCD$ i $\delta = \sphericalangle CDA$ zovemo (unutarnji) **kutovi četverokuta**. Kutove α i γ, te β i δ zovemo **nasuprotnim kutovima četverokuta**.



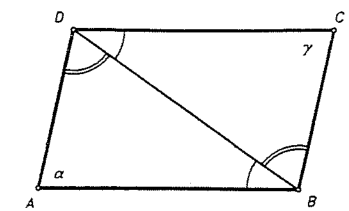
Sl. 54.

Trapez je četverokut kojemu bar jedan par nasuprotnih stranica leži na paralelnim pravcima (v. sl. 54c). Te paralelne stranice se zovu **osnovice** ili **baze trapeza**, a ostale dvije **krakovi trapeza**.

Paralelogram je četverokut kojemu oba para nasuprotnih stranica leže na paralelnim pravcima (v. sl. 54d).

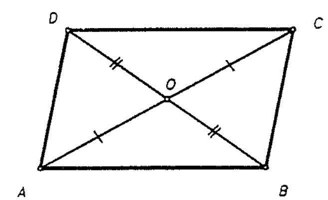
Primjer 1. Dokažite (a) Suprotne stranice i suprotni kutovi paralelograma su jednaki; (b) Četverokut je paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju; (c) Ako za četverokut $ABCD$ vrijedi $|AD| = |BC|$ i $AD \parallel BC$, onda je $ABCD$ paralelogram.

Dokaz. (a) Neka je $ABCD$ paralelogram i BD jedna njegova dijagonala. Tada je BD priječnica (transverzala) paralelnih pravaca AB i CD, pa je $\sphericalangle BDC = \sphericalangle ABD$ (unutarnji izmjenični kutovi). Na isti je način $\sphericalangle DBC = \sphericalangle ADB$. Prema teoremu o sukladnosti trokuta K–S–K slijedi da je $\Delta ABD \cong \Delta CDB$. Stoga je $|AD| = |BC|$, $|AB| = |CD|$ i $\alpha = \gamma$.

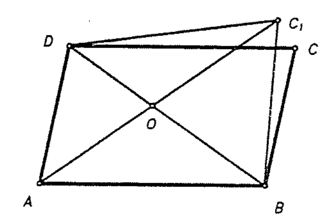


Sl. 55.

(b) Dokažimo prvo, ako se dijagonale raspolavljaju, onda je četverokut $ABCD$ paralelogram. Neka je sjecište dijagonala točka O. (v. sl. 56). Po pretpostavci je $|OA| = |OC|$, $|OB| = |OD|$. Nadalje, kut $\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOC$ (vršni kutovi), pa je $\Delta AOD \cong \Delta COB$ (K–S–K). Stoga je $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACB$, pa je pravac AD paralelan pravcu BC. Isto tako se vidi da je $AB \| CD$. Zato je $ABCD$ paralelogram. Obratno, pretpostavimo da je O polovište dijagonale BD paralelograma $ABCD$.



Sl. 56.



Sl. 57.

Produžimo AO preko vrha O i na tom produžetku konstruiramo točku C_1, tako da je $|AO| = |OC_1|$ (v. sl. 57). Prema prethodnom je ABC_1D paralelogram, pa je pravac $DC_1 \parallel DC$, pa bi na taj način imali točkom D dva pravca paralelna s AB, što je nemoguće prema V postulatu.

Stoga se točke C i C_1 podudaraju, pa se paralelogram $ABCD$ podudara s paralelogramom ABC_1D. Zato se njegove dijagonale raspolavljaju (jer se po konstrukciji dijagonale od ABC_1D raspolavljaju).

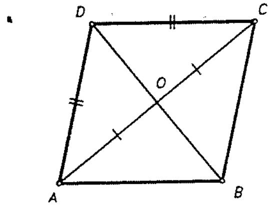
(c) Tvrdnja slijedi slično kao gore iz $\Delta AOD \cong \Delta COB$ (K–S–K). ■

Iz ovih razmatranja slijedi da je paralelogram $ABCD$ s presjekom dijagonala O centralno simetričan četverokut s centrom simetrije O, tj. $s_O(ABCD) = ABCD$.

Pravokutnik (pačetvorina) je paralelogram kod kojeg je jedan kut pravi. Lako se vidi (dokažite to!) da su i svi ostali unutarnji kutovi pravokutnika pravi. Posebni slučaj pravokutnika je **kvadrat (četvorina)**, tj. pravokutnik kojemu su sve stranice međusobno jednake. **Romb** je paralelogram kojemu su sve stranice međusobno jednake.

Primjer 2. Dokažite da su dijagonale romba međusobno okomite i da su simetrale unutarnjih kutova romba.

Rješenje. Neka je O sjecište dijagonala romba $ABCD$. Tada je $\triangle AOD \cong$ $\cong \triangle COD$ (S–S–S), pa je $\sphericalangle AOD =$ $= \sphericalangle DOC$, te je stoga $\sphericalangle AOD$ jednak svom suplementu. Dakle je to pravi kut. Nadalje, kako je $\triangle ABO \cong ADO$ (također S–S–S), to je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD$, pa je AC simetrala kuta $\sphericalangle BAD$. ■



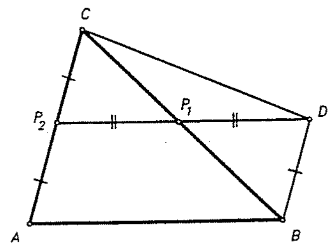
Sl. 58.

Posebno odavde slijedi da su dijagonale kvadrata jednake, okomite i raspolavljaju se. Uočite da dijagonale romba ne moraju biti jednake.

PROPOZICIJA 1 (Teorem o srednjici trokuta). *Srednjica trokuta paralelna je trećoj stranici i jednaka je njenoj polovici.*

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ dani trokut, P_1, P_2 redom polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$. Produžimo srednjicu P_2P_1 preko vrha P_1 i konstruirajmo na tom produžetku točku D tako da je $|P_2P_1| = |P_1D|$.

Tada je četverokut P_2BDC paralelogram, jer se njegove dijagonale $\overline{BC}$ i $\overline{P_2D}$ raspolavljaju u točki P_1 (vidi Primjer 1). Stoga je duljina $|BD| = |P_2C|$ i pravac $BD \parallel P_2C$, a odatle slijedi da je $|BD| = |AP_2|$, pa je $ABDP_2$ paralelogram (prema Primjeru 1c). Stoga je $P_2P_1 \parallel AB$ i $|P_2P_1| = |AB|/2$. ■

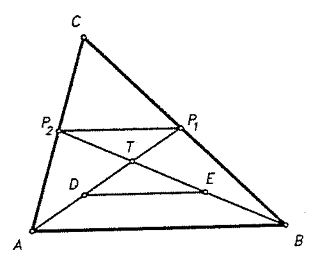


Sl. 59.

TEOREM 6 (o težištu trokuta). *Težišnice trokuta $\triangle ABC$ sijeku se u jednoj točki T koju zovemo* **težište trokuta**. *Nadalje, težište T dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 računajući od vrha, tj. $|AT| : |TP_1| = |BT| : |TP_2| = |CT| : |TP_3| = 2 : 1$. ($P_1, P_2, P_3$ su polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ redom).*

Dokaz. Neka se $\overline{AP_1}$ i $\overline{BP_2}$ sijeku u točki T. Pokazat ćemo da točka T dijeli svaku od težišnica u omjeru 2 : 1. U tu svrhu označimo sa D i E redom polovišta dužina $\overline{AT}$ i $\overline{BT}$. Prema teoremu o srednjici, pravac DE je paralelan sa AB i $|DE| = \frac{1}{2}|AB|$ (teorem o srednjici je primijenjen na $\triangle ABT$).

Nadalje, pravac P_2P_1 je također paralelan sa AB i $|P_2P_1| = \frac{1}{2}|AB|$. Iz ovih



Sl. 60.

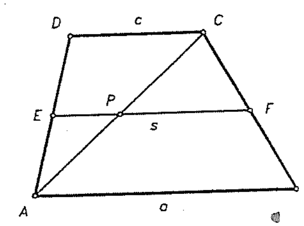
činjenica slijedi da je četverokut DEP_1P_2 paralelogram (v. Primjer 1). Stoga je $|DT| = |TP_1|$. Kako je D polovište od $\overline{AT}$, to je $|AT| : |TP_1| = 2 : 1$. Analogno je $|BT| = |TP_2| = 2 : 1$.

Isti taj postupak ponovimo za težišnice $\overline{BP_2}$ i $\overline{CP_3}$. Neka se one sijeku u točki T'. Tada se dobiva $|BT'| : |T'P_2| = 2 : 1 = |CT'| : |T'P_3|$. Kako na $\overline{BT_2}$ postoji jedinstvena točka koja ju dijeli omjerom 2 : 1, to je $T = T'$ i teorem je dokazan. (Drugi dokaz ovog teorema izvest ćemo vektorski, vidi §5. Primjer 1). ■

U vezi srednjice, vratimo se malo na trapez. **Srednjica trapeza** je dužina koja spaja polovišta krakova trapeza.

TEOREM 7 (o srednjici trapeza). *Srednjica trapeza je paralelna osnovkama trapeza i jednaka je polovici zbroja osnovaka, tj.* $s = \dfrac{a+c}{2}$ (v. sl. 61).

Dokaz. Neka je $ABCD$ trapez s osnovkama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ ($AB \parallel CD$) i neka je $|AB| = a$, $|CD| = c$, te neka je E polovište kraka $\overline{AD}$ tog trapeza. Promotrimo $\triangle ACD$ i u njemu povucimo srednjicu EP kroz E, gdje je P polovište od $\overline{AC}$. Prema teoremu o srednjici trokuta, slijedi da je $EP \parallel CD$ i $|EP| = |CD|/2$. Nadalje, neka pravac EP siječe BC u točki F. Budući je $PF \parallel CD$, a $CD \parallel AB$, slijedi $PF \parallel AB$. Kako $\overline{PF}$ prolazi polovištem P dužine $\overline{AC}$, to zbog jedinstvenosti polovišta dužine i teorema o srednjici trokuta (za $\triangle ABC$) slijedi da je F polovište dužine $\overline{BC}$. Stoga je $\overline{EF}$ srednjica trapeza $ABCD$ i zbog $|PF| =$ $= |AB|/2$ dobivamo $s = |EF| = |EP| +$ $|PF| = (|AB| + |CD|)/2 = (a+c)/2$. ■



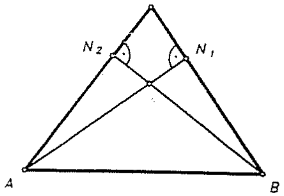
Sl. 61.

Primjer 3. Ako su u trokutu jednake dvije a) visine; b) težišnice; c) simetrale kutova (**Steinerov**[11] **teorem**) dokažite da je onda trokut jednakokračan.

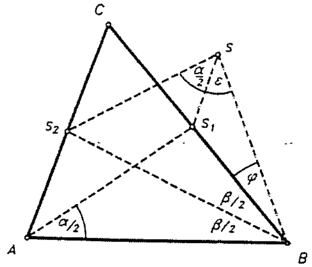
Rješenje. a) Riješimo problem za šiljastokutan trokut $\triangle ABC$ (v. sl. 62). Neka je $v_a = |AN_1| = |BN_2| = v_b$. Dokažimo da je tada $|AC| = |BC|$. Najprije je $\triangle ABN_1 \cong \triangle BAN_2$ (zbog S$^>$–S–K). Odavde slijedi da je $|AN_2| = |BN_1|$. Nadalje je $\triangle AN_1C \cong \triangle BN_2C$ (zbog K–S–K), pa je $|CN_1| = |CN_2|$. Zbrajanjem ovih jednakosti slijedi da je $|AC| = |BC|$. Slučaj tupokutnog trokuta prepuštamo čitateljima.

b) Znamo da se sve tri težišnice trokuta sijeku u težištu T trokuta i da težište dijeli težišnicu u omjeru 2 : 1 računajući od vrha. Neka su P_1 i P_2 polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ trokuta ABC (v. sl. 60). Po pretpostavci je $|AP_1| = |BP_2|$. Stoga je $\triangle ABT$ jednakokračan. Iz istih je razloga $\triangle TP_1P_2$ jednakokračan. Slijedi da je $\triangle AP_2T \cong \triangle BP_1T$, pa odavde da je $\sphericalangle TAP_2 = \sphericalangle TBP_1$. Kako je $\triangle ABT$ jednakokračan, slijedi da je $\sphericalangle BAT = \sphericalangle ABT$. Zbrajanjem posljednjih dviju jednakosti slijedi da je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$, pa je $\triangle ABC$ jednakokračan.

[11] Jacob Steiner (1796–1863), švicarski matematičar.



Sl. 62.



Sl. 63.

c) Tvrdnju ćemo dokazati kontradikcijom. Pretpostavimo da trokut nije jednakokračan i neka je npr. $\alpha < \beta$ (v. sl. 63). Neka su sjecišta simetrala s_α i s_β sa suprotnim stranicama S_1 i S_2. Nadopunimo S_2, A, S_1 do paralelograma S_2AS_1S (vidi Primjer 1). Zbog pretpostavke o jednakosti $s_\alpha = |AS_1| = |BS_2| = s_\beta$, slijedi da je ΔBS_2S jednakokračan, pa vrijedi $\frac{\alpha}{2} + \varepsilon = \frac{\beta}{2} + \varphi$. Odavde zbog $\alpha < \beta$ slijedi $\varepsilon > \varphi$. Odavde slijedi

$$|BS_1| > |SS_1| = |AS_2|. \qquad (*)$$

Kako se trokuti ΔABS_1 i ΔBAS_2 podudaraju u dvije stranice i kako je $\alpha < \beta$, slijedi (zašto?) da je $|BS_1| < |AS_2|$, što je u kontradikciji s (*). ■

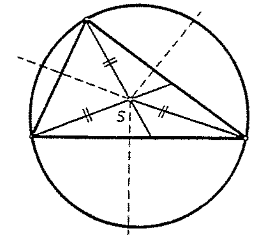
TEOREM 8 (o sjecištu simetrala stranica). *Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki i ta je točka središte tom trokutu opisane kružnice.*

Dokaz. Neka je ΔABC dani trokut, a s_a, s_b simetrale stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ i neka se one sijeku u točki S. Prema svojstvu simetrale dužine slijedi $|SB| = |SC|$ i $|SC| = |SA|$. Stoga je $|SB| = |SA|$, pa se S nalazi i na simetrali s_c stranice $\overline{AB}$ (v. sl. 64). Dakle je točka S jednako udaljena od točaka A, B i C, pa je S središte kružnice koja prolazi vrhovima trokuta. Obratno, ako imamo neku kružnicu, koja prolazi svim trima vrhovima, onda je njeno središte na jednakoj udaljenosti od vrhova, pa leži na svim simetralama stranica. Dakle, trokut ima jedinstvenu kružnicu koja prolazi njegovim vrhovima i zove se **opisana kružnica trokutu**. ■

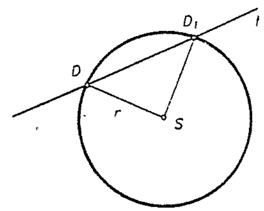
Neka je $k(S, r)$ kružnica s centrom S i radijusom r, a D bilo koja točka kružnice, tj. $|SD| = r$. Pravac t koji prolazi točkom D, a okomit je na SD zove se **tangenta** (**dirka**) te kružnice u točki D. Točka D se zove **diralište tangente** t. Za tangentu se još kaže da **dira** kružnicu.

PROPOZICIJA 2. *Tangenta t kružnice ima s tom kružnicom samo jednu zajedničku točku D i to je diralište od t.*

Dokaz. Pretpostavimo da t siječe kružnicu osim u D još u točki D_1 (v. sl. 65). Tada je ΔSDD_1 jednakokračni trokut. Kako su kutovi na osnovici jednakokračnog trokuta jednaki, slijedilo bi da taj trokut ima dva prava kuta, što je nemoguće. Dobiveno proturječje dokazuje tvrdnju. ■



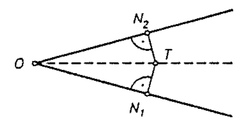
Sl. 64.



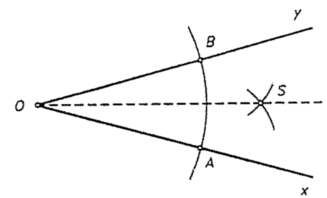
Sl. 65.

PROPOZICIJA 3 (o simetrali kuta). *Točka je na simetrali kuta ako i samo ako je jednako udaljena od njegovih krakova.*

Dokaz. Neka je točka T na simetrali nekog kuta. Spustimo iz T okomice na krakove kuta s nožištima N_1 i N_2. Tada iz sukladnosti $\Delta OTN_1 \cong \Delta OTN_2$ (K–S–K) slijedi $|TN_1| = |TN_2|$. Obratno, ako je T takva točka da je $|TN_1| = |TN_2|$, onda se trokuti ΔOTN_1 i ΔOTN_2 podudaraju u dvije stranice ($\overline{OT}$ zajednička i $|TN_1| = |TN_2|$) i pravome kutu nasuprot većoj od njih. Stoga je prema teoremu o sukladnosti S$^>$-S-K, $\Delta OTN_1 \cong \Delta OTN_2$, pa je $\sphericalangle N_1OT = \sphericalangle N_2OT$, te stoga točka T leži na simetrali kuta $\sphericalangle N_1ON_2$. ■



Sl. 66.

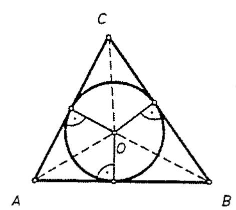


Sl. 67.

Pokažimo kako se konstruira simetrala danog kuta. Neka je (Ox, Oy) zadani kut. Oko točke O opišimo bilo koju kružnicu i neka ona siječe Ox i Oy redom u točkama A i B. Oko točaka A i B opišimo kružnice polumjera većeg od $|AB|/2$ i neka je S jedno od sjecišta. Tada je točka S na simetrali kuta $\sphericalangle(Ox, Oy)$, pa je pravac OS tražena simetrala. To odmah slijedi iz $\Delta OAS \cong \Delta OBS$ (S–S–S), pa je $\sphericalangle AOS = \sphericalangle BOS$.

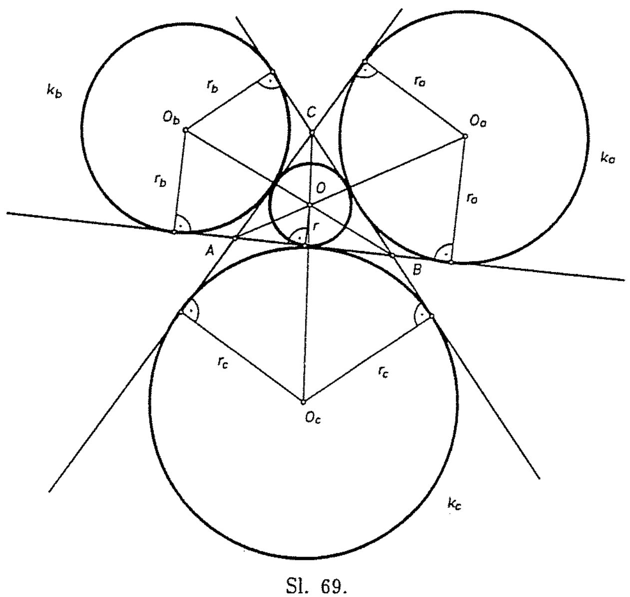
TEOREM 9 (o simetralama kutova trokuta). *Sve tri simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Dokaz. Neka je O sjecište simetrala s_α i s_β unutarnjih kutova α i β trokuta ABC (v. sl. 68). Prema prethodnoj propoziciji, točka O je jednako udaljena od krakova AB i AC kuta α i jednako udaljena od krakova BA i BC kuta β. Stoga je ona jednako udaljena i od krakova CA i CB kuta γ, što (opet prema prethodnoj propoziciji) znači da i treća simetrala s_γ prolazi točkom O. ■



Sl. 68.

Točka u kojoj se sijeku sve tri simetrale unutarnjih kutova trokuta je iz navedenih razloga središte kružnice koja dira sve tri stranice trokuta. Ta se kružnica zove trokutu **upisana kružnica**. Polumjer te kružnice je udaljenost njenog središta O do bilo koje stranice trokuta, a ta točka **središte upisane kružnice trokuta**.

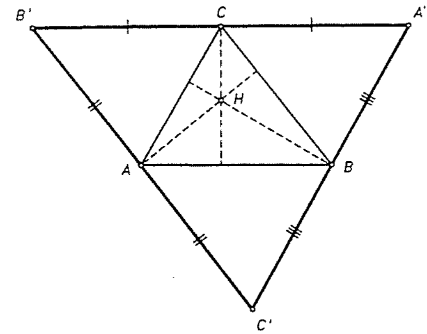


Sl. 69.

Slično se vidi da se simetrale jednog unutarnjeg kuta trokuta i simetrale preostalih dvaju vanjskih kutova trokuta sijeku u jednoj točki i ta se točka zove **središte trokutu pripisane kružnice**. Jasno je da svaki trokut ima tri pripisane kružnice (v. sl. 69). One se označavaju sa $k_a(O_a, r_a)$, $k_b(O_b, r_b)$, $k_c(O_c, r_c)$, a upisana sa $k(O, r)$.

TEOREM 10 (o visinama trokuta). *Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ zadani trokut. Svakim vrhom trokuta povucimo paralelu s nasuprotnom stranicom. Tako dobijemo trokut $\triangle A'B'C'$ (v. sl. 70). Tada je $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$ i $BC \parallel B'C'$. Prema konstrukciji je četverokut $ABA'C$ paralelogram, pa je $|AB| = |A'C|$. No i četverokut $ABCB'$ je paralelogram, pa je također $|AB| = |B'C|$. Stoga je C polovište stranice $\overline{A'B'}$. Na isti način se vidi da su A, odnosno B polovišta stranica $\overline{B'C'}$, odnosno $\overline{A'C'}$ (uočite da je $\overline{AB}$ srednjica trokuta $\triangle A'B'C'$).



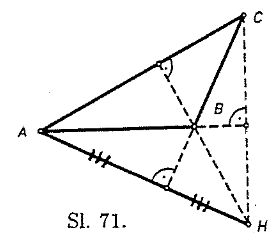
Sl. 70.

Prema konstrukciji su, dakle pravci koji leže na visinama trokuta $\triangle ABC$ simetrale stranica trokuta $\triangle A'B'C'$, pa se prema teoremu o simetralama stranica trokuta one sijeku u jednoj točki. ■

Sjecište H pravaca na kojima leže visine trokuta zove se **ortocentar trokuta**.

Napomena. Uočite da nije istinita izreka. "Visine trokuta sijeku se u jednoj točki." Naime, kod tupokutnog trokuta to nije slučaj (v. sl. 71).

Težište, središte opisane kružnice, središte upisane kružnice i ortocentar trokuta zovemo **osobitim točkama trokuta**.



Sl. 71.

2.4. Sličnost trokuta

Osnovni teorem na kojem će se osnivati sličnost trokuta je tzv. Talesov poučak o proporcionalnosti u pramenu pravaca. Dokaz će se de facto oslanjati na svojstva realnih brojeva, na činjenicu da su racionalni brojevi gusti na $\mathbb{R}$, točnije vrijedi

LEMA 1. *Ako su $x < y$ bilo koja dva realna broja, onda postoji racionalan broj r tako da je $x < r < y$. (v. pogl. I)*

LEMA 2 (o uspoređivanju). *Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ i pretpostavimo da vrijedi*

$$r \in \mathbb{Q}, \qquad r < x \Rightarrow r < y \tag{1}$$

i

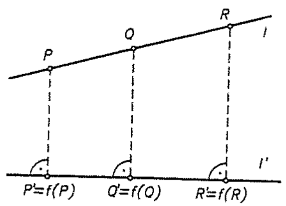
$$r \in \mathbb{Q}, \qquad r < y \Rightarrow r < x \tag{2}$$

Tada je $x = y$.

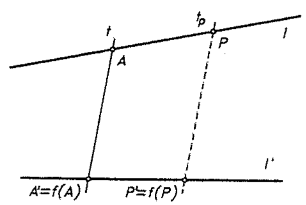
Dokaz. Pretpostavimo da je $x < y$. Prema Lemi 1 postoji $r \in \mathbb{Q}$ tako da je $x < r < y$. Stoga je r manji od y, ali nije manji od x, što proturječi (2). Slično, ako je $y < x$, onda postoji $r' \in \mathbb{Q}$ tako da je $y < r' < x$, što proturječi (1). Stoga je $x = y$. ■

Paralelna projekcija

Znamo da se iz dane točke van danog pravca može na taj pravac kroz tu točku povući jedinstvena okomica (v. §1. Prop. 8). Neka su stoga dana dva pravca l i l' u ravnini. Tada možemo definirati **ortogonalnu projekciju** $f : l \to l'$ definiranu sa $P \mapsto P' = f(P)$, gdje je P' nožište okomice kroz P na l'. Općenitije, neka su l i l' bilo koji pravci ravnine, a t neka je njihova transverzala. Neka t siječe l i l' u točkama A i A' redom. Neka je $A' = f(A)$. Za svaku točku $P \in l$ neka je t_P



Sl. 72.



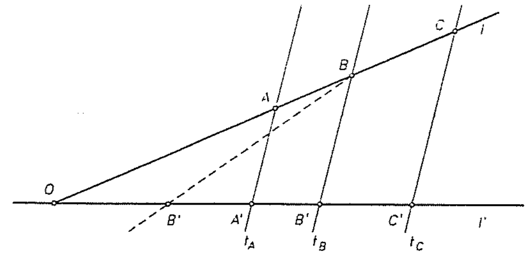
Sl. 73.

pravac kroz P paralelan sa t, a $P' = f(P) = t_P \cap l'$. Tako dobijemo preslikavanje $f : l \to l'$ (uočite da smo koristili V postulat o paralelama!). To se preslikavanje zove **paralelna projekcija** sa l na l' **u smjeru** pravca t.

Osnovna svojstva paralelnog projiciranja sadržana su u sljedećem teoremu.

TEOREM 11. (a) *Paralelno projiciranje $f : l \to l'$ je bijekcija;*
(b) *Paralelno projiciranje čuva relaciju "ležati između" (tj. ako na l imamo $A \preceq B \preceq C$, onda je $A' \preceq B' \preceq C'$, na l');*
(c) *Paralelno projiciranje čuva jednakost dužina, tj. ako je $|AB| = |CD|$ na l, onda je $|A'B'| = |C'D'|$ na l'.*

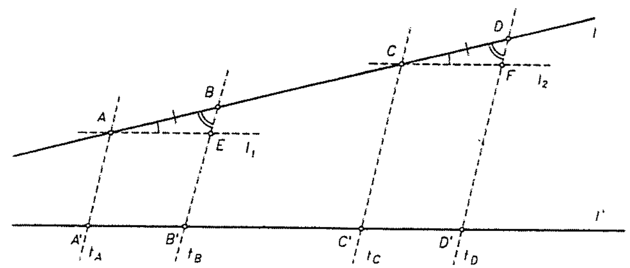
Dokaz. (a) Ako je $f : l \to l'$ paralelno projiciranje sa l na l' u smjeru priječnice t, neka $g : l' \to l$ paralelno projicira l' na l u smjeru t. Očito je $f \circ g = 1_{l'}$, $g \circ f = 1_l$, pa je g inverzno preslikavanje od f i stoga je f bijekcija.
(b) Neka je $A \preceq B \preceq C$ na pravcu l, a t_A, t_B, t_C pravci kroz A, B, C paralelni sa t. Tada je $t_A \| t_B \| t_C$. Ako su pravci l i l' paralelni onda tvrdnja slijedi iz svojstva paralelograma tj. da tada paralelna projekcija preslikava dužine u jednake dužine,



Sl. 74.

pa iz činjenice $A \preceq B \preceq C \Leftrightarrow |AC| = |AB| + |BC|$ slijedi $|A'C'| = |A'B'| + |B'C'|$, tj. $A' \preceq B' \preceq C'$.

Neka je sada $l \cap l' = \{O\}$. Treba pokazati da je $A' \preceq B' \preceq C'$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $B' \prec A'$ ili $C' \prec B'$. Uzmimo da je $B' \prec A'$. Primjena Paschovog aksioma na $\triangle OAA'$ i na pravac BB' povlači da BB' mora sjeći stranicu $\overline{AA'}$, jer dužinu $\overline{OA}$ ne može sjeći, budući već siječe OA u točki B, pa kad bi sjekao OA u još jednoj točki, l i t_B bi se podudarali, pa t_B nebi bila priječnica pravaca l i l'. Slično se zaključuje u slučaju $C' \prec B'$.
(c) Ako je $l \| l'$, onda su $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ nasuprotne stranice paralelograma, pa je $|AB| = |A'B'|$. Slično je $|CD| = |C'D'|$, pa je kao što se traži $|A'B'| = |C'D'|$.

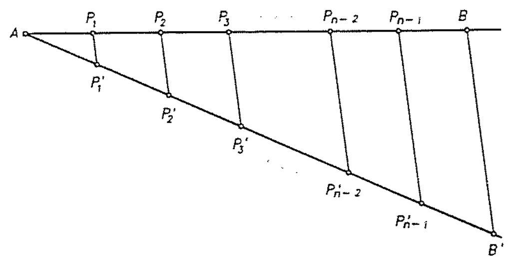


Sl. 75.

Pretpostavimo sada da l i l' nisu paralelni (v. sl. 75).

Točkama A i C povucimo redom paralele sa l'. Neka su to l_1 i l_2. Neka je $l_1 \cap t_B = \{E\}$, $l_2 \cap t_D = \{F\}$. Sada su l_1 i l_2 paralelni pravci, a l njihova priječnica, pa je $\sphericalangle EAB = \sphericalangle FCD$ (protukuti), a slično je $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CDF$. Kako je po pretpostavci $|AB| = |CD|$, slijedi prema K-S-K da je $\triangle ABE \cong \triangle CDF$. Dakle je $|AE| = |CF|$. Međutim $|AE| = |A'B'|$ i $|CF| = |C'D'|$ kao nasuprotne stranice paralelograma, pa je $|A'B'| = |C'D'|$. ■

Na osnovu dokazanog teorema možemo zadanu dužinu $\overline{AB}$ podijeliti na n jednakih dijelova, tj. na njoj konstruirati točke $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, takve da je $A \preceq P_1 \preceq P_2 \preceq \ldots \preceq P_{n-1} \preceq B$ i da je $|AP_1| = |P_1P_2| = |P_2P_3| = \ldots = |P_{n-1}B| = \frac{1}{n}|AB|$ i to na sljedeći način. Nacrtajmo dužinu $\overline{AB}$ i točkom A nacrtajmo bilo koji polupravac. Nanesimo na taj polupravac točke $P_1', P_2', \ldots, P_{n-1}', B'$ takve da je $|AP_1'| = |P_1'P_2'| = |P_2'P_3'| = \ldots = |P_{n-2}'P_{n-1}'| = |P_{n-1}'B'|$.



Sl. 76.

Spojimo B' sa B i točkama P_i' povucimo paralele s pravcem BB'. Te paralele sijeku dužinu $\overline{AB}$ u traženim točkama.

TEOREM 12. *Neka su l i l' dva pravca, a t_1, t_2, t_3 njihove zajedničke transverzale koje su međusobno paralelne i neka ih l i l' sijeku redom u točkama A, B, C i A', B', C', tako da je $A \preceq B \preceq C$ (pa stoga i $A' \preceq B' \preceq C'$). Tada je*

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|}, \quad tj. \quad \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}.$$

Dokaz. Neka je $x = \frac{|BC|}{|AB|}$, $y = \frac{|B'C'|}{|A'B'|}$. Neka su p i q bilo koji prirodni brojevi. Prvo podijelimo dužinu $\overline{AB}$ na q jednakih dijelova (usp. prethodnu konstrukciju), tj. uzmemo niz točaka $A = A_0, A_1, \ldots, A_q = B$ u tom poretku, tako da je svaka od dužina $|A_iA_{i+1}| = |AB|/q$. Nadalje, na polupravac BC s početkom B nanesimo p jednakih dužina točkama $B = B_0, B_1, \ldots, B_p$ tako da je svaka duljine $|AB|/q$. Sada paralelno projicirajmo točke A_i, B_j na l' u smjeru t_1, pa dobijemo točke A_i', B_j' na l'. Kako su sve male dužine na l jednake duljine, to je

$$\frac{|BB_p|}{|AB|} = \frac{p}{q},$$

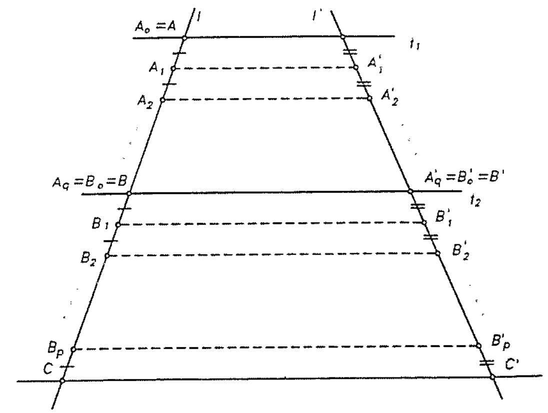
Budući da paralelna projekcija čuva jednakost dužina, slijedi da su sve male dužine na l' jednake duljine, pa je

$$\frac{|B'B_p'|}{|A'B'|} = \frac{p}{q}.$$

Sada ćemo lagano dovršiti dokaz u dva koraka. Prvo, pretpostavimo da je

$$p \cdot \frac{|AB|}{q} < |BC|.$$

Stoga je $|BB_p| < |BC|$, pa je $B \prec B_p \prec C$ (kao na sl. 77), te je zato $B' \prec B_p' \prec C'$, jer paralelna projekcija čuva "ležati između". Stoga je $|B'B_p'| < |B'C'| \Rightarrow$



Sl. 77.

$\Rightarrow p \cdot \frac{|A'B'|}{q} < |B'C'|$, pa je

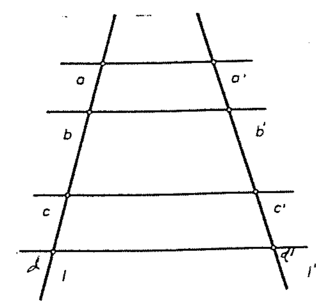
$$\frac{p}{q} < \frac{|B'C'|}{|A'B'|} = y$$

Tako smo dokazali da $p/q < x \Rightarrow p/q < y$. Analogno se dokaže da $p/q < y \Rightarrow p/q < x$. Prema Lemi 2 o uspoređivanju slijedi da je $x = y$, čime je teorem dokazan. ■

Sada ovaj teorem proširimo raznim algebarskim trikovima na opći slučaj. Promotrimo 4 točke na l i odgovarajuće točke na l'. Za duljine dužina a, b, c, a', b', c' na slici, dvostrukom primjenom ovog teorema dobivamo

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'},$$

pa je $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, pa je $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$, i $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$. Riječima možemo reći



Sl. 78.

TEOREM 13. *Ako su dvije dužine na pravcu disjunktne, onda se omjer njihovih duljina čuva paralelnim projiciranjem.* ■

TEOREM 14 (Talesov teorem o proporcionalnosti). *Paralelna projekcija čuva omjere duljina. Drugim riječima, ako su A, B, C, D točke na pravcu l, a A', B', C', D' odgovarajuće točke na l' dobivene paralelnom projekcijom, onda je*

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}, \quad tj. \quad \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|}.$$

Dokaz. Neka je $\overline{XY}$ dužina na l disjunktna sa $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, a $\overline{X'Y'}$ odgovarajuća dužina na l' dobivena paralelnim projiciranjem. Tada je prema prethodnom teoremu

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|XY|}{|X'Y'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|},$$

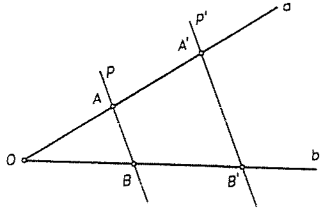
pa je

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|}, \quad \text{tj.} \quad \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}. \ ■$$

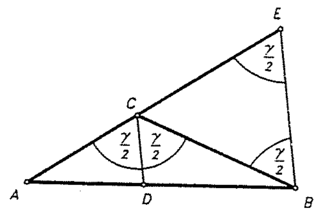
Odavde neposredno izlazi tvrdnja koja se također naziva **Talesov poučak o proporcionalnosti u pramenu pravaca.**

KOROLAR 1. *Ako se dva pravca a i b sijeku u točki O, i ako su presječeni s dva paralelna pravca $p \parallel p'$, tako da je $p \cap a = \{A\}$, $p \cap b = \{B,\}$, $p' \cap a = \{A'\}$, $p' \cap b = \{B'\}$, onda vrijedi* (v. sl. 79)

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA'|}{|OB'|}, \qquad \frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}, \qquad \frac{|OB|}{|BA|} = \frac{|OB'|}{|B'A'|}.$$



Sl. 79.



Sl. 80.

Drugi dokaz ovog korolara dat ćemo kasnije pomoću površine (v. § 3.2. Primjer 5).

TEOREM 15 (o simetrali unutarnjeg kuta trokuta). *Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli tom kutu nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih stranica.*

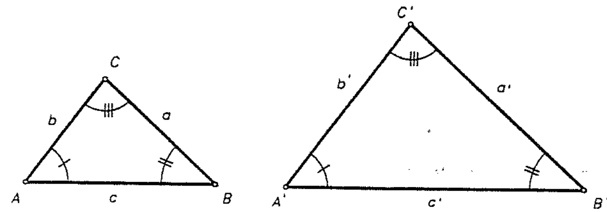
Dokaz. Neka je u $\triangle ABC$, $\overline{CD}$ simetrala kuta γ (v. sl. 80). Dokažimo da je

$$|AD| : |DB| = |AC| : |BC|. \qquad (*)$$

Produžimo dužinu $\overline{AC}$ preko vrha C i povucimo točkom B paralelu sa CD. Neka ta paralela siječe pravac AC u točki E. Prema Talesovu teoremu primjenjenom na pravce AB i AE i paralele CD i EB, slijedi $|AD| : |DB| = |AC| : |CE|$. Kako je $\sphericalangle BEC = \gamma/2 = \sphericalangle CBE$ (kutovi uz priječnicu dvaju pravaca), to je $\triangle BEC$ jednakokračan, tj. $|BC| = |CE|$, pa iz prethodne jednakosti slijedi (*). ■

Primijetite da vrijedi i obrat ovog teorema, tj. ako je D točka na stranici $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$, tako da vrijedi (*), onda je $\overline{CD}$ simetrala kuta γ.

Sada definirajmo sličnost trokuta. Dva trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ su **slični**, što zapisujemo $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ako postoji bijekcija vrhova $f : \{A, B, C\} \to \{A', B', C'\}$, tako da $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ povlači $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ i $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, tj. odgovarajući kutovi su jednaki, a odgovarajuće stranice razmjerne (v. sl. 81).



Sl. 81.

Uočite da je relacija $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu svih trokutova. Isto tako je jasno da $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

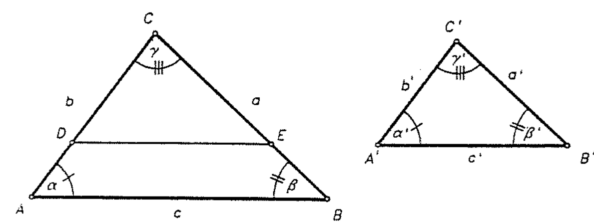
Sada ćemo dokazati teoreme o sličnosti analogne onima o sukladnosti trokuta.

TEOREM 16 (K–K–K sličnost). *Dva su trokuta slična, ako su im odgovarajući kutovi jednaki.*

Iz činjenice da je suma kutova trokuta 180° slijedi odmah

KOROLAR 2 (K–K sličnost). *Dva su trokuta slična, ako su im dva odgovarajuća kuta jednaka.*

Dokaz teorema. Neka su dani trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ i pretpostavimo da je $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Odredimo točke D i E na polupravcima CA i CB, tako



Sl. 82.

da je $|CD| = b'$, $|CE| = a'$ (v. sl. 82). Prema teoremu o sukladnosti K–S–K slijedi da je $\triangle CDE \cong \triangle A'B'C'$. Stoga je $\sphericalangle CDE = \alpha'$. Po pretpostavci je $\alpha' = \alpha$, pa je $\sphericalangle CDE = \alpha$, pa je $DE \parallel AB$. Prema Talesovom poučku o proporcionalnosti u pramenu pravaca slijedi da je

$$\frac{b'}{|AC|} = \frac{a'}{|CB|}, \quad \text{tj.} \quad \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}.$$

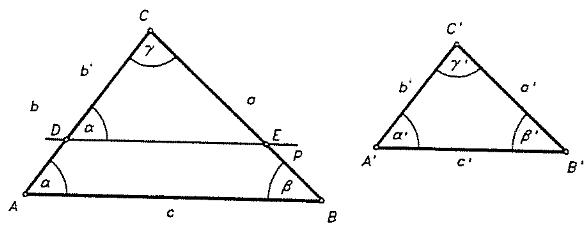
Na isti se način dobiva da je

$$\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c},$$

pa odavde $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. Stoga je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. ■

TEOREM 17 (S–S–S sličnost). *Dva su trokuta slična ako su im odgovarajuće stranice* $\boxed{\textit{razmjerne.}}$

Dokaz. Opet za trokutove $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ pretpostavimo da je $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. Neka je D točka na polupravcu CA i takva da je $|CD| = b'$. Neka je p paralela sa AB kroz točku D (v. sl. 83). Ako bi bilo $p \| BC$, onda bi $AB \| BC$, što je nemoguće. Stoga p siječe pravac BC u nekoj točki E.



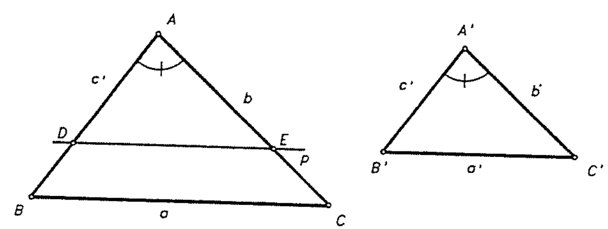
Sl. 83.

No, $\sphericalangle CDE = \alpha$ (protukuti!), pa zbog prethodnog korolara (K–K sličnost) slijedi $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ i zato je

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{|DE|} = \frac{a}{|CE|} \Rightarrow |DE| = \frac{cb'}{b}, \quad |CE| = \frac{ab'}{b}.$$

Iz naše pretpostavke slijedi odavde da je $|DE| = c'$ i $|CE| = a'$. Prema teoremu o sukladnosti S–S–S slijedi da je $\triangle DEC \cong \triangle A'B'C'$, pa konačno $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. ■

TEOREM 18 (S–K–S sličnost). *Dva trokuta su slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a kutovi među njima jednaki*



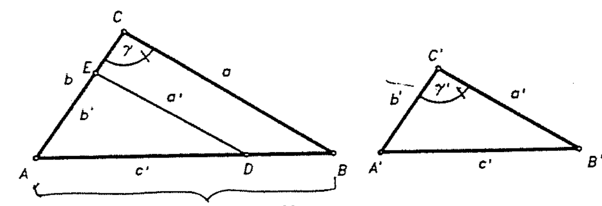
Sl. 84.

Dokaz. Neka za trokute $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ vrijedi $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ i $\alpha = \alpha'$ (v. sl. 84).

Neka je D točka na polupravcu AB za koju je $|AD| = c'$, a p pravac kroz D paralelan sa BC. Tada p siječe $\overline{AC}$ u E. Tada imamo redom (razloge navedite sami):
(1) $\triangle ADE \sim ABC$, (2) $\frac{b}{|AE|} = \frac{c}{c'}$, (3) $|AE| = b'$, (4) $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$; (5) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. ■

TEOREM 19 (S>–S–K sličnost). *Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice razmjerne, a kutovi nasuprot većim stranicama se podudaraju.*

Dokaz. Uzmimo opet trokute $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ i neka je $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$, $c > a$ i $\gamma = \gamma'$. Ako je $c = c'$ onda je prema teoremu o sukladnosti S–S–S $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

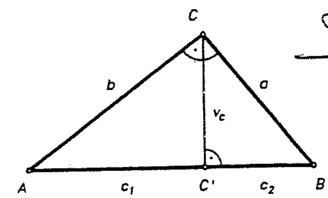


Sl. 85.

Uzmimo $c > c'$. Neka je $D \in \overline{AB}$, tako da je $|AD| = |A'B'| = c'$. Paralela kroz D sa BC siječe AC u E, pa je prema K–K sličnosti $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. Zato je $\frac{a}{c} = \frac{|ED|}{c'}$, pa zbog $\frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}$ slijedi da je $|ED| = a'$. Prema S>–S–K teoremu o sukladnosti slijedi $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$, pa to zajedno s $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ povlači $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. ■

Pitagorin poučak

PROPOZICIJA 4 (Euklid). (a) *Kateta pravokutnog trokuta je geometrijska sredina hipotenuze i svoje ortogonalne projekcije na hipotenuzu;*
(b) *Visina na hipotenuzu pravokutnog trokuta je geometrijska sredina njenih odsječaka na hipotenuzi.*



sličnost

Sl. 86.

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ pravokutan trokut s pravim kutom kod vrha C (v. sl. 86). Tada treba pokazati

a) $a = \sqrt{cc_2}$, $b = \sqrt{cc_1}$; b) $v_c = \sqrt{c_1c_2}$.

(a) Kako je $\triangle ABC \sim \triangle ACC'$ (zašto?), to je

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AC'|}{|AC|} \Rightarrow |AC|^2 = |AC'|\,|AB| \Rightarrow b = \sqrt{cc_1}.$$

Slično je $a = \sqrt{cc_2}$.
(b) Zbog $\triangle ACC' \sim \triangle BCC' \sim \triangle ABC$ (zašto?) slijedi

$$\frac{|AC'|}{|CC'|} = \frac{|CC'|}{|BC'|} \Rightarrow |CC'|^2 = |AC'|\,|BC'|, \quad \text{tj.} \quad v_c = \sqrt{c_1 c_2}. \ \blacksquare$$

Pitagorin poučak. *U pravokutnom je trokutu kvadrat hipotenuze jednak zbroju kvadrata obje katete.*

Dokaz. Prema prethodnoj Propoziciji (a) (uz iste oznake) imamo

$$a^2 + b^2 = cc_1 + cc_2 = c(c_1 + c_2) = c^2. \ \blacksquare$$

Napomenimo da se danas zna više stotina dokaza Pitagorinog poučka. Još neke dokaze Pitagorinog poučka vidi u § 3.2. Primjer 6.
Vrijedi i obrat Pitagorinog poučka. Naime,

PROPOZICIJA 5. *Ako za stranice a, b, c trokuta $\triangle ABC$ vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$, onda je $\triangle ABC$ pravokutan s pravim kutom kod vrha C.*

Dokaz. Uzmimo pravokutni trokut $\triangle A'B'C'$ s katetama $|C'B'| = a$ i $|C'A'| = b$. Tada zbog Pitagorinog poučka za taj trokut vrijedi da je

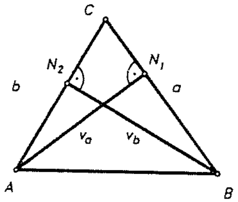
$$|A'B'|^2 = a^2 + b^2, \quad \text{tj.} \quad |A'B'| = \sqrt{a^2 + b^2} = c.$$

Zbog teorema o sukladnosti S–S–S slijedi $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, pa je kut kod C pravi kut. $\blacksquare$

Kada ćemo kod strogog zasnivanja pojma površine pokazati da je površina trokuta jednaka poluproduktu stranice i pripadne visine, onda će se ukazati potreba da se dokaže da taj rezultat ne ovisi o izboru stranice. Zato ćemo sada dokazati (bez pozivanja na površinu) sljedeću tvrdnju.

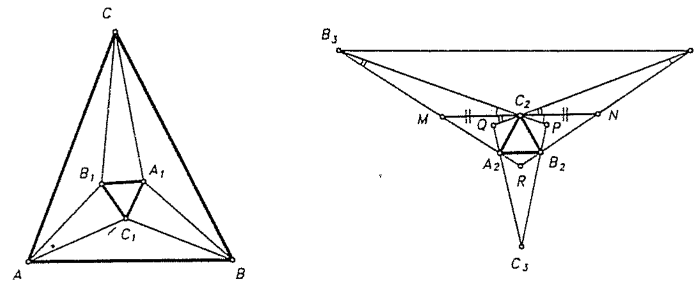
PROPOZICIJA 6. *U svakom je trokutu produkt stranice i pripadne visine neovisan o izboru stranice.*

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ bilo koji trokut, neka je on npr. šiljastokutan. Tada je (v.sl. 87) $\triangle AN_1C \sim \triangle BN_2C$ (zašto?), pa je $a : v_b = b : v_a$, tj. $av_a = bv_b$. Slično se vidi da je $bv_b = cv_c$, pa tvrdnja slijedi. Analogno se vidi u slučaju tupokutnog trokuta, dok je slučaj pravokutnog trokuta trivijalan. $\blacksquare$



Sl. 87.

Primjer 4. (**Morleyev teorem**). U trokutu $\triangle ABC$ povučene su trisektrise unutarnjih kutova (tj. zrake koje dijele kut na tri jednaka dijela). Najbliže trisektrise kutova kod vrhova B i C stranici BC sijeku se u točki A_1. Analogno se definiraju vrhovi B_1 i C_1. Dokažite da je tada $\triangle A_1B_1C_1$ jednakostraničan (v. sl. 88).



Sl. 88.

Rješenje. Neka su kutovi polaznog trokuta $\alpha = 3\alpha'$, $\beta = 3\beta'$, $\gamma = 3\gamma'$. Pođimo od jednakostraničnog trokuta $\triangle A_2B_2C_2$. Na njegovim stranicama (kao bazama) konstruirajmo prema van jednakokračne trokute A_2B_2R, B_2C_2P, C_2A_2Q s kutovima kod osnovke $60° - \gamma'$, $60° - \alpha'$, $60° - \beta'$ redom. Produžimo krakove tih trokuta preko vrhova kod baza, pa označimo $RB_2 \cap QC_2 = A_3$, $RA_2 \cap PC_2 = B_3$, $QA_2 \cap PB_2 = C_3$. Kroz C_2 povucimo paralelu s A_2B_2 i neka ona siječe RB_3 i RA_3 u točkama M i N redom (sl. 88). C_2R je visina trokuta $\triangle RMN$, a koji je sličan jednakokračnom trokutu $\triangle A_2RB_2$. Stoga je C_2 polovište dužine $\overline{MN}$. Izračunajmo kutove $\triangle C_2B_3M$ i $\triangle C_2A_3N$. Imamo $\sphericalangle B_3C_2M = \sphericalangle PC_2N = \sphericalangle B_2C_2N - \sphericalangle B_2C_2P = \alpha'$. $\sphericalangle C_2MB_3 = 180° - \sphericalangle B_2A_2R = 120° + \gamma'$, pa je $\sphericalangle C_2B_3M = 180° - \alpha' - (120° + \gamma') = \beta'$. Analogno je i $\sphericalangle A_3C_2N = \beta'$, $\sphericalangle C_2A_3N = \alpha'$. Stoga je $\triangle MC_2B_3 \sim \triangle A_3C_2N$, pa je $|B_3C_2| : |C_2A_3| = |B_3M| : |C_2N|$, a zbog $|C_2M| = |C_2N|$ slijedi $|B_3C_2| : |C_2A_3| = |B_3M| : |C_2M|$. Odavde i $\sphericalangle B_3C_2A_3 = \sphericalangle B_3MC_2$ slijedi da je $\triangle B_3C_2A_3 \sim \triangle B_3MC_2$, pa je $\sphericalangle C_2B_3A_3 = \beta'$. Analogno je $\sphericalangle A_2B_3C_3 = \beta'$, pa je $\sphericalangle A_3B_3C_3 = 3\beta' = \beta$. Stoga su B_3C_2 i B_3A_2 trisektrise kuta kod B_3 trokuta $A_3B_3C_3$.

Sasvim analogno zaključivanje za vrhove A_3 i C_3 pokazuje da su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A_3B_3C_3$ slični. No presjeci trisektrisa trokuta $A_3B_3C_3$ čine jednakostranični trokut $\triangle A_2B_2C_2$. Sada nije teško pokazati pomoću ostalih trokuta da je $\triangle A_1B_1C_1 \sim A_2B_2C_2$ (učinite to). Stoga i trisektrise polaznog trokuta ABC čine vrhove jednakostraničnog trokuta. $\blacksquare$

PONEDJEGAK

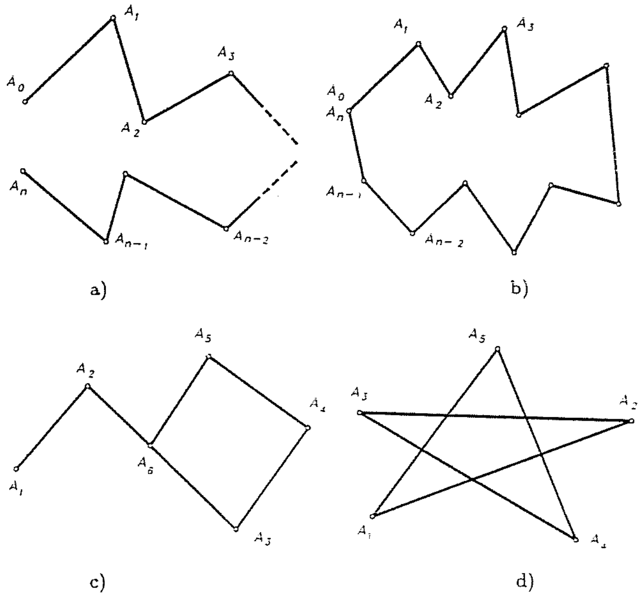
§ 3. Poligoni i površine

3.1. Poligoni

U ovoj točki ćemo precizirati pojam poligona u ravnini i na skupu svih poligona definirati površinu kao funkciju koja svakom poligonu pridružuje njegovu "mjeru površine".

U školi se često kratko kaže "Poligon je dio ravnine omeđen zatvorenom izlomljenom linijom" ili nešto tome slično. Iako intuitivno prihvatljiva, ova definicija zahtijeva određenu elaboraciju i preciziranje.

Izlomljena linija je unija od konačno mnogo različitih dužina $\overline{A_0A_1}, \overline{A_1A_2}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$ u ravnini, zadanih u određenom poretku, tako da se jedan kraj svake dužine (osim zadnje) podudara s jednim krajem naredne dužine. Dužine koje čine izlomljenu liniju zovu se njene **stranice**, njihovi krajevi su njeni **vrhovi**, a obzirom na dani poredak dužina i vrhova, prvi vrh prve dužine (A_0) je **početak**, a drugi vrh zadnje dužine **kraj** (A_n) **izlomljene linije** (v.sl. 89a).

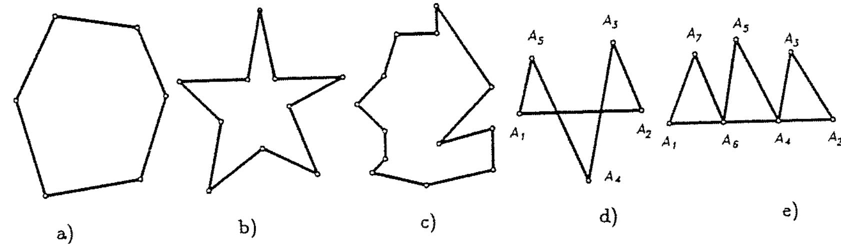


Sl. 89.

Izlomljena linija koja se sastoji od dužina $\overline{A_0A_1}, \overline{A_1A_2}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$ zapisuje se samo pomoću vrhova $A_0A_1A_2\ldots A_n$. Izlomljena linija $A_0A_1A_2\ldots A_n$ je **zatvorena** ako joj se početak i kraj podudaraju (sl. 89b).

Izlomljena linija je **jednostavna**, ako svaka njena točka leži ili na samo jednoj njenoj stranici ili samo na dvjema kojih je ta točka jedan kraj. Inače se izlomljena linija zove **samopresječna**. Na sl. 89a) i b) su jednostavne, a na sl. 89c) i d) su samopresječne izlomljene linije.

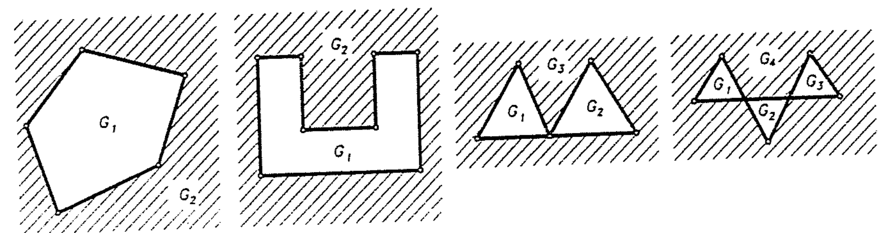
Zatvorena izlomljena linija se još zove i **jednodimenzionalni poligon** ili kratko naprosto **poligon**[12]. Ako je ta linija k tome i jednostavna, onda se i jednodimenzionalni poligon zove **jednostavan** ili **poligonalna kružnica**, a inače **nejednostavan** ili **zvjezdast**. Na sl. 90a),b),c) su jednostavni jednodimenzionalni poligoni ili poligonalne kružnice, a na 90d),e) zvjezdasti.



Sl. 90.

Jednodimenzionalni poligon J očito rastavlja ravninu M na nekoliko područja. Točnije, $M \setminus J$ se sastoji od konačno mnogo područja ravnine.

Područje ravnine M je otvoren i povezan podskup G ravnine, što znači da za svaku točku $A \in G$ postoji krug s centrom u A koji je sadržan u G i svake dvije točke se mogu spojiti s izlomljenom linijom koja je sadržana u G. Tako npr. na sl. 91 su područja na koja jednodimenzionalni poligoni rastavljaju ravninu.



Sl. 91.

No jednostavni poligoni imaju važno svojstvo, koje je intuitivno vrlo prihvatljivo, ali nije lagano dokazati. Vrijedi naime sljedeće.

TEOREM 1 (Jordan[13]). *Svaka poligonalna kružnica J u ravnini M rastavlja ravninu na točno dva područja koja zovemo* **unutrašnjost** *i* **vanjština** *poligona J.*

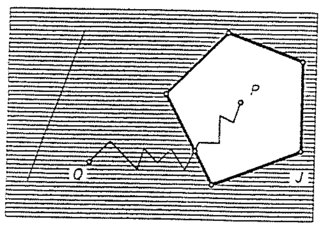
[12] U geometriji se često pod pojmom "poligon" ("mnogokut" ili "višekut") podrazumijevaju dvije različite stvari. Prvo kao neka zatvorena izlomljena linija i drugo kao neka zatvoreno područje ravnine. Zato ćemo mi u početku razlikovati jednodimenzionalni i "dvodimenzionalni poligon". Kasnije ćemo izostavljati podrobniji opis, a iz konteksta će biti jasno na što se misli.

[13] Camile Jordan (1838–1922), francuski matematičar.

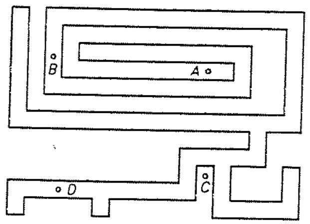
Dokaz ćemo provesti malo kasnije, a sada prvo malo komentirajmo teorem i s njim u vezi dovršimo osnovne definicije o poligonima.

Smisao teorema je ovaj. Uzmimo dvije točke $P, Q \in M \setminus J$. Ako P i Q možemo spojiti izlomljenom linijom koja ne siječe J onda su P i Q u istom području, a ako svaka izlomljena linija između P i Q siječe J, onda su oni u **različitim** područjima.

Primijetimo da će sve "daleke" točke ravnine biti u istom području obzirom na jednostavni poligon J. To područje je neomeđeno i sadrži pravce (v.sl. 92) i to je vanjština od J, dok ono drugo unutrašnje područje ne sadrži u sebi niti jedan pravac i to je područje omeđeno. Poligon J je njihov zajednički rub. Za točke iz unutrašnjosti kažemo da su **unutrašnje točke poligona** J ili u **unutrašnjosti**, a one izvan J i unutrašnjosti da su **vanjske točke** ili iz **vanjštine**.



Sl. 92.

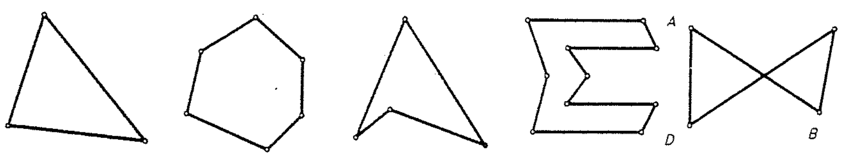


Sl. 93.

Prividna "očitost" Jordanovog teorema leži u tome da mi obično imamo u vidu sasvim "jednostavne figure" kao trokut ili npr. neki (konveksni) šesterokut itd. Međutim, za jednostavni poligon J (labirint) kao na sl. 93 nije sasvim "očito" da rastavlja ravninu na dva područja. Isto tako nije sasvim evidentno gdje leže točke A, B, C, D: u unutrašnjosti ili vanjštini od J? Iz dokaza Jordanovog teorema kao "nusprodukt" dobivamo ovaj kriterij:

Ako iz točke $P \in M$ povučemo bilo koji polupravac (zraku) koja siječe J samo u točkama koje nisu krajevi stranica, pa ako je broj presječnih točka te zrake sa J neparan, onda je P unutrašnja točka, a ako je paran onda je P vanjska.

Jednostavni dvodimenzionalni poligon je unija jednostavnog jednodimenzionalnog poligona i njegove unutrašnjosti. Jednostavni jednodimenzionalni poligon se tada zove **rub** ili **obod** (**kontura**) danog dvodimenzionalnog poligona. Npr. na sl. 94a),b),c),d) su jednostavni dvodimenzionalni poligoni, dok na sl. 94e) to nije u smislu naše definicije.



Sl. 94

Ako drugačije ne kažemo, u daljem ćemo termin "**poligon**" koristiti u smislu "jednostavni dvodimenzionalni poligon". Ako on ima n vrhova, zvat ćemo ga **n-terokut**.

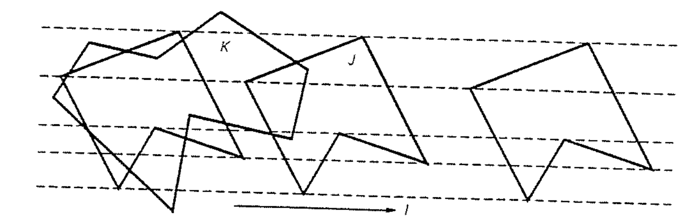
Kao što smo rekli, dokaz Jordanovog teorema nije lagan. Mi ćemo ga provesti malo neformalno, ali se dokaz može "ispeglati" uz malo više pisanja tako da i formalno bude "čist". Inače Jordanov teorem vrijedi i općenitije za jednostavne zatvorene krivulje (tj. za topološke kružnice – to je skup u ravnini homeomorfan kružnici), a dokaz u ovom općem slučaju se provodi "aproksimacijom" poligonalnom kružnicom.

Dokaz Jordanovog teorema. Prvo nam trebaju neki pojmovi. Neka su a i b dvije dužine u ravnini, takve da ni jedna ne sadrži krajeve one druge. Ako se te dužine sijeku stavimo da je $p(a,b) = 1$, a ako se ne sijeku $p(a,b) = 0$. Broj $p(a,b)$ se zove **presječni broj** dužina a i b. Neka su sada $J = a_1a_2\ldots a_m$ i $K = b_1b_2\ldots b_n$ dvije izlomljene linije tako da ni jedna ne sadrži vrhove druge, pri čemu su $a_1, a_2, \ldots,$ i $b_1, b_2, \ldots$ dužine koje čine J i K. Promotrimo sumu $\sum_{i,j} p(a_i, b_j)$ svih presječnih brojeva svakog a_i sa svakim b_j. Ako je ta suma parna, stavimo $p(J,K) = 0$, a ako je neparna stavimo $p(J,K) = 1$. Broj $p(J,K)$ se zove **presječni broj** izlomljenih linija J i K (točnije, presječni broj po modulu 2). Izlomljena linija kojoj se u svakom vrhu sastaje paran broj stranica zove se **ciklus** (po modulu 2).

LEMA 1. *Presječni broj dvaju ciklusa u ravnini jednak je nula.*

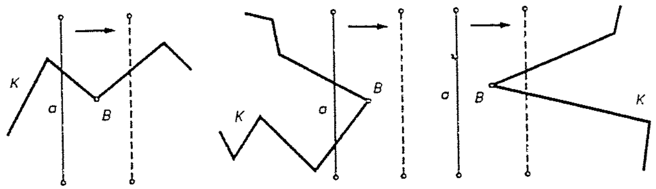
Dokaz leme. Svaki vrh ciklusa je kraj bar dviju stranica, pa se lako vidi da taj ciklus sadrži poligonalnu kružnicu. Ako izbacimo tu poligonalnu kružnicu iz ciklusa, ono što preostaje je opet ciklus (u svakom vrhu se opet sastaje paran broj stranica). U preostalom ciklusu opet postoji poligonalna kružnica, pa ju izbacimo itd. Dakle, svaki ciklus je unija od konačno mnogo poligonalnih kružnica, pri čemu nikoje dvije nemaju zajedničkih stranica. Prema tome, dovoljno je Lemu dokazati za dvije poligonalne kružnice J i K. Očito je da malim pomakom vrhova ciklusa J i K (tako da se ne promijeni njihov presječni broj), možemo postići to da nikoje dvije stranice ciklusa J i K ne budu međusobno paralelne. Sada odaberimo pravac l koji nije paralelan niti jednoj spojnici vrha iz J s vrhom iz K.

Translatirajmo sada neprekidno ciklus J (kao čvrsto tijelo) paralelno pravcu l (sl. 95).



Sl. 95.

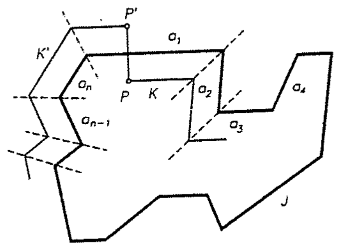
Presječni broj $p(J,K)$ se počinje mijenjati tek onog momenta kada vrhovi jednoga iz ciklusa J i K padnu na stranicu drugoga (vrhovi od J ne mogu pasti na vrhove od K zbog izbora pravca l). No u momentu kada neka stranica a ciklusa J prođe kroz vrh B ciklusa K, broj točaka presjeka ne mijenja svoju parnost (sl. 96).



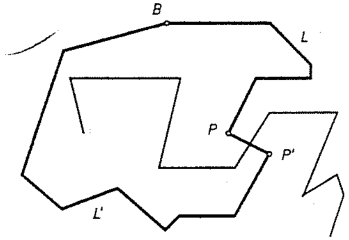
Sl. 96.

Isto se događa pri prolazu vrhova ciklusa J kroz stranice ciklusa K. Stoga se presječni broj $p(J,K)$ ne mijenja "prolazom" J kroz K. Međutim, kada je J "daleko" od K, tj. kada je s njime disjunktan, presječni broj je očito nula. Zbog toga je i na početku bio nula, tj. $p(J,K) = 0$. Time je lema dokazana.

Sada dokažimo Jordanov teorem. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ redom stranice poligonalne kružnice J. Uzmimo dvije točke P i P' simetrične obzirom na stranicu a_1. Točkom P povucimo paralelu sa a_1 do točke presjeka sa simetralom kuta između a_1 i a_2 (kao na sl. 97) (tako da su a_1, a_2 s raznih strana simetrale).



Sl. 97.



Sl. 98.

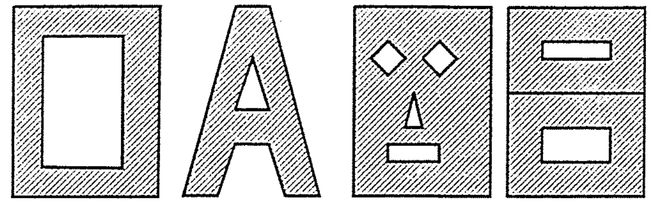
Iz te točke vučemo paralelu sa a_2 do presjeka sa simetralom kuta između a_2 i a_3 itd. Tako dobijemo izlomljenu liniju K čije su stranice paralelne stranicama od J i na istoj udaljenosti od stranica linije J. Ako je udaljenost $|PP'|$ dovoljno mala, onda izlomljena linija K ne siječe J i obilazeći je vraća se natrag ili u P ili u P'. Pokažimo da K ne može doći u točku P'. Kad bi ona spajala P i P', onda bi dodavanjem dužine $\overline{PP'}$ liniji K dobili ciklus koji bi s J imao jedno jedino presjecište, tj. presječni broj $p(J,K) = 1$, što je prema Lemi nemoguće. Stoga je K zatvorena izlomljena linija koja jednom obiđe poligonalnu kružnicu J. Analogno se dobiva izlomljena linija K' koja polazi iz P', jednom obiđe J i vrati se u P'.

Neka je sada B točka iz $M \setminus J$. Tada tvrdimo da ju možemo spojiti ili s točkom P ili s točkom P' jednom izlomljenom linijom koja ne siječe J. Naime, iz B povucimo zraku koja siječe K i K', pa iz točke B dođemo tom zrakom do prvog od presjeka te zrake s K ili K', a onda po toj dotičnoj poligonalnoj crti dođemo do P ili P'.

Ako iz točke B idu dvije različite izlomljene linije L i L' koje ne sijeku J, a završavaju u P ili P', onda one obje završavaju u istoj točki. Zaista, kad bi završavale u različitim točkama (v. sl. 98) onda bi linija $L \cup L' \cup \overline{PP'}$ bila ciklus koji sa J ima presječni broj 1, što je opet nemoguće prema lemi.

Neka je U skup svih točaka iz $M \setminus J$ koje možemo spojiti s točkom P, a da ne presiječemo J, a V skup svih onih točaka iz $M \setminus J$ koje možemo spojiti s P' da ne presiječemo J.

Tvrdimo da su U i V tražena područja iz Teorema. Uzmimo, naime, dvije točke B_1 i B_2 iz npr. U. Tada postoje izlomljene linije L_1 i L_2 koje ne sijeku J, a spajaju B_1 i B_2 s točkom P. $L_1 \cup L_2$ je linija koja spaja B_1 i B_2, a ne siječe J. Dakle, dvije točke iz U mogu se spojiti, jer bi inače kao i gore dobili ciklus koji sa J ima presječni broj 1, što je nemoguće. Konačno, $U \neq V$ jer $P \in U \setminus V$, $P' \in V \setminus U$. ■



Sl. 99.

Uočite da se prema našoj definiciji poligona, njegov rub (tj. pripadni jednodimenzionalni poligon) mora sastojati "iz jednog komada", tj. mora biti povezan, pa stoga zatvoreno omeđeno područje ravnine čiji se rub sastoji od dvije disjunktne poligonalne kružnice nije poligon (v. sl. 99), ali se takav poligon može razrezati na nekoliko poligona, tj. možemo ga napisati kao uniju poligona bez zajedničkih unutarnjih točaka.

Poligon je **konveksan** ako se čitav nalazi u jednoj poluravnini obzirom na svaku njegovu stranicu (tj. pravac određen stranicom).

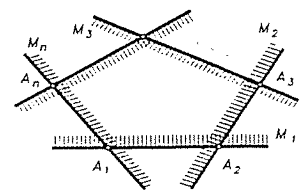
Podsjetimo nadalje da je skup $S \subseteq M$ **konveksan skup** ako vrijedi

$$A, B \in S \;\Rightarrow\; \overline{AB} \subseteq S.$$

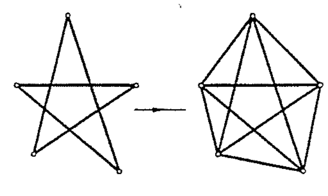
Sada pokažimo da vrijedi

PROPOZICIJA 1. *Konveksni poligon u ravnini je konveksan skup.*

Dokaz. Neka je M_i poluravnina u kojoj se nalazi poligon $P = A_1A_2\ldots A_n$ određena stranicom $\overline{A_iA_{i+1}}$ $(A_{n+1} = A_1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. M_i je konveksan skup, a konveksni poligon P je očito jednak presjeku $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$ (v. sl. 100). Kako je presjek konveksnih skupova opet konveksan skup (dokažite to sami), tvrdnja neposredno slijedi. ■



Sl. 100.



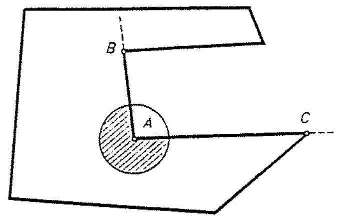
Sl. 101.

Stoga je konveksna ljuska bilo kojeg poligona jednostavni konveksni poligon (sl. 101).

U školi se obično uči samo o konveksnim poligonima, pa se tako npr. dokazuje da je suma (unutarnjih) kutova konveksnog n-terokuta jednaka $(n-2)\pi$ (tj. $n-2$ puta ispružen kut). Mi ćemo dokazati da je to točno i za svaki jednostavni poligon ne nužno konveksan, ali prije toga treba precizirati što se misli pod (unutarnjim) kutom poligona.

Za konveksne poligone obično imamo u vidu tri svojstva:
1) vrh kuta je vrh poligona, **2)** krakovi kuta sadrže stranice poligona kod tog vrha i **3)** kut sadrži čitav poligon.

Za nekonveksne poligone svojstvo 3) neće biti ispunjeno (sl. 102). Zato kut jednostavnog poligona kod vrha A treba ovako definirati: Konstruiramo mali krug s centrom A. Zrake AB i AC dijele taj krug na dva isječka koji odgovaraju dvama kutovima kod A. Ako je radijus kruga dovoljno mali (npr. manji od udaljenosti A do svih ostalih vrhova i svih ostalih stranica), onda će jedan od tih isječaka biti sadržan unutar, a drugi u vanjštini poligona.

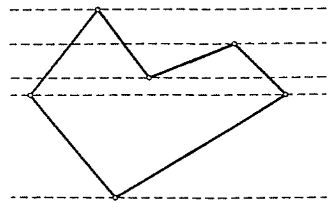


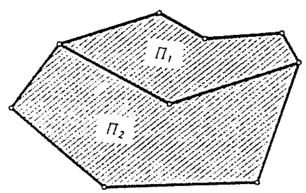
Sl. 102.

Kut poligona BAC kod vrha A je onaj od dva kuta kojeg čine stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, čiji presjek s dovoljno malim krugom oko A leži u unutrašnjosti poligona.

LEMA 2. *Svaki jednostavni poligon ima bar jedan (unutarnji) kut manji od π, tj. od ispruženog kuta.*

Dokaz. Svakim vrhom povucimo pravac u nekom čvrstom smjeru koji nije paralelan niti jednoj stranici poligona. Recimo da je to horizontalni smjer. Neka je A "najviši" vrh (ako ih je više uzmimo bilo koji) (sl. 103). Čitav poligon očito leži u poluravnini određenoj s horizontalom kroz A, pa je i unutarnji kut kod A manji od ispruženog kuta. ■


Sl. 103.



Sl. 104.

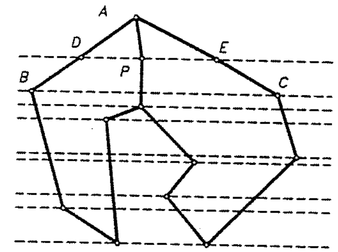
Kažemo da je poligon Π **zbroj poligona** Π_1 i Π_2 i pišemo $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$, ako je $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$ i ako poligoni Π_1 i Π_2 nemaju zajedničkih unutarnjih točaka (što

pišemo kao $\operatorname{int}\Pi_1 \cap \operatorname{int}\Pi_2 = \emptyset$) (sl. 104). Važno svojstvo jednostavnih poligona je sljedeća propozicija.

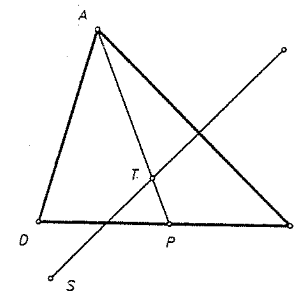
PROPOZICIJA 2 (o zbroju poligona). *U svakom jednostavnom poligonu postoji dijagonala koja ga dijeli na dva jednostavna poligona. Drugim riječima, svaki je jednostavni poligon Π zbroj dva jednostavna poligona kojima je jedna dijagonala od Π zajednička stranica.*

Dokaz. Prema Lemi 2 postoji kut $\sphericalangle BAC$ poligona manji od ispruženog. Ako unutar i na stranicama $\triangle BAC$ nema drugih vrhova poligona (osim A, B, C), onda je $\overline{BC}$ tražena dijagonala.

U protivnome povucimo kroz sve vrhove koji su unutar $\triangle BAC$ (osim kroz A) paralelu s BC (neka su to horizontale).



Sl. 105.



Sl. 106.

Među tim vrhovima odaberimo onaj vrh P koji je na "najvišoj" horizontali DE (v. sl. 105). Tvrdimo da je $\overline{AP}$ tada tražena dijagonala.

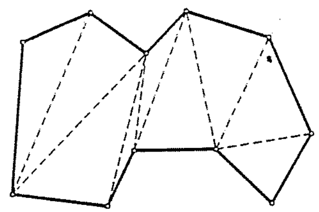
Dokažimo prvo da se $\overline{AP}$ ne siječe s rubom poligona u svojoj unutarnjoj točki. Pretpostavimo da je $T \in \overline{AP}$ unutarnja točka od $\overline{AP}$ i da je na rubu poligona (sl. 106). Tada T nije vrh poligona, pa je zato unutarnja točka neke stranice npr. $\overline{RS}$. No tada bi bar jedna od točaka R, S, npr. R ležala na "višoj" horizontali nego DE, pa bi bila izvan trokuta ADE. Zato bi dužina $\overline{RS}$ (pa dakle i stranica $\overline{RS}$ poligona) sjekla jednu od stranica $\overline{AD}$ ili $\overline{AE}$ trokuta $\triangle ADE$ (Paschov aksiom!), što je nemoguće, jer je naš poligon jednostavan.

Nadalje, iz definicije kuta poligona slijedi da je dio dijagonale $\overline{AP}$ koji leži u maloj okolini od A, dio unutrašnjosti poligona. No tada je i čitava dijagonala $\overline{AP}$ u unutrašnjosti zbog upravo dokazanog da ne siječe rub i zbog Jordanovog teorema.

Dakle, $\overline{AP}$ je tražena dijagonala jer ona rastavlja dani jednostavni poligon na dva jednostavna poligona (s manjim brojem stranica). ■

KOROLAR 1. *Svaki se jednostavni poligon Π može prikazati kao suma od konačno mnogo trokuta, čije su sve stranice stranice i dijagonale od Π.*

Dokaz ovog korolara slijedi neposredno višestrukom primjenom propozicije. ■



Sl. 107.

Kaže se još da se svaki jednostavni poligon može **triangulirati** bez uvođenja novih vrhova (sl. 107).

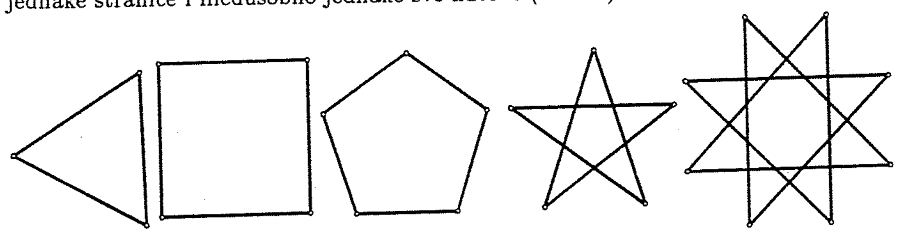
TEOREM 2 (**o sumi kutova poligona**). *Suma kutova jednostavnog n-terokuta jednaka je* $(n-2)\pi$.

Dokaz. Indukcijom po n. Za $n = 3$ tvrdnja je točna (trokut). Neka je tvrdnja točna za sve brojeve $\leq n-1$, pa je dokažimo za n. U tu svrhu, prema propoziciji o zbroju poligona postoji dijagonala koja rastavlja jednostavni n-terokut na dva jednostavna poligona, recimo n_1-terokut i n_2-terokut, $n_1, n_2 < n$ i $n_1 + n_2 = n + 2$. Prema induktivnoj pretpostavci, sume njihovih kutova su redom $(n_1-2)\pi$ i $(n_2-2)\pi$. Suma kutova našeg poligona je tada

$$(n_1-2)\pi + (n_2-2)\pi = (n_1+n_2-4)\pi = (n-2)\pi,$$

što smo i tvrdili. ■

Važna vrsta poligona su **pravilni poligoni**, tj. takvi koji imaju međusobno jednake stranice i međusobno jednake sve kutove (sl. 108).



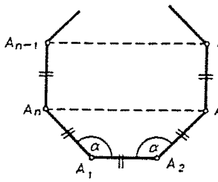
Sl. 108.

PROPOZICIJA 3. *Jednostavni pravilni poligon je konveksan.*

Dokaz. Neka je $A_1A_2\ldots A_n$ pravilni n-terokut. Promotrimo njegovu stranicu A_1A_2 i pokažimo da su svi ostali vrhovi s jedne strane tog pravca. Odavde, zbog jednostavnosti poligona, zbog Jordanovog teorema i prethodne propozicije slijedit će tvrdnja.

Najprije je svaki kut poligona jednak $\alpha = \frac{(n-2)\pi}{n}$. Za $n \geq 4$, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$. Promotrimo pravce A_nA_3, $A_{n-1}A_4$ itd. Lako se vidi da su A_n i A_3 s iste strane pravca A_1A_2 i $A_nA_3 \parallel A_1A_2$. Isto tako se lako vidi da je $\sphericalangle A_1A_nA_{n-1} > \sphericalangle A_1A_nA_3$ (i $\sphericalangle A_2A_3A_4 > \sphericalangle A_2A_3A_n$), što znači da su točke A_{n-1} i A_4 s iste strane pravca A_1A_2 u kojoj su A_n i A_3 ("iznad" pravca A_1A_2). Analogno se dokazuje i za ostale vrhove poligona. Detalje prepuštamo čitatelju.

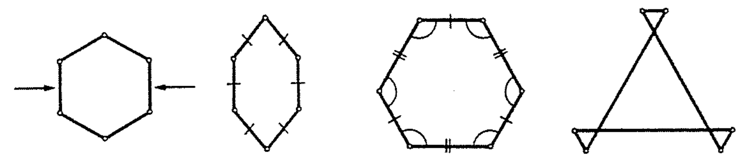
■



Sl. 109.

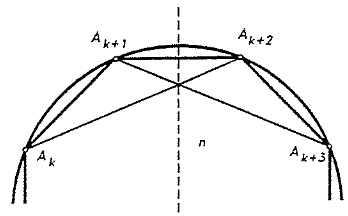
Dakle nema jednostavnih nekonveksnih pravilnih poligona. No postoje zvjezdasti (tj. nejednostavni) jednodimenzionalni pravilni poligoni (sl. 108d),e).

Nadalje, samo za trokut iz jednakosti stranica slijedi jednakost kutova i obratno. Za svaki $n \geq 4$ postoji n-terokut kojemu su sve stranice međusobno jednake, a kutovi različiti i postoji n-terokut kojemu su svi kutovi jednaki, a među stranicama ima nejednakih (jednakokutni poligon). Npr. na sl. 110a) se vidi kako se iz pravilnog n-terokuta može dobiti jednakostraničan, a na sl. b) kako se iz pravilnog n-terokuta može dobiti jednakokutni nepravilni poligon.

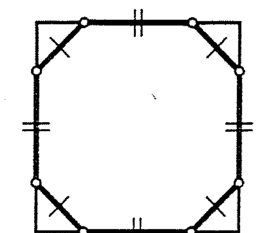


Sl. 110.

Sada ćemo se još malo zadržati na tzv. polupravilnim poligonima. Nepravilni poligon s parnim brojem stranica se zove **jednakokutni polupravilni** ako ima jednake kutove, a stranice samo dvije veličine i to naizmjence. Npr. pravokutnik je najmanji takav, a drugi primjeri na sl. 110c), d) (jednostavan i zvjezdasti).



Sl. 111.

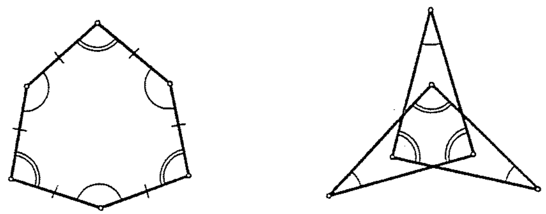


Sl. 112.

PROPOZICIJA 4. *Jednakokutnim polupravilnim poligonima se može opisati kružnica, tj. postoji kružnica koja ide svim vrhovima.*

Dokaz. Dokažimo tvrdnju samo za takve konveksne poligone $A_1A_2 \ldots A_n$. Dovoljno je dokazati da se centar O kružnice kroz tri vrha A_k, A_{k+1}, A_{k+2} podudara s centrom O' kružnice kroz točke A_{k+1}, A_{k+2}, A_{k+3} (sl. 112). Kako je $\triangle A_kA_{k+1}A_{k+2} \cong \triangle A_{k+3}A_{k+2}A_{k+1}$ (S–K–S), slijedi odmah da su i radijusi opisanih kružnica tim trokutima jednaki. Centri O i O' stoga leže na simetrali dužine $\overline{A_{k+1}A_{k+2}}$ na jednakoj udaljenosti od te dužine (jer su radijusi jednaki) i s iste strane pravca $A_{k+1}A_{k+2}$ (zbog konveksnosti poligona). Stoga se O i O' podudaraju, čime je dokaz gotov. ■

Jedna konstrukcija jednakokutnih polupravilnih poligona ("metoda odsijecanja") je ova. Pođemo od pravilnog n-terokuta i kod svakog vrha odsijecimo sukladne jednakokračne trokutove (s krakovima manjim od polovice stranice n-terokuta). Tako dobijemo jedan jednakokutni polupravilni $2n$-terokut (v. sl. 112).



Sl. 113.

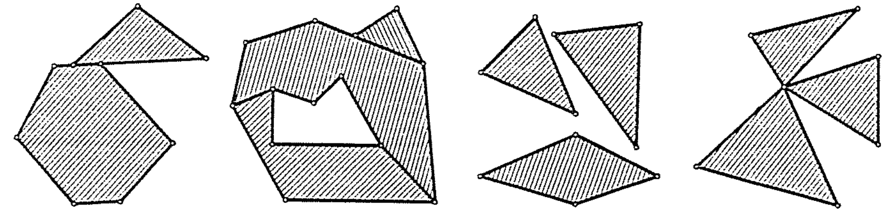
Nepravilni poligon s parnim brojem stranica se zove **jednakostranični polupravilni**, ako su mu sve stranice međusobno jednake, a samo dvije veličine kutova i to naizmjence. Najjednostavniji takav poligon je romb, a neki drugi primjeri na sl. 113. Slično gornjoj propoziciji vrijedi

PROPOZICIJA 5. *U svaki jednakostranični polupravilni poligon može se upisati kružnica, tj. postoji kružnica kojoj su sve stranice poligona tangente.*

Naravno, u pravilni poligon može se upisati i oko njega opisati kružnica i to su koncentrične kružnice.

3.2. Površina poligona

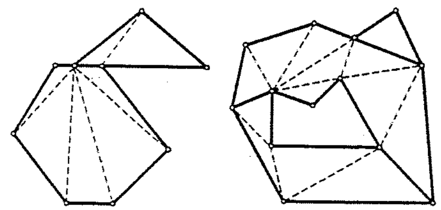
U ovom ćemo odjeljku strogo zasnovati pojam površine (ploštine) poligona. Ovdje ćemo malo proširiti pojam poligona. Smatrat ćemo, naime, da je **poligon** zbroj od konačno mnogo jednostavnih poligona, tj. poligon je unija od konačno mnogo jednostavnih poligona, od kojih nikoja dva nemaju zajedničkih unutrašnjih točaka. Očito je da je svaki jednostavni poligon zaista poligon u ovom smislu, dok obrnuto ne mora vrijediti. Npr. kao što pokazuju primjeri na sl. 114).



a) b) c) d)

Sl. 114.

Podsjetimo, **triangulacija** poligona je svaki prikaz tog poligona kao unija od konačno trokutova koji nemaju zajedničkih unutarnjih točaka, već se dva trokuta ili ne sijeku ili imaju zajednički vrh ili cijelu zajedničku stranicu. Prema propoziciji o sumi poligona, svaki se poligon (u gornjem smislu) može triangulirati. Npr. na primjerima sa sl. 114a) i b) imamo triangulacije kao na sl. 115.



Sl. 115.

Napomenimo da su gornje triangulacije bez uvođenja novih vrhova, ali se mogu promatrati i druge triangulacije.

● Neka je $\mathcal{P}$ skup svih poligona u ravnini (uključujući $\emptyset$). **Površina** (ili **ploština**) p na skupu $\mathcal{P}$ je funkcija $p : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ s ovim svojstvima (aksiomima)

(P1) $p(\Pi) \geq 0, \ \forall \Pi \in \mathcal{P}$,

(P2) $p(\Pi_1 + \Pi_2) = p(\Pi_1) + p(\Pi_2), \ \forall \Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{P}$,

(P3) Ako je $\Pi_1 \cong \Pi_2$, onda je $p(\Pi_1) = p(\Pi_2)$,

(P4) Postoji bar jedan kvadrat K sa stranicom 1 takav da je $p(K) = 1$.

(P1) se zove **aksiom pozitivnosti**, (P2) **aditivnosti**, (P3) **invarijantnosti** obzirom na sukladnost (tj. izometrije), a (P4) **normiranosti**. Broj $p(\Pi)$ zovemo **površina poligona** Π.

Iz svojstva (P3) i (P4) slijedi da je površina svakog kvadrata stranice 1 jednaka 1. Nadalje, iz (P1) i (P2) slijedi da je funkcija p monotono rastuća funkcija, tj. $\Pi \subseteq \Pi' \Rightarrow p(\Pi) \leq p(\Pi')$. Zaista, ako je $\Pi \subseteq \Pi'$, onda postoje poligoni $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_r$

postoji jedinstvena funkcija p t.

takvi da je $\Pi' = \Pi + \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_r$, pa je

$$p(\Pi') = p(\Pi) + \sum_{i=1}^{r} p(\Pi_i) \geq p(\Pi).$$

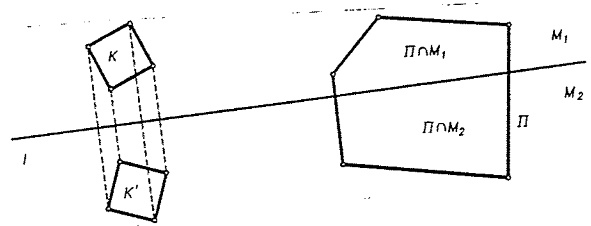
Nadalje, zbog $\Pi = \Pi + \emptyset$ i $p(\Pi) = p(\Pi+\emptyset) = p(\Pi)+p(\emptyset)$ slijedi da je $p(\emptyset) = 0$.

Kažimo sada nekoliko riječi o nezavisnosti aksioma. Sistem aksioma (P1) - (P4) je **nezavisan**, tj. ni jedan od aksioma nije posljedica ostalih.

Nezavisnost aksioma (P2). To ćemo dokazati tako da ćemo konstruirati funkciju $p : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ koja zadovoljava aksiome (P1), (P3) i (P4), a ne zadovoljava (P2). Primjer takve funkcije je $p(\Pi) = 1$, $\forall \Pi \in \mathcal{P}$. Ima i drugih primjera takvih funkcija. Ako je p funkcija koja zadovoljava sve aksiome (P1) - (P4), onda funkcije $p' = p^2$, $p'' = e^{p-1}$ zadovoljavaju sve aksiome osim (P2).

Nezavisnost aksioma (P3). Uzmimo u ravnini M kvadrat K sa stranicom 1. Neka je $p : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ funkcija koja zadovoljava sve aksiome (P1) - (P4). Neka je l pravac ravnine koji ne siječe K. Neka je M_1 ona poluravnina obzirom na l u kojoj leži K, a M_2 druga poluravnina. Definirajmo funkciju $p' : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ sa (v. sl. 116)

$$p'(\Pi) = p(\Pi \cap M_1) + 2p(\Pi \cap M_2).$$



Sl. 116.

Očito je da p' zadovoljava aksiome (P1), (P2) i (P4), a ne zadovoljava (P3). Naime, zrcalna slika K' od K ima površinu $p'(K') = 2$, a kako su K i K' sukladni, to aksiom (P3) nije zadovoljen.

Jedan drugi primjer funkcije koja zadovoljava (P1), (P2) i (P4), a ne zadovoljava (P3) je ova

$$p''(\Pi) = p(\Pi \setminus H) + \lambda p(\Pi \cap H), \quad \lambda > 1,$$

gdje je $H \in \mathcal{P}$ neki čvrst poligon takav da je $p(H) > 0$ i $K \cap H = \emptyset$.

Nezavisnost aksioma (P4). Funkcija $p : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$, $p(\Pi) = 0$ zadovoljava (P1), (P2), (P3), a ne zadovoljava (P4).

Nezavisnost aksioma (P1). To je najteži slučaj. Konstruirat ćemo funkciju $p' : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ koja zadovoljava sve aksiome osim (P1). Važnu ulogu u toj konstrukciji igrat će funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, koje su **aditivne**, tj. $f(x+y) = f(x)+f(y)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

Neka je $p : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ funkcija koja zadovoljava sve aksiome (P1) - (P4). Tada je $p' = f \circ p : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ funkcija koja zadovoljava (P2) (uradite to). Očito p' zadovoljava i aksiom (P3). Da bi p' zadovoljavala i (P4) nužno je da vrijedi $f(1) = 1$.

Prema tome da nađemo traženu funkciju p', moramo konstruirati aditivnu funkciju $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takvu da je $f(1) = 1$ i $f(x) < 0$ za neko $x > 0$.

Egzistencija funkcije f. Najprije uočimo da je funkcija $f(x) = \lambda x$ aditivna, ali zbog zahtjeva $f(1) = 1$ slijedi $f(x) = x$, no ta funkcija nema svojstvo $f(x) < 0$ za neki $x > 0$, pa dakle f ne može biti linearna. Zbog aditivnosti f će imati svojstvo

$$f(rx) = rf(x), \quad \forall r \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R} \tag{$*$}$$

Pokažimo prvo da $(*)$ vrijedi i za $r \in \mathbf{Z}$. U tu svrhu, neka su $m, n \in \mathbf{N}$ i izračunajmo $f((m-n)x)$. Imamo redom $mf(x) = f(mx) = f((m-n)x + nx) = f(m-n)x + f(nx) = f((m-n)x) + nf(x)$, pa slijedi $f((m-n)x) = (m-n)f(x)$. Dakle, $(*)$ vrijedi i za $r \in \mathbf{Z}$.

Pokažimo sada da $(*)$ vrijedi i za $r \in \mathbf{Q}$. Neka je $r = p/q$, $p, q \in \mathbf{Z}$ $(q \neq 0)$. Tada imamo redom

$$pf(x) = f(px) = f\left(q \cdot \left(\frac{p}{q}x\right)\right) = qf\left(\frac{p}{q}x\right),$$

pa $(*)$ vrijedi i za $r \in \mathbf{Q}$.

Napomenimo da ako je f neprekidna funkcija, onda $(*)$ vrijedi i za $r \in \mathbf{R}$. Naime, tada ako je $r = \lim_{n\to\infty} r_n$, $r_n \in \mathbf{Q}$ imamo redom

$$f(rx) = f(\lim_{n\to\infty} r_n x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n x) = \lim_{n\to\infty} r_n f(x) = rf(x).$$

Pokažimo sada da naša funkcija ne može biti neprekidna. Tada bi, naime, iz $f(rx) = rf(x)$, $r \in \mathbf{R}$, slijedilo $f(r) = rf(1)$, a kako mora biti $f(1) = 1$, imali bi $f(r) = r$, $\forall r \in \mathbf{R}$, a vidjeli smo da f ne može biti linearna funkcija.

Sada se indukcijom po k lako dokaže da za $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbf{Q}$ vrijedi

$$f(r_1x_1 + \cdots + r_kx_k) = r_1f(x_1) + \cdots + r_kf(x_k), \quad \forall x_1, \ldots, x_k \in \mathbf{R} \tag{$**$}$$

Pređimo sada na samu konstrukciju funkcije f. Uzmimo neki realni broj $\xi_1 \in \mathbf{R}$. Ako je $\xi_1 \in \mathbf{Q}$, onda mora biti zbog $(**)$ $f(\xi_1) = \xi_1 f(1) = \xi_1$, a ako je $\xi_1 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, onda $f(\xi_1)$ odaberemo po volji. Uzmimo $\xi_2 \in \mathbf{R}$. Ako je $\xi_2 \in \mathbf{Q}$, onda opet zbog $(**)$ mora biti $f(\xi_2) = \xi_2$, a ako je $\xi_2 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, onda $f(\xi_2)$ odaberemo po volji. Uzmimo sada $\xi_3 \in \mathbf{R}$. Ako je ξ_3 racionalna kombinacija od ξ_1 i ξ_2, tj. $\xi_3 = r_1\xi_1 + r_2\xi_2$ $(r_1, r_2 \in \mathbf{Q})$, onda zbog $(**)$ mora biti

$$f(\xi_3) = r_1f(\xi_1) + r_2f(\xi_2).$$

Ako ξ_3 nije racionalna kombinacija od ξ_1 i ξ_2, onda $f(\xi_3)$ odaberemo po volji.

Nastavljajući taj postupak, dobivamo da je f definirana na nekom (prebrojivom) skupu $B = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\}$. Uzmimo sada $\xi_\alpha \notin B$. Ako je ξ_α racionalna kombinacija od konačno mnogo elemenata iz B, onda je $f(\xi_\alpha)$ određeno s $(**)$. Ako to nije, onda $f(\xi_\alpha)$ odaberemo po volji.

Postavlja se sada pitanje da li se nastavljanjem ovog postupka može postići da B iscrpi čitav $\mathbf{R}$, tj. da f bude definirana na čitavom $\mathbf{R}$? Ako je to moguće, onda je f konstruirana, jer npr. možemo uzeti da je $f(\sqrt{5}) = -1$.

Ako postoji skup $B \subset \mathbf{R}$ takav da (1) $\forall x \in \mathbf{R} \setminus B$, $\exists n \in \mathbf{N}$ i brojevi $b_1, \ldots, b_n \in B$ i $r_1, \ldots, r_n \in \mathbf{Q}$ takvi da je $x = \sum_{i=1}^{n} r_ib_i$, (2) Nijedan $x \in B$ nije racionalna kombinacija konačnog broja preostalih elemenata iz B, onda se B zove **Hamelova** (racionalna) baza vektorskog prostora $\mathbf{R}$ nad poljem $\mathbf{Q}$.

Ako Hamelova baza postoji, onda se prije opisanim postupkom dobiva funkcija definirana na čitavom $\mathbb{R}$.

Dakle, čitav problem se svodi na egzistenciju Hamelove baze $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$. Dokažimo da postoji takva Hamelova baza. Dokaz se provodi pomoću Zornove leme. Da formuliramo Zornovu lemu, trebaju nam neki pojmovi.

Parcijalno uređen skup je uređen par $(S, \leq)$, skupa S i binarne relacije uređaja "$\leq$" na S za koju vrijedi (1) $x \leq x$, $\forall x \in S$ (refleksivnost), (2) $x \leq y$ & $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivnost) i (3) $x \leq y$ & $y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimetričnost). Za podskup $C \subseteq S$ kažemo da je **lanac** (ili **potpuno** ili **linearno uređen**) ako $\forall x, y \in C$ vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$. Podskup $A \subset S$ je odozgo omeđen ako postoji $q \in S$ takav da je $a \leq q$, $\forall a \in A$, q je gornja međa od A. Element $m \in S$ je **maksimalan** za skup S ako je $x \leq m$, $\forall x \in S$ i $m \leq y$ i $y \in S$ povlači $y = m$.
Zornova lema. Ako je svaki lanac iz parcijalno uređenog skupa $S \neq \emptyset$ odozgo omeđen, onda S ima maksimalni element.

TEOREM 3. *Postoji Hamelova baza od* $\mathbb{R}$ *nad* $\mathbb{Q}$.

Dokaz. Označimo sa S familiju svih racionalno nezavisnih podskupova skupa $\mathbb{R}$, tj. takvih podskupova za koje vrijedi svojstvo (2) iz definicije Hamelove baze. Skup S je parcijalno uređen obzirom na inkluziju kao uređajne relacije, tj. stavimo $B_1 \leq B_2 \Leftrightarrow B_1 \subseteq B_2$ za $B_1, B_2 \in S$. Neka je sada $C \subset S$ lanac. Tada je skup $C' = \cup\{B \mid B \in C\}$ opet element iz S i C' je gornja međa od C. Prema Zornovoj lemi, S ima maksimalni element B^*. Tada je B^* tražena Hamelova baza, jer je B^* takav racionalno nezavisan podskup od $\mathbb{R}$ da nijedan podskup od $\mathbb{R}$ koji sadrži B^* nije racionalno nezavisan. To drugim riječima znači da je svaki $x \in \mathbb{R}$ konačna racionalna kombinacija elemenata iz B^*. ■

Primijetimo da ovaj dokaz funkcionira i općenito za bilo koji vektorski prostor.

Egzistencija i jedinstvenost površine

Sada ćemo dokazati egzistenciju i jedinstvenost funkcije $p : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava (P1) – (P4). Prvo ćemo vidjeti kolika je površina pravokutnika.

TEOREM 4 (površina pravokutnika). *Ako postoji površina p i ako je $\Pi = ABCD$ pravokutnik takav da je $|AB| = a$ i $|BC| = b$, onda je $p(ABCD) = ab$.*

Dokaz. Promotrimo najprije slučaj kada su a i b pozitivni racionalni brojevi. Tada je uvijek moguće postići da je

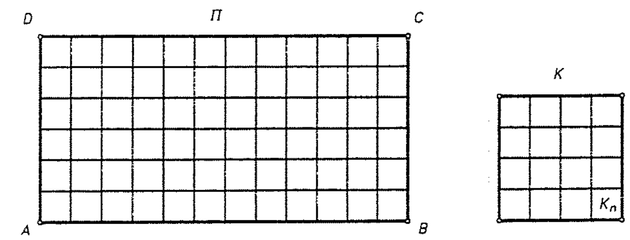
$$a = \frac{m}{n}, \quad b = \frac{m'}{n},$$

gdje je $m, m', n \in \mathbb{N}$.

Neka je K kvadrat sa stranicom 1. Podijelimo svaku stranicu kvadrata K i pravokutnika Π na dijelove duljine $\frac{1}{n}$. Na svakoj stranici kvadrata ima po n takvih dijelova, a na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ pravokutnika ima po m i m' takvih dijelova. Povučemo li diobenim točkama paralele sa stranicama, dobit ćemo da je K zbroj od n^2 kvadrata stranice $\frac{1}{n}$, a Π zbroj od mm' takvih kvadrata. Svi su ti

kvadrati međusobno sukladni, pa su zbog (P3) jednake površine. Neka je K_n jedan od tih kvadratića (sl. 117). Prema (P2) imamo

$$p(K) = n^2 p(K_n), \quad p(\Pi) = mm' p(K_n)$$



Sl. 117.

Prema (P4) je $p(K) = 1$, pa iz prve jednakosti slijedi

$$p(K_n) = \frac{1}{n^2},$$

a zatim iz druge jednakosti dobivamo

$$p(\Pi) = \frac{mm'}{n^2} = \frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n} = ab,$$

i u ovom je slučaju teorem dokazan.

Neka su sada a i b bilo koja dva pozitivna realna broja. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\frac{a_n}{n} \leq a < \frac{a_n + 1}{n}, \quad \frac{b_n}{n} \leq b < \frac{b_n + 1}{n}.$$

Označimo sa Π_n pravokutnik $AB_nC_nD_n$ (smješten kao na sl. 118) sa stranicama $\frac{a_n}{n}$ i $\frac{b_n}{n}$, a sa Π'_n pravokutnik $AB'_nC'_nD'_n$ sa stranicama $\frac{a_n+1}{n}$ i $\frac{b_n+1}{n}$ (sl. 118). Tada zbog $\Pi_n \subseteq \Pi \subset \Pi'_n$, zbog monotonosti od p slijedi $p(\Pi_n) \leq p(\Pi) < p(\Pi'_n)$, a zbog prvog slučaja

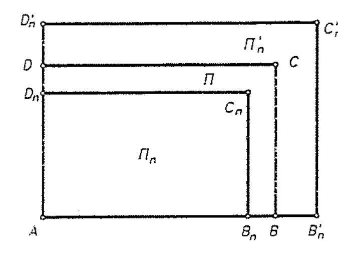
$$p(\Pi_n) = \frac{a_n b_n}{n^2}, \quad p(\Pi'_n) = \frac{(a_n+1)(b_n+1)}{n^2},$$

pa je

$$\frac{a_n b_n}{n^2} \leq ab < \frac{(a_n+1)(b_n+1)}{n^2},$$

odakle je

$$p(\Pi_n) \leq ab < p(\Pi'_n).$$



Sl. 118.

Iz ovih nejednakosti slijedi da je

$$|p(\Pi) - ab| < p(\Pi_n') \dot{-} p(\Pi_n).$$

Dakle, broj ab je aproksimacija broja $p(\Pi)$ s pogreškom aproksimacije manjom od

$$p(\Pi_n') - p(\Pi_n) = \frac{a_n + b_n + 1}{n^2} \leq \frac{n(a+b)+1}{n^2}.$$

Za $\varepsilon > 0$, odaberemo $n \in \mathbf{N}$ tako da je $\frac{a+b}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ i $\frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Tada je $|p(\Pi) - ab| < \varepsilon$. Kako to vrijedi za svako $\varepsilon > 0$ slijedi da je

$$p(\Pi) = ab. \blacksquare$$

TEOREM 5 (površina paralelograma i trokuta). *Neka je $PQRS$ paralelogram sa stranicom a i pripadnom visinom v, a $\triangle ABC$ trokut sa stranicom a i pripadnom visinom v_a. Ako površina p postoji, onda je*

$$a)\ p(PQRS) = av; \quad b)\ p(\triangle ABC) = \frac{1}{2}av_a.$$

Dokaz. a) Neka je $|PQ| = a$, a $|RR'| = |SS'| = v$, gdje su $\overline{RR'}$ i $\overline{SS'}$ visine paralelograma na stranicu $\overline{PQ}$ (sl. 119). Tada je $\triangle PSS' \cong \triangle QRR'$ (K-S-K), pa je zbog (P3) $p(\triangle PSS') = p(\triangle QRR')$. Četverokut $PR'RS$ je jednak zbroju paralelograma $PQRS$ i trokuta QRR', a isto tako zbroju pravokutnika $S'R'RS$ i trokuta PSS'. Prema (P2) je stoga

$$p(PR'RS) = p(PQRS) + p(\triangle QRR')$$
$$p(PR'RS) = p(S'R'RS) + p(\triangle PSS')$$

Oduzimanjem stoga slijedi da je

$$p(PQRS) = p(S'R'RS).$$

No $S'R'RS$ je pravokutnik sa stranicama a i v, pa je prema prethodnom teoremu $p(S'R'RS) = av$. Stoga je i $p(PQRS) = av$.

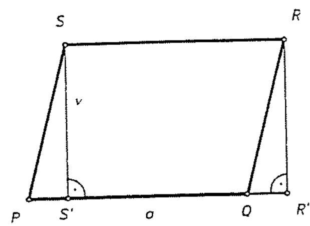
b) Neka je D četvrti vrh paralelograma $ABCD$. Tada je prema a) $p(ABCD) = av_a$. No $ABCD$ je zbroj $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$. Stoga je zbog (P2)

$$p(ABCD) = p(\triangle ABC) + p(\triangle ACD).$$

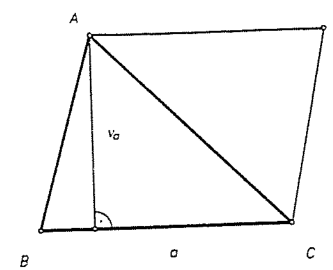
Međutim, $\triangle ABC \cong \triangle ACD$ (zašto?), pa je prema (P3) $p(\triangle ABC) = p(\triangle ACD)$. Odatle je $p(ABCD) = 2p(\triangle ABC)$, pa tvrdnja slijedi. $\blacksquare$

Kako za $\triangle ABC$ vrijedi $av_a = bv_b = cv_c$ (Propozicija 6 u 2.4), to možemo reći da ako površina postoji, onda je površina bilo kojeg trokuta jednaka poluproduktu stranice i pripadne visine trokuta. Isto tako, ako dva trokuta imaju dvije stranice jednakih duljina i pripadne visine jednake, onda imaju i jednake površine.

Do sada smo pokazali da ako postoji površina trokuta, onda je ona jednaka poluproduktu stranice i pripadne visine. Ako uzmemo bilo koji poligon Π, onda



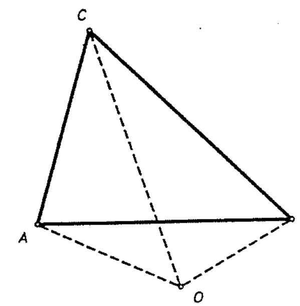
Sl. 119.



Sl. 120.

znamo da se Π može prikazati kao zbroj od konačno mnogo trokuta, pa je prirodno **površinu poligona** $p(\Pi)$ definirati kao zbroj površina tih trokuta. No poligon Π se može na različite načine prikazati kao zbroj trokuta, pa nismo sigurni da će svi mogući takvi prikazi za $p(\Pi)$ uvijek dati istu vrijednost. Pokazat ćemo da $p(\Pi)$ ne ovisi o načinu rastavljanja na trokute.

U tu svrhu uvest ćemo sljedeći dogovor. Neka je dan $\triangle ABC$ i neka je O bilo koja točka ravnine. Za $\triangle OAB$ kažemo da je **pozitivan** obzirom na $\triangle ABC$ ako točke O i C leže u istoj poluravnini određenoj pravcem AB i pišemo $\varepsilon(OAB) = 1$. Ako pak O i C leže s različitih strana pravca AB, onda kažemo da je $\triangle OAB$ **negativan** obzirom na $\triangle ABC$ i pišemo $\varepsilon(OAB) = -1$. Ako točka O leži na pravcu AOB, onda pišemo $\varepsilon(OAB) = 0$. Analogno se definira $\varepsilon(OBC)$ i $\varepsilon(OCA)$. Na slici 121 je $\varepsilon(OAB) = -1$, a $\varepsilon(OBC) = 1$, $\varepsilon(OCA) = 1$.



Sl. 121.

Vrijedi ova tvrdnja

PROPOZICIJA 6. *Ako su dani $\triangle ABC$ i bilo koja točka O u ravnini i ako postoji površina p, onda je razlika zbroja površina pozitivnih i zbroja površina negativnih trokuta jednaka površini trokuta $\triangle ABC$. Točnije, vrijedi formula*

$$p(\triangle ABC) = \varepsilon(OAB)p(\triangle OAB) + \varepsilon(OBC)p(\triangle OBC) + \varepsilon(OCA)p(\triangle OCA). \quad (*)$$

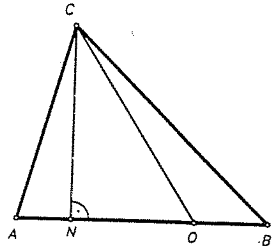
Dokaz. Obzirom na položaj točke O prema $\triangle ABC$ moramo razlikovati 6 slučajeva.

1. Točka O se podudara s jednim vrhom $\triangle ABC$, recimo $O = A$. U tom je slučaju $\varepsilon(OAB) = \varepsilon(OCA) = 0$, a $\varepsilon(OBC) = 1$, pa $(*)$ vrijedi.

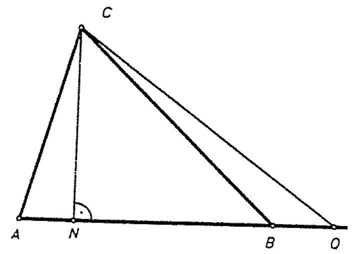
2. Točka O je unutarnja točka stranice $\triangle ABC$, recimo $O \in \overline{AB}$ (v. sl. 122). U ovom je slučaju $\varepsilon(OAB) = 0$, $\varepsilon(OBC) = \varepsilon(OCA) = 1$ pa treba dokazati da je

$$p(\triangle ABC) = p(\triangle OBC) + p(\triangle OCA).$$

Neka je N nožište visine iz C na AB. Tada je $p(\Delta OBC) + p(\Delta OCA) = \frac{1}{2}|OB| \cdot |CN| + \frac{1}{2}|OA| \cdot |CN| = \frac{1}{2}|CN|(|AO| + |OB|) = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CN| = p(\Delta ABC)$, pa je tvrdnja dokazana.



Sl. 122.



Sl. 123.

3. Točka O leži na produžetku jedne stranice, recimo na produžetku stranice AB (v. sl. 123). Tada je $\varepsilon(OAB) = 0$, $\varepsilon(OBC) = -1$, $\varepsilon(OCA) = 1$, pa treba pokazati

$$p(\Delta ABC) = p(\Delta OCA) - p(\Delta OBC).$$

To se dokazuje slično kao i slučaj 2.

4. Točka O je u nutrini ΔABC (v. sl. 124). U ovom je slučaju $\varepsilon(OAB) = \varepsilon(OBC) = \varepsilon(OCA) = 1$, pa treba pokazati da je

$$p(\Delta ABC) = p(\Delta OAB) + p(\Delta OBC) + p(\Delta OCA).$$

Spojimo C sa O i sjecište te spojnice sa $\overline{AB}$ označimo sa D. Prema slučaju 2 je

$$p(\Delta ABC) = p(\Delta DBC) + p(\Delta DCA) \quad \text{i}$$
$$p(\Delta OAB) = p(\Delta DAO) + p(\Delta DBO),$$

a prema slučaju 3 je

$$p(\Delta OCA) = p(\Delta DCA) - p(\Delta DAO),$$
$$p(\Delta OBC) = p(\Delta DBC) - p(\Delta DBO).$$

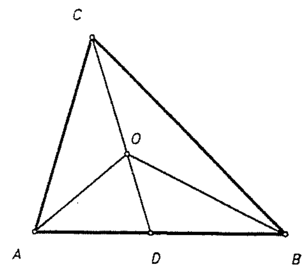
Iz ovih jednakosti (zbrajanjem posljednjih triju i usporedba s prvom) slijedi tvrdnja.

5. Točka O leži van ΔABC, a unutar jednog od kutova $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ACB$, recimo unutar $\sphericalangle ACB$ (v. sl. 125). Tada je $\varepsilon(OAB) = -1$, $\varepsilon(OCA) = \varepsilon(OBC) = 1$, pa treba dokazati

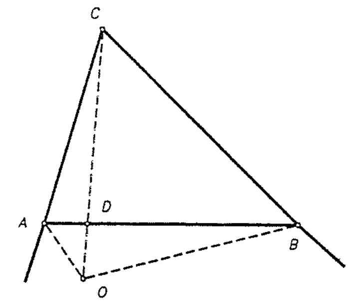
$$p(\Delta ABC) = p(\Delta OBC) + p(\Delta OCA) - p(\Delta OAB).$$

Neka je D presjek $\overline{OC}$ i $\overline{AB}$. Prema slučaju 2 imamo

$$p(\Delta ABC) = p(\Delta ADC) + p(\Delta DBC) \quad \text{i}$$
$$p(\Delta OAB) = p(\Delta OAD) + p(\Delta OBD),$$



Sl. 124.



Sl. 125.

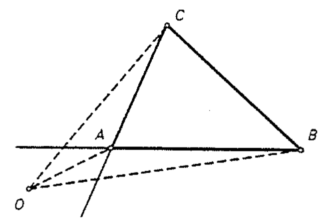
a prema slučaju 3 imamo

$$p(\Delta OAD) = p(\Delta OCA) - p(\Delta ADC) \quad \text{i}$$
$$p(\Delta OBD) = p(\Delta OBC) - p(\Delta BDC).$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo

$$p(\Delta ABC) + p(\Delta OAB) = p(\Delta OCA) + p(\Delta OBC),$$

odakle slijedi tvrdnja.



Sl. 126.

6. Točka O leži van ΔABC, a unutar jednog od kuteva koji su vršni s kutovima trokuta. Recimo da O leži unutar kuta koji je vršni s kutom $\sphericalangle BAC$ (sl. 126). Sada je $\varepsilon(OBC) = 1$, $\varepsilon(OAB) = \varepsilon(OCA) = -1$, pa treba dokazati da je

$$p(\Delta ABC) = p(\Delta OBC) - p(\Delta OAB) - p(\Delta OCA).$$

Primjenom slučaja 4 na ΔOBC i točku A dobivamo

$$p(\Delta OBC) = p(\Delta OCA) + p(\Delta OAB) + p(\Delta ABC),$$

odakle slijedi tvrdnja. ■

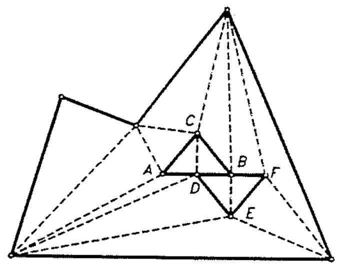
Sada dokažimo da za svaki poligon Π, broj $p(\Pi)$ ne ovisi o načinu rastavljanja na trokute, tj. vrijedi ova tvrdnja.

TEOREM 6. *Ako $p : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ zadovoljava aksiome (P1) - (P4), onda površina $p(\Pi)$ poligona Π ne ovisi o načinu prikaza poligona Π kao zbroja trokuta.*

U svrhu dokaza trebamo dvije leme.

LEMA 3. *Ako poligon prikažemo kao zbroj trokuta, onda ga možemo dopuniti do triangulacije.*

Dokaz Leme 3. Neka je poligon Π prikazan kao zbroj trokuta među kojima ima takvih koji imaju samo dio stranice zajednički, npr. na sl. 127. su takvi trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$. Spojimo C sa D i B sa F. Učinimo li taj postupak u svakoj



Sl. 127.

takvoj situaciji, dobit ćemo na kraju očito jednu triangulaciju od Π. Uočite da takva situacija na rubu od Π ne može nastupiti, jer bi inače takvi trokuti imali zajedničkih unutarnjih točaka. Time je lema dokazana. ■

LEMA 4. *Površina poligona Π obzirom na neki rastav na trokute jednaka je površini obzirom na triangulaciju dobivenu iz tog rastava.*

Dokaz Leme 4. Dovoljno je vidjeti (v. sl. 127) da je

$$p(\triangle ABC) + p(\triangle DEF) = p(\triangle DCA) + p(\triangle DBC) + p(\triangle DBF) + p(\triangle BEF),$$

a to je lagana posljedica slučaja 2 prethodne propozicije. ■

Dokaz teorema. Zbog Lema 3 i 4 dovoljno je promatrati bilo koju triangulaciju poligona $\Pi = P_1P_2 \ldots P_n$. Odaberimo po volji točku O u ravnini i spojimo ju sa svim vrhovima triangulacije poligona Π. Za svaki pojedini trokut $\triangle A_iB_iC_i$ te triangulacije vrijedi prema prethodnoj propoziciji

$$p(\triangle A_iB_iC_i) = \varepsilon(OA_iB_i)p(\triangle OA_iB_i) + \varepsilon(OB_iC_i)p(\triangle OB_iC_i) + \varepsilon(OC_iA_i)p(\triangle OC_iA_i) \qquad (*)$$

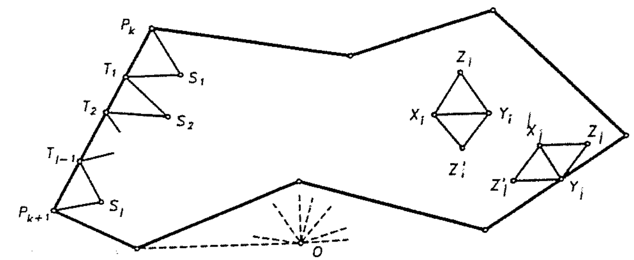
Zbrojimo li sve te jednakosti, na lijevoj strani dobivamo zbroj vrijednosti funkcije p za sve trokute triangulacije. Treba vidjeti da taj broj $p(\Pi)$ ne ovisi o izboru triangulacije. Na desnoj strani dobivamo sumu oblika

$$\sum \varepsilon(OX_iY_i)p(\triangle OX_iY_i),$$

gdje se sumira po svim stranicama $\overline{X_iY_i}$ trokuta triangulacije. Dakle,

$$p(\Pi) = \sum \varepsilon(OX_iY_i)p(\triangle OX_iY_i) \qquad (**)$$

Pogledajmo prvo koliki je doprinos onih bridova triangulacije, koji se nalaze u nutrini poligona Π. Svaki takav brid $\overline{X_iY_i}$, stranica je dvaju trokuta $\triangle X_iY_iZ_i$ i $\triangle X_iY_iZ_i'$ (v. sl. 128). Ako napišemo $(*)$ za te trokute, vidimo da se u zbroju na



Sl. 128.

desnoj strani od $(**)$ ukidaju članovi u kojima se pojavljuju obje točke X_i i Y_i. To pokazuje da je doprinos unutarnjih bridova u $(**)$ jednak nula. Prema tome, sumaciju u $(**)$ "preživе" samo one stranice trokuta triangulacije koje su na rubu poligona Π.

Uočimo sada jednu stranicu $\overline{P_kP_{k+1}}$ poligona Π i trokute triangulacije $\triangle P_kT_1S_1$, $\triangle T_1T_2S_2, \ldots, \triangle T_{l-1}P_{k+1}S_l$ uz tu stranicu. Kako su točke $S_1, S_2, \ldots, S_l$ uvijek s iste strane pravca P_kP_{k+1}, to za trokute $\triangle OP_kT_1$, $\triangle OT_1T_2, \ldots, \triangle OT_{l-1}P_{k+1}$ vrijedi da su oni istog predznaka (tj. pozitivni ili negativni) obzirom na pripadne trokute $\triangle P_kT_1S_1, \triangle T_1T_2S_2, \ldots, \triangle T_{l-1}P_{k+1}S_l$ triangulacije. Označimo taj predznak sa $\varepsilon_k \in \{-1, 0, 1\}$. Na desnoj strani od $(**)$ je doprinos stranica na $\overline{P_kP_{k+1}}$ jednak

$$\varepsilon_k[p(\triangle OP_kT_1) + p(\triangle OT_1T_2) + \cdots + p(\triangle OT_{l-1}P_{k+1})].$$

Prema slučaju 2 iz prethodne propozicije, taj je zbroj jednak $\varepsilon_k p(\triangle OP_kP_{k+1})$. Odavde tada slijedi da $(**)$ ima oblik

$$p(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k p(\triangle OP_kP_{k+1}), \qquad (***)$$

pri čemu smatramo da je $P_{n+1} = P_1$.

U formuli $(***)$ desna strana očito ne ovisi o triangulaciji poligona Π, pa stoga ni lijeva strana ne ovisi o triangulaciji. Osim toga, lijeva strana od $(***)$ očito ne ovisi o točki O, pa zato ni desna strana ne ovisi o točki O. Time je teorem dokazan. ■

Dokažimo sada konačno i ovaj teorem.

TEOREM 7. *Neka je $p : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ funkcija definirana na skupu $\mathcal{P}$ poligona tako da vrijedi:*

1. $p(\emptyset) = 0$;
2. *Ako je* $\Delta \in \mathcal{P}$ *trokut, onda je* $p(\Delta)$ *poluprodukt bilo koje stranice trokuta i pripadne visine trokuta* Δ;
3. *Ako je* $\Pi \in \mathcal{P}$ *poligon, prikazan u obliku zbroja od konačno mnogo trokuta* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, $n \in \mathbf{N}$, *onda je*

$$p(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} p(\Delta_i).$$

Tada je p površina na skupu $\mathcal{P}$.

Dokaz. Treba provjeriti da tako definirana funkcija zadovoljava aksiome (P1) - (P4). Aksiom (P1) je očito ispunjen. Za dokaz od (P2), prikažimo Π u obliku $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$. Ako Π_1 i Π_2 prikažemo u obliku zbroja trokutova, onda je i Π prikazan kao zbroj trokuta, pa iz definicije brojeva $p(\Pi)$, $p(\Pi_1)$, $p(\Pi_2)$ slijedi da je $p(\Pi) = p(\Pi_1) + p(\Pi_2)$. Za dokaz (P3), uočimo da se sukladni poligoni mogu prikazati kao zbrojevi istog broja u parovima sukladnih trokuta, pa (P3) vrijedi. Kako se kvadrat K sa stranicom 1 može prikazati kao zbroj dvaju trokuta kojima je jedna stranica 1 i pripadna visina 1, to je $p(K) = 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1) = 1$, pa vrijedi (P4). ■

KOROLAR 2. *Postoji jedna jedina funkcija* $p : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ *koja zadovoljava aksiome (P1) - (P4).*

Dokaz. Pokazali smo da iz (P1) - (P4) slijedi da je površina trokuta nužno jednaka poluproduktu stranice i pripadne visine, pa iz prethodnog teorema slijedi egzistencija funkcije p. S druge strane iz teorema o nezavisnosti rastava na trokute slijedi jedinstvenost funkcije p. ■

Neki primjeri površina i njenog korištenja

Primjer 1. Odredite površinu trokuta ΔABC kojemu su zadane duljine stranica a, b, c.

Rješenje. Neka je A vrh trokuta takav da je pripadni kut α šiljast. Neka je N nožište okomice spuštene iz vrha A na $\overline{BC}$. Uz oznake kao na slici 129 vrijedi

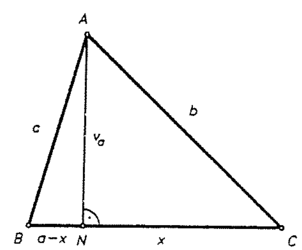
$$v_a^2 = b^2 - x^2 = c^2 - (a-x)^2,$$

pa odavde slijedi

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Uvrstimo li ovo u $v_a^2 = b^2 - x^2$, lako nalazimo da je

$$v_a^2 = \frac{1}{4a^2}(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$



Sl. 129.

Označimo li sa s poluopseg trokuta, tj. $2s =$

$= a + b + c$, slijedi $a + b - c = 2(s-c)$, $b + c - a = 2(s-a)$, $c + a - b = 2(s-b)$, pa dobijamo

$$v_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Iz $p(\Delta ABC) = \frac{1}{2} a v_a$, odmah slijedi

$$p(\Delta ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Ta se formula zove **Heronova formula.** ■

Primjer 2. Poligoni $\Pi = A_1A_2\ldots A_n$ i $\Pi' = A_1'A_2'\ldots A_n'$ su **slični**, ako postoji bijekcija $f : \{A_1, \ldots, A_n\} \to \{A_1', \ldots, A_n'\}$, $f(A_i) = A_i'$, $i = 1, \ldots, n$, takva da vrijedi $|A_i'A_{i+1}'| = k|A_iA_{i+1}|$, $i = 1, \ldots, n$ $(A_{n+1} = A_1,\ A_{n+1}' = A_1')$, $k \in \mathbf{R}^+$ i $\alpha_i = \alpha_i'$, $i = 1, \ldots, n$, gdje su $\alpha_i = \sphericalangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$, $\alpha_i' = \sphericalangle A_{i-1}'A_i'A_{i+1}'$ unutarnji kutovi tih poligona. Dokažite da vrijedi $p(\Pi') = k^2 p(\Pi)$.

Rješenje. Dovoljno je tvrdnje dokazati za dva slična trokuta ΔABC i $\Delta A'B'C'$. Prema definiciji sličnosti vrijedi $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$. Zbrajanjem slijedi da za opsege ovih trokuta vrijedi $2s' = k \cdot 2s$, tj. $s' = ks$. Prema Heronovoj formuli tada slijedi

$$p(\Delta A'B'C') = \sqrt{s'(s'-a')(s'-b')(s'-c')} = k^2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = k^2 p(\Delta ABC).$$ ■

Primjer 3. Dokažite da u svakom trokutu ΔABC vrijedi

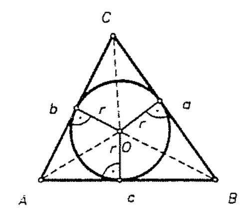
a) $r = \dfrac{P}{s}$; b) $r_a = \dfrac{P}{s-a}$, $r_b = \dfrac{P}{s-b}$, $r_c = \dfrac{P}{s-c}$; c) $P = \sqrt{r r_a r_b r_c}$

gdje je r polumjer trokutu upisane kružnice, r_a, r_b, r_c polumjeri trokutu pripisanih kružnica, s poluopseg trokuta i $P = p(\Delta ABC)$ njegova površina.

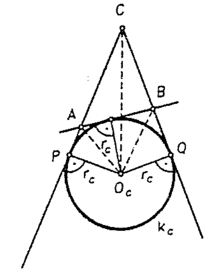
Rješenje. a) Sa slike 130. vidimo da je

$$P = p(\Delta OAB) + p(\Delta OBC) + p(\Delta OCA) =$$
$$= \frac{1}{2}rc + \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb = r\frac{a+b+c}{2} = rs,$$

pa slijedi tvrdnja.



Sl. 130.



Sl. 131.

b) Promotrimo pripisanu kružnicu $k_c(O_c, r_c)$. Neka ona dira pravce CA i CB u točkama P i Q (v. sl. 131). Tada imamo

$$P = p(\Delta AO_cC) + p(\Delta CO_cB) - p(\Delta AO_cB) \Rightarrow$$
$$P = \frac{1}{2}br_c + \frac{1}{2}ar_c - \frac{1}{2}cr_c \Rightarrow$$
$$P = \frac{1}{2}r_c(b + a - c) = r_c(s - c),$$

pa tvrdnja slijedi.

c) Iz a), b) i Heronove formule imamo redom

$$rr_ar_br_c = \frac{P}{s}\cdot\frac{P}{s-a}\cdot\frac{P}{s-b}\cdot\frac{P}{s-c} = \frac{P^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{P^4}{P^2} = P^2,$$

pa tvrdnja slijedi. ■

Primjer 4. Dokažite da je površina trapeza jednaka produktu srednjice i visine.

Dokaz I. Neka je $ABCD$ trapez s osnovkama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ duljina a i c redom i neka je v visina trapeza. Spojimo li A i C dijagonalom, tada je površina P trapeza jednaka

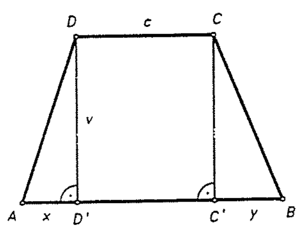
$$P = p(\triangle ABC) + p(\triangle ACD) = \frac{a\cdot v}{2} + \frac{c\cdot v}{2} = \frac{a+c}{2}\cdot v.$$

No, $\frac{a+c}{2}$ je upravo duljina srednjice trapeza (v. teorem o srednjici).

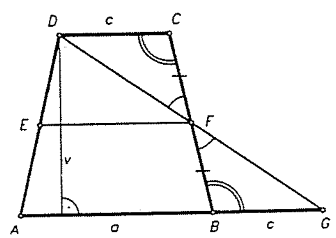
Dokaz II. Neka su C' i D' nožišta okomica spuštenih iz C i D na pravac AB. Uzmimo (najčešću) situaciju da $\overline{D'C'} \subset \overline{AB}$ (sl. 132). Neka je $|AD'| = x$, $|C'B| = y$. Tada je $x + c + y = a$. Tada je površina P trapeza jednaka

$$P = \frac{xv}{2} + cv + \frac{yv}{2} = \frac{a-c}{2}\,v + cv = \frac{a+c}{2}\,v.$$

Slično se postupa u preostalim slučajevima.



Sl. 132.



Sl. 133.

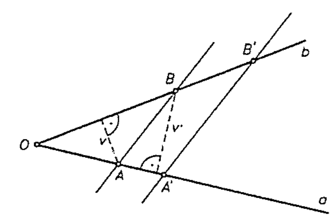
Dokaz III. Neka je $\overline{EF}$ srednjica trapeza. Označimo sa G sjecište pravca DF sa AB (sl. 133). Tada je $\triangle CFD \cong \triangle BFG$ (K–S–K), pa je $p(\triangle CFD) = p(\triangle BFG)$. Stoga je površina P trapeza jednaka površini $p(\triangle AGD)$. Zbog $|DC| = |BG| = c$ slijedi

$$P = \frac{1}{2}|AG|\cdot v = \frac{1}{2}(|AB| + |BG|)v = \frac{1}{2}(a+c)v = \frac{a+c}{2}\,v. \ ■$$

Primjer 5. Dokažite Talesov poučak o proporcionalnosti u pramenu pravaca pomoću površina.

Dokaz. Neka se pravci a i b sijeku u O, a $p \parallel p'$ neka sijeku a i b redom u A i B, odnosno u A' i B'. Dokažimo

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA'|}{|OB'|},\quad \frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|},\quad \frac{|OB|}{|BA|} = \frac{|OB'|}{|B'A'|}.$$



Sl. 134.

Prvo tvrdimo da je

$$p(\triangle OAB') = p(\triangle OA'B) \qquad (*)$$

Naime

$$p(\triangle OAB') = p(\triangle OAB) + p(\triangle ABB')$$
$$p(\triangle OA'B) = p(\triangle OAB) + p(\triangle ABA').$$

Uočimo da je u trapezu $ABA'B'$ dužina $\overline{AB}$ baza, pa je $p(\triangle ABA') = p(\triangle ABB')$. Zato slijedi $(*)$. Sada iz $(*)$ slijedi

$$\frac{p(\triangle OAB')}{p(\triangle OAB)} = \frac{p(\triangle OA'B)}{p(\triangle OAB)} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}|OB'|\cdot v}{\frac{1}{2}|OB|\cdot v} = \frac{\frac{1}{2}|OA'|\cdot v'}{\frac{1}{2}|OA|\cdot v'} \Rightarrow \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA'|}{|OB'|}.$$

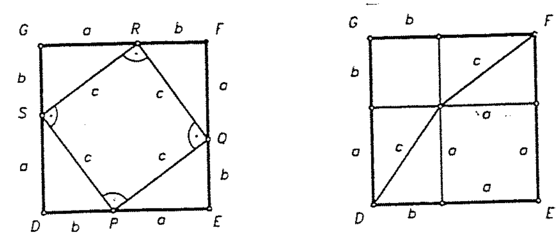
Ostale jednakosti se svode na ovu dokazanu, tako da se kroz A povuče paralela $c \parallel b$, pa ulogu točke O dobiva A'. ■

Primjer 6. Dokažite Pitagorin poučak pomoću površine.

Dokaz I. Neka je $\triangle ABC$ pravokutan trokut s katetama a i b i hipotenuzom c. Konstruirajmo kvadrat $DEFG$ s bridom $a+b$ i unutar njega četiri kongruentne kopije $\triangle ABC$ kao na sl. 135a). (Konstruiramo te trokutove u kutovima kvadrata koristeći S–K–S.) Tada je $\sphericalangle QRS$ pravi kut jer su $\sphericalangle GRS$ i $\sphericalangle FRQ$ komplementarni. Isto tako su i ostali kutovi četverokuta $PQRS$ pravi, pa je to kvadrat.

Zbog aditivnosti površine, površina velikog kvadrata jednaka je površini malog kvadrata plus površine četiri kongruentna pravokutna trokuta, tj.

$$p(DEFG) = p(PQRS) + 4p(\triangle GRS) \Rightarrow$$
$$(a+b)^2 = c^2 + 4\cdot\frac{1}{2}ab \ \Rightarrow\ a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \ \Rightarrow\ a^2 + b^2 = c^2.$$



a) b)

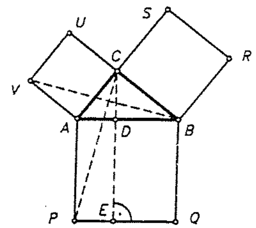
Sl. 135.

Dokaz II. Možemo i ovako rezonirati. Gornji kvadrat $DEFG$ možemo i ovako "razrezati" (sl. 135b): na dva kvadrata stranica a i b i četiri kongruentna trokuta, svaki $\cong \triangle ABC$. Stoga je (vidi obje slike!):

$$p(DEFG) = c^2 + 4p(\triangle ABC) = a^2 + b^2 + 4p(\triangle ABC),$$

pa slijedi tvrdnja.

Dokaz III. (Euklidov dokaz) Konstruirajmo prema van kvadrate nad sve tri stranice kao na sl. 135c). $CE \perp AB, PQ$. Glavni koraci Euklidovog dokaza su ovi:
1) $p(ADPE) = 2p(\triangle CAP)$. (Pravokutnik i trokut imaju istu bazu $\overline{AP}$ i istu visinu $\overline{AD}$.)
2) $p(ACUV) = 2p(\triangle VAB)$. (Kvadrat i trokut imaju bazu $\overline{VA}$ i istu visinu $\overline{AC}$.)
3) $\sphericalangle VAC = \sphericalangle PAD$ (oba su prava kuta) i $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CAD$, pa zbrajanjem slijedi $\sphericalangle VAB = \sphericalangle PAC$. No, $|VA| = |AC|$ (jer je $ACUV$ kvadrat) i $|AB| = |AP|$ (jer je $PQBA$ kvadrat). Prema K–S–K imamo $\triangle VAB \cong \triangle CAP$. Iz 1), 2) i 3) slijedi $p(ADPE) = p(ACUV)$ i zato $p(\triangle CAP) = p(\triangle VAB)$. Analogno se dokaže $p(DEQB) = p(CBRS)$. Odavde onda slijedi da je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad obje katete (u smislu površine).



Sl. 135.c

Ovaj dokaz je tipičan za Euklidove manire: osim prirodnih brojeva koji su trebali za prebrajanja, sve (ostale) veličine imaju svoje jasno geometrijsko značenje. ■

Primjer 7. (**Cevin teorem**). Neka su A', B', C' točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC. Pravci AA', BB', CC' prolaze jednom točkom, ako i samo ako vrijedi

$$\frac{|AC'|}{|C'B|}\cdot\frac{|BA'|}{|A'C|}\cdot\frac{|CB'|}{|B'A|} = 1 \qquad (*)$$

Dokaz. Pretpostavimo da se AA', BB' i CC' sijeku u točki O. Trokuti $\triangle ACC'$ i $\triangle BCC'$ imaju iste visine, pa im se osnovice odnose kao površine, tj.

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{p(\triangle ACC')}{p(\triangle BCC')}.$$

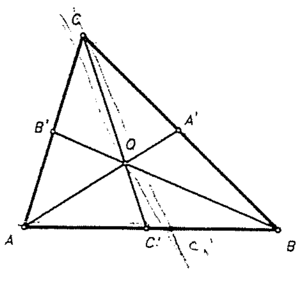
Analogno vrijedi i za $\triangle AC'O$ i $\triangle BC'O$, pa je

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{p(\triangle AC'O)}{p(\triangle C'BO)},$$

pa zbog svojstva jednakih omjera slijedi

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{p(\triangle ACC') - p(\triangle AC'O)}{p(\triangle BCC') - p(\triangle C'BO)}, \text{ tj.}$$

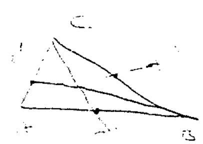
$$\frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{p(\triangle ACO)}{p(\triangle BCO)}.$$



Sl. 136.

Analogno je

$$\frac{|BA'|}{|A'C|} = \frac{p(\triangle BAO)}{p(\triangle ACO)}, \quad \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{p(\triangle BCO)}{p(\triangle BAO)}.$$



Množenjem te tri relacije slijedi tvrdnja. Pretpostavimo sada da vrijedi (*). Kroz sjecište pravaca AA' i BB' povucimo pravac CC_1' (pri čemu C_1' leži na dužini $\overline{AB}$). Prema već dokazanom imamo

$$\frac{|AC_1'|}{|C_1'B|}\cdot\frac{|BA'|}{|A'C|}\cdot\frac{|CB'|}{|B'A|} = 1 = \frac{|AC'|}{|C'B|}\cdot\frac{|BA'|}{|A'C|}\cdot\frac{|CB'|}{|B'A|},$$

pa je $\dfrac{|AC_1'|}{|C_1'B|} = \dfrac{|AC'|}{|C'B|}$. Na dužini $\overline{AB}$ postoji jedinstvena točka X za koju je $\dfrac{|AX|}{|XB|} = \lambda$, jer iz ove jednakosti slijedi $|AX| = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}|AB|$. Stoga je $C' = C_1'$, pa pravac CC' prolazi sjecištem pravaca AA' i BB'. ■

Primjer 8. (**Erdős-Mordellova nejednakost**). Unutar trokuta $\triangle ABC$ nalazi se točka P čije su udaljenosti do vrhova A, B, C redom R_a, R_b, R_c, a do stranica $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ redom d_a, d_b, d_c. Dokažite da je $aR_a \geq bd_b + cd_c$, pa pomoću toga da je

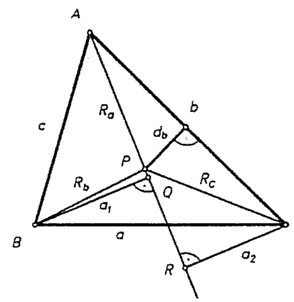
$$R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c).$$

Rješenje. Iz vrhova B i C spustimo okomice $\overline{BQ}$ i $\overline{CR}$ na pravac AP. Neka je $|BQ| = a_1$, $|CR| = a_2$. Tada je očito $a_1 + a_2 \leq a$. Stoga je

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}aR_a &\geq \frac{1}{2}a_1R_a + \frac{1}{2}a_2R_a = \\ &= p(\triangle ABP) + p(\triangle APC) = \\ &= \frac{1}{2}cd_c + \frac{1}{2}bd_b,\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$aR_a \geq bd_b + cd_c.$$



Sl. 137.

(Primijetimo da smo ovdje koristili samo to da je točka P unutar kuta $\sphericalangle BAC$, a ne unutar $\triangle ABC$.)

Sada primijenimo izvedenu nejednakost na točku koja je simetrična točki P obzirom na simetralu kuta $\alpha = \sphericalangle BAC$ (zbog gornje primjedbe opet dobivamo točku unutar $\sphericalangle BAC$). Tako dobivamo $aR_a \geq cd_b + bd_c$, tj. $R_a \geq \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c$. Analogno dobivamo $R_b \geq \frac{c}{b}d_a + \frac{a}{b}d_c$ i $R_c \geq \frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a$. Zbrajanjem ovih nejednakosti i koristeći $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ za $x, y > 0$, imamo

$$R_a + R_b + R_c \geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)d_a + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)d_b + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)d_c \geq 2(d_a + d_b + d_c).$$

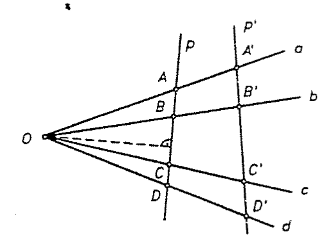
Napomenimo da jednakost vrijedi ako i samo ako je $\triangle ABC$ jednostraničan, a P njegovo središte. ■

Primjer 9. (**centralna projekcija čuva dvoomjer**). Neka su a, b, c, d polupravci s vrhom O i presjecimo taj pramen s dva pravca p i p' koji ga sijeku redom u A, B, C, D odnosno A', B', C', D'. Tada vrijedi

$$\frac{|AC|}{|BC|} : \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|A'C'|}{|B'C'|} : \frac{|A'D'|}{|B'D'|} \qquad (*)$$

Dokaz. Označimo sa v udaljenost O do p. Neka su ortogonalne projekcije točaka A, A' na pravce c i d redom A_c, A'_c, odnosno A_d, A'_d i slično za točku B. Tada imamo

$$\lambda = \frac{|AC|\cdot|BD|}{|AD|\cdot|BC|} = \frac{\frac{1}{2}|AC|\cdot v\cdot\frac{1}{2}|BD|\cdot v}{\frac{1}{2}|AD|\cdot v\cdot\frac{1}{2}|BC|\cdot v} = \frac{P(\triangle OAC)\cdot P(\triangle OBD)}{P(\triangle OAD)\cdot P(\triangle OBC)} = \frac{\frac{1}{2}|OC|\cdot|AA_c|\cdot\frac{1}{2}|OD|\cdot|BB_d|}{\frac{1}{2}|OD|\cdot|AA_d|\cdot\frac{1}{2}|OC|\cdot|BB_c|} = \frac{|AA_c|\cdot|BB_d|}{|AA_d|\cdot|BB_c|}.$$



Sl. 138.

Na isti način dobivamo

$$\lambda' = \frac{|A'C'|\cdot|B'D'|}{|A'D'|\cdot|B'C'|} = \frac{|A'A'_c|\cdot|B'B'_d|}{|A'A'_d|\cdot|B'B'_c|}.$$

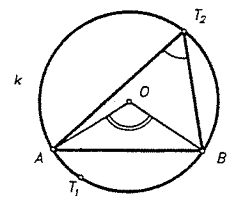
Imamo

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{|AA_c|}{|A'A'_c|}\cdot\frac{|A'A'_d|}{|AA_d|}\cdot\frac{|BB_d|}{|B'B'_d|}\cdot\frac{|BB'_c|}{|BB_c|} = \frac{|OA|}{|OA'|}\cdot\frac{|OA'|}{|OA|}\cdot\frac{|OB|}{|OB'|}\cdot\frac{|OB'|}{|OB|} = 1,$$

što povlači (*). ■

3.3. Neki teoremi o kružnici

Neka je $k(O, r)$ kružnica s centrom O i radijusom r. Ako su A i B dvije točke na kružnici, onda se dužina $\overline{AB}$ zove **tetiva kružnice** s krajevima A i B. Svaka tetiva koja sadrži centar O, zove se **dijametar** (ili **promjer**) kružnice. Očito je duljina dijametra $2r$ i to je očito najveća tetiva kružnice. Ako je $\overline{AB}$ tetiva kružnice koja ne prolazi središtem, onda $\sphericalangle AOB$ zovemo **središnji kut** nad tom tetivom $\overline{AB}$. Svaka tetiva kružnice dijeli kružnicu na dva dijela. Svaki od tih dijelova zovemo **lukom kružnice**. Te lukove bilježimo sa $\widehat{AT_1B}$ i $\widehat{AT_2B}$, gdje su $T_1, T_2 \in k(O, r)$ bilo koje točke s različitih strana pravca AB (sl. 139). Lako se vidi da su središnji kutovi nad jednakim tetivama jednaki (koristeći teorem o sukladnosti trokuta S–S–S).



Sl. 139.

U daljem tekstu ćemo uvijek smatrati pod **lukom** $\widehat{AB}$ luk $\widehat{AT_1B}$, tj. "manji" od dva luka određena tetivom $\overline{AB}$.

Neka je $\overline{AB}$ tetiva (koja nije dijametar). Kut $\sphericalangle AOB$ zvat ćemo **središnjim kutom nad lukom** $\widehat{AT_1B}$, a njemu eksplementni kut zvat ćemo središnji kut nad lukom $\widehat{AT_2B}$. Kut $\sphericalangle AT_2B$ zovemo **obodni (periferni) kut** nad lukom $\widehat{AT_1B}$, a kut $\sphericalangle AT_1B$ obodni kut nad lukom $\widehat{AT_2B}$.

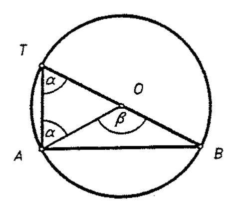
Uočimo nadalje, da također jednakim tetivama pripadaju jednaki lukovi (tj. kongruentni ili izometrični), jer se to lako dobije jednom osnom simetrijom. Iz toga odmah slijedi da jednakim lukovima pripadaju jednaki središnji kutovi.

TEOREM 8 (o obodnom i središnjem kutu). *Središnji kut nad nekim lukom jednak je dvostrukom obodnom kutu nad tim istim lukom. Drugim riječima, obodni kut je jednak polovici pripadnog središnjeg kuta.*

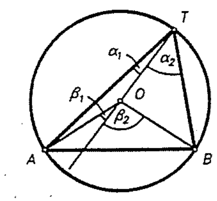
Dokaz. Neka je $\widehat{AB}$ luk kružnice i neka je $\alpha = \sphericalangle ATB$ bilo koji obodni kut nad lukom $\widehat{AB}$.

Razlikovat ćemo tri slučaja.

a) Krak TB kuta prolazi središtem O kružnice. Neka je $\sphericalangle AOB = \beta$ (v. sl. 140). Tada je $\triangle AOT$ jednakokračan trokut ($|AO| = |TO| = r$), pa je kut kod A tog trokuta također jednak α. No β je vanjski kut tog trokuta kod vrha O, pa prema teoremu o vanjskom kutu trokuta slijedi $\beta = 2\alpha$.

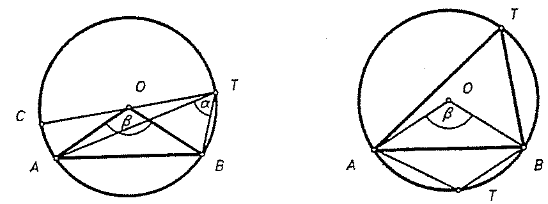


Sl. 140.



Sl. 141.

b) Središte O je unutar kuta $\sphericalangle ATB$. Taj se slučaj svodi na prethodni. U tu svrhu spojimo T sa O i označimo kutove kao na slici 141. Prema prethodnom slučaju je $\beta_1 = 2\alpha_1$, $\beta_2 = 2\alpha_2$, pa je $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha$.



a) b)

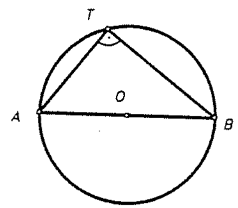
Sl. 142.

c) Središte O je izvan kuta $\sphericalangle ATB$. Spojimo T sa O i drugo sjecište tog pravca označimo sa C (sl. 142a). Tada je $\alpha = \sphericalangle ATB = \sphericalangle BTC - \sphericalangle ATC$. Tada je prema slučaju a), $\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BTC$, $\sphericalangle AOC = 2\sphericalangle ATC$, pa iz ovog dobivamo opet $\beta = 2\alpha$.

Uočimo nadalje, da ako je točka T na luku $\overset{\frown}{AB}$ (sl. 142b), onda je $\sphericalangle ATB = 180° - \frac{\beta}{2}$ (dokažite sami), pa ako se dogovorimo da luku $\overset{\frown}{ATB}$ pripada središnji kut koji je eksplementaran s kutom $\beta = \sphericalangle AOB$, onda tvrdnja opet vrijedi. ∎

KOROLAR 3 (Talesov poučak o kutu nad promjerom). *Ako je $\overline{AB}$ dijametar kružnice, a T bilo koja točka kružnice različite od A i B, onda je $\triangle ATB$ pravokutan s pravim kutom kod vrha T. To se kraće iskazuje: Svaki kružnici upisani trokut nad promjerom kružnice je pravokutan.*

Dokaz. Pripadni središnji kut je 180°, pa je kut $\sphericalangle ATB = 90°$, tj. pravi kut (sl. 143). ∎



Sl. 143.

KOROLAR 4. *Svi su obodni kutovi nad istim lukom jednaki.* ∎

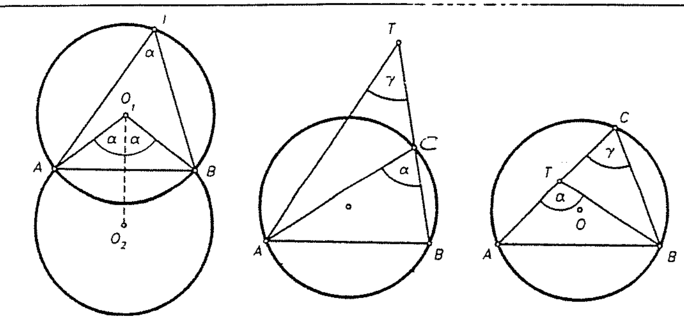
KOROLAR 5. *Središte trokutu opisane kružnice je unutar trokuta ako je trokut šiljastokutan, na polovištu hipotenuze ako je trokut pravokutan i van trokuta ako je trokut tupokutan.* ∎

Ako je $\overline{AB}$ dužina, a T bilo koja točka ravnine, onda je $\sphericalangle ATB$ **kut pod kojim se dužina $\overline{AB}$ vidi iz točke** T. Očito, ako je T na pravcu AB, onda je taj kut jednak nula ili ispruženi kut.

PROPOZICIJA 7. *Neka je zadana dužina $\overline{AB}$ i neki kut α. Tada je skup svih točaka ravnine iz kojih se dužina $\overline{AB}$ vidi pod kutom α unija dvaju lukova kružnice kojima je $\overline{AB}$ tetiva (osim točaka A i B).*

Dokaz. Razmotrimo slučaj kada je α šiljasti kut. Konstruirajmo nad $\overline{AB}$ jednakokračni trokut $\triangle ABO_1$ kojem je kut kod O_1 jednak 2α. Opišimo oko O_1 kružnicu polumjera $|O_1A|$. Ta kružnica prolazi kroz B. Tada se iz svih točaka onog luka kružnice koji je s iste strane pravca AB kao i O_1, dužina $\overline{AB}$ vidi pod kutom α.

Dokažimo da su to jedine točke iz kojih se $\overline{AB}$ vidi pod kutom α. Neka je T točka izvan tog luka. Spojimo T s A i B. Ako npr. $\overline{TB}$ siječe kružnicu u točki C, onda je kut $\sphericalangle ACB = \alpha$ vanjski kut trokuta $\triangle ACT$, pa je $\sphericalangle ATC = \gamma < \alpha$. Ako pak ni jedna od dužina $\overline{TA}$ i $\overline{TB}$ ne siječe kružnicu, onda (v. sl. 144c) spojimo li npr. vrh T s A i B i produžimo $\overline{AT}$ do sjecišta C s kružnicom, onda je $\sphericalangle ATB = \alpha$ vanjski kut trokuta $\triangle BCT$, pa je $\alpha > \gamma$.

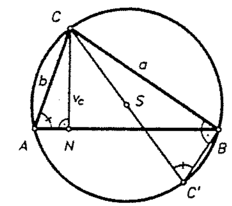


Sl. 144.

Ista argumentacija vrijedi za točku O_2 koja je simetrična točki O_1 obzirom na pravac AB. ∎

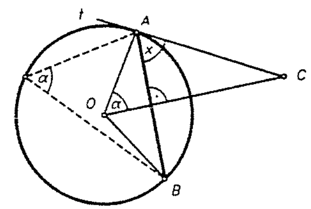
Primjer 10. Dokažite da u svakom trokutu $\triangle ABC$ vrijedi $R = \frac{abc}{4P}$, gdje je R radijus opisane kružnice, a P površina trokuta.

Rješenje. Neka je S središte kružnice, a N nožište visine iz vrha C, tj. $|CN| = v_c$. Neka je nadalje C' točka u kojoj pravac CS siječe kružnicu. Zbog teorema o obodnom kutu je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CC'B$, a zbog Talesovog poučka o kutu nad promjerom je $\sphericalangle CBC' = 90°$. Stoga je $\triangle ACN \sim \triangle C'CB$, pa vrijedi $b : v_c = 2R : a$, odnosno $v_c = \frac{ab}{2R}$. Zbog $P = \frac{1}{2}cv_c$ slijedi $R = \frac{abc}{4P}$. ∎

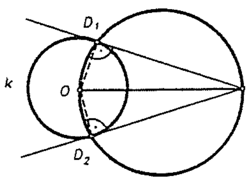


Sl. 145.

Primjer 11. Dokažite ovaj **poučak o kutu tangente i tetive**: Kut između tangente kružnice kojoj je diralište u krajnjoj točki tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.



Sl. 146.



Sl. 147.

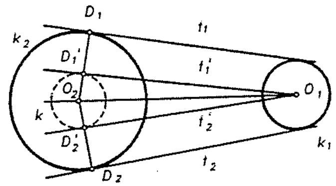
Rješenje. Neka je O središte kružnice, a $\overline{AB}$ bilo koja tetiva. (Ako $O \in \overline{AB}$, tvrdnja je trivijalna.) Neka je t tangenta na kružnicu s diralištem A. Povucimo kroz O okomicu na AB i neka ona siječe t u C. Neka je $\sphericalangle BAC = x$, a obodni kut nad $\overset{\frown}{AB}$ je α (sl. 146). Tada je $\sphericalangle ACO = 90° - x$. Iz pravokutnog trokuta $\triangle AOC$ slijedi da je $90° + 90° - x + \alpha = 180°$, pa je $x = \alpha$. ■

Primjer 12. Iz točke T van kruga omeđenog kružnicom k konstruirajte tangente na tu kružnicu.

Rješenje. Neka je O centar kružnice. Nad $\overline{OT}$ kao promjerom opišimo kružnicu. Ona siječe k u dvije točke D_1, D_2 (v. sl. 147). Te točke su dirališta tangenata povučenih iz T na k (Talesov poučak). ■

Primjer 13. Konstruirajte zajedničke tangente dviju kružnica.

Rješenje. Neka su $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ dvije kružnice i uzmimo da je $|O_1O_2| > r_1 + r_2$ i $r_2 > r_1$. Oko O_2 opišimo kružnicu $k(O_2, r_2 - r_1)$ (sl. 148). Konstruirajmo iz O_1



Sl. 148.

t_1' i t_2' na tu kružnicu. Neka su D_1' i D_2' dirališta tih tangenata sa kružnicom k. Tada polupravci O_2D_1' i O_2D_2' sijeku kružnicu k_2 u D_1 i D_2. Paralele t_1 i t_2 kroz D_1 i D_2 sa t_1' i t_2' redom su očito tada zajedničke tangente kružnica k_1 i k_2. Tangente t_1 i t_2 zovu se **vanjske zajedničke tangente**. Kružnice k_1 i k_2 imaju, međutim, još dvije zajedničke tangente. One se dobiju analognom konstrukcijom tako da se umjesto pomoćne kružnice $k(O_2, r_2 - r_1)$ uzme kružnica $k(O_2, r_1 + r_2)$. Te se tangente zovu **unutarnje zajedničke tangente** od k_1 i k_2.

Ostale slučajeve razmotrite sami. ■

3.4. Tangencijalni i tetivni četverokut

Za četverokut $ABCD$ kažemo da je **tangencijalni**, ako su mu stranice tangente iste kružnice. Karakterizacija tangencijalnog četverokuta je dana sljedećim teoremom.

TEOREM 9. *Četverokut je tangencijalni ako i samo ako mu je zbroj nasuprotnih stranica jednak.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut sa stranicama a, b, c, d, opisan oko kružnice s centrom O. Neka su nožišta okomica iz O na stranice redom P, Q, R, S (sl. 149). Tada je $|AP| = |AS|$, $|BP| = |BQ|$, $|CQ| = |CR|$, $|DR| = |DS|$. Tada imamo

$$a + c = |AP| + |BP| + |CR| + |DR| = |AS| + |BQ| + |CQ| + |DS| = b + d.$$

Obratno, neka je $ABCD$ četverokut za kojeg je

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|. \quad (*)$$

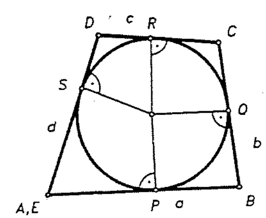
Konstruirajmo kružnicu k koja dodiruje dužine $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{CD}$. Dokažimo da k dira $\overline{AD}$. Pretpostavimo da k ne dira $\overline{AD}$. Povucimo iz D tangentu na k, različitu od DC i neka ona siječe AB u točki E. Tada je $E \neq A$. Tada je $EBCD$ tangencijalni četverokut, pa je prema dokazanom

$$|EB| + |CD| = |BC| + |DE| \quad (**)$$

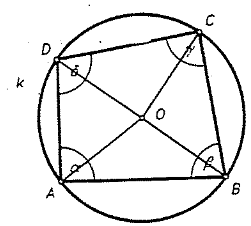
Razlika $(*) - (**)$ povlači $|AB| - |EB| = |AD| - |DE|$, tj $\pm|AE| = |AD| - |DE|$, a to je u kontradikciji s nejednakosti trokuta. ■

Napomenimo da iz prethodnog teorema slijedi da se u paralelogram može upisati kružnica ako i samo ako je paralelogram romb, a u jednakokračni trapez ako i samo ako je duljina srednjice jednaka duljini kraka. Posebno, u pravokutnik se može upisati kružnica ako i samo ako je taj pravokutnik kvadrat.

Tetivni četverokut je četverokut oko kojega se može opisati kružnica, tj. stranice su mu tetive iste kružnice.



Sl. 149.



Sl. 150.

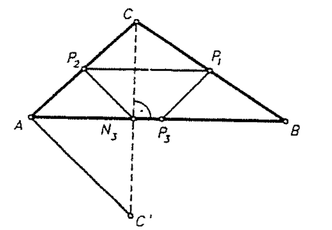
TEOREM 10. *Četverokut je tetivni ako i samo ako mu je zbroj nasuprotnih (unutarnjih) kutova* 180°.

Dokaz. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut upisan u kružnicu k s centrom O (v. sl. 150). Tada prema poučku o obodnom i središnjem kutu imamo

$$\alpha + \gamma = \frac{1}{2}(\sphericalangle BOD + \sphericalangle DOB) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°.$$

Slično je i $\beta + \delta = 180°$.
Obratno, neka je $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$. Opišimo oko $\triangle ABC$ kružnicu k. Koristeći Propoziciju 7 lagano slijedi da je i $D \in k$, pa je $ABCD$ tetivni četverokut. ■

Primjer 14. Dokažite da polovišta stranica i nožišta visina trokuta leže na istoj kružnici.



Sl. 151.

Rješenje. Neka je $\triangle ABC$ zadani trokut, P_1, P_2, P_3 polovišta stranica, a N_1, N_2, N_3 nožišta visina. Pokažimo da točke P_1, P_2, P_3, N_1, N_2, N_3 leže na istoj kružnici. U tu svrhu dovoljno je dokazati da P_1, P_2, P_3 i N_3 leže na istoj kružnici. Neka je C' simetrična slika od C obzirom na pravac AB. Tada je $\overline{P_1P_3}$ srednjica trokuta $\triangle ABC$, pa je $|P_1P_3| = \frac{1}{2}|AC|$. Na isti način je $|P_2N_3| = \frac{1}{2}|AC'| = \frac{1}{2}|AC|$, pa je $P_1P_2N_3P_3$ jednakokračni trapez, a oko jednakokračnog trapeza se može opisati kružnica prema prethodnom teoremu. ■

3.5. Potencija točke obzirom na kružnicu, radikalna os i središte

Neka je $k(O,r)$ kružnica i T bilo koja točka ravnine. Povucimo točkom T *bilo koji* pravac koji siječe kružnicu u točkama A i B. Realan broj $|TA|\cdot|TB|$ ili $-|TA|\cdot|TB|$ zovemo **potencija točke** T **obzirom na kružnicu** k, ako je T izvan k ili unutar k.

Pokažimo da je ova definicija dobra, tj. da potencija točke T ne ovisi o izboru pravca kroz T. U tu svrhu povucimo drugi pravac kroz T koji siječe k u točkama A' i B'.

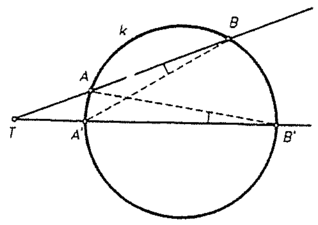
Tada je $\sphericalangle TBA' = \sphericalangle AB'T$ (obodni kutovi nad istim lukom su jednaki). Odavde slijedi (K–K–K) da je

$$\triangle TA'B \sim \triangle TAB',$$

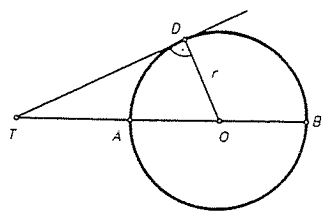
pa odavde dobivamo

$$\frac{|TA|}{|TB'|} = \frac{|TA'|}{|TB|} \Rightarrow |TA|\cdot|TB| = |TA'|\cdot|TB'|,$$

čime je tvrdnja dokazana.



Sl. 152.



Sl. 153.

Uočite da ako je točka na kružnici onda je njena potencija obzirom na kružnicu jednaka 0. Ako je T vanjska točka onda je potencija točke T obzirom na kružnicu

jednaka kvadratu duljine tangente povučene na tu kružnicu. Zaista, neka pravac TO siječe k u A i B, i označimo $|TO| = d$. Tada je $|TA| = d - r$, a $|TB| = d + r$, pa zbog Pitagorinog poučka imamo (sl. 153)

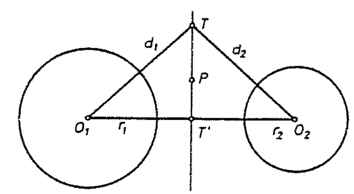
$$|TD|^2 = d^2 - r^2 = (d-r)(d+r) = |TA|\cdot|TB|.$$

Slično je i za vanjsku točku.

Neka su $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ dvije kružnice. Skup svih točaka ravnine koje imaju jednake potencije obzirom na te kružnice zove se **potencijala** ili **radikalna os tih kružnica**.

TEOREM 11. *Ako kružnice nisu koncentrične, onda je potencijala pravac okomit na spojnicu njihovih središta. Potencijala koncentričnih kružnica je $\emptyset$.*

Dokaz. Neka su $k_i(O_i, r_i)$, $i = 1, 2$ dane kružnice, a T bilo koja točka potencijale. Neka je $|O_1T| = d_1$, $|O_2T| = d_2$ (v. sl. 154).



Sl. 154.

Kako točka T ima iste potencije obzirom na k_1 i k_2, mora vrijediti

$$(d_1 + r_1)(d_1 - r_1) = (d_2 + r_2)(d_2 - r_2),$$

tj. $d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2$. Kako su r_1 i r_2 konstante, slijedi da se potencijale podudaraju sa skupom onih točaka ravnine za koje je razlika kvadrata udaljenosti od središta konstantna i jednaka $c^2 = r_1^2 - r_2^2$. Prema tome, za točku T vrijedi

$$|O_1T|^2 - |O_2T|^2 = c^2. \tag{1}$$

Neka je T' ortogonalna projekcija točke T na pravac O_1O_2. Tada iz $|O_1T|^2 - |O_1T'|^2 = |TT'|^2$ i $|O_2T|^2 - |O_2T'|^2 = |TT'|^2$ slijedi $|O_2T'|^2 - |O_1T'|^2 = |O_2T|^2 - |O_1T|^2$, pa zbog (1) imamo

$$|O_1T'|^2 - |O_2T'|^2 = c^2. \tag{2}$$

Dakle, T' leži na potencijali. Pokažimo da i svaka točka P na pravcu TT' pripada potencijali. Tada imamo $|O_1P|^2 - |O_1T'|^2 = |O_2P|^2 - |O_2T'|^2$, odnosno $|O_1P|^2 - |O_2P|^2 = |O_1T'|^2 - |O_2T'|^2$. Odavde zbog (2) imamo $|O_1P|^2 - |O_2P|^2 = c^2$, pa P pripada potencijali. Dakle, svaka točka pravca TT' je na potencijali. Tvrdimo da je pravac p kroz točke T i T' potencijala. U tu svrhu treba vidjeti da točke izvan

p ne pripadaju potencijali. Uočimo da na pravcu O_1O_2 osim T' nema drugih točaka potencijale. Naime, ako je $R \neq T'$ neka druga točka na dužini $\overline{O_1O_2}$ koja pripada potencijali, onda imamo $|O_1R| + |O_2R| = |O_1O_2|$ i $|O_1R|^2 - |O_2R|^2 = c^2$, odakle slijedi

$$|O_1R| = \frac{|O_1O_2|^2 + c^2}{2|O_1O_2|},$$

što znači da je R jednoznačno određena, pa je $R = T'$. Slično se dokazuje tvrdnja, ako je R izvan dužine $\overline{O_1O_2}$. Ako $Q \notin O_1O_2$ nije na potencijali, onda prema gornjem i njena ortogonalna projekcija Q' nije na potencijali. ∎

Napomena. Svaka točka potencijale dviju kružnica središte je kružnice koja ortogonalno siječe tu kružnicu.

KOROLAR 6. *Ako središta triju kružnica nisu kolinearna, onda se potencijale svih triju kružnica sijeku u jednoj točki, tzv.* **radikalnom središtu**. *Radikalno središte je središte kružnice koja ortogonalno siječe sve tri kružnice.* ∎

Uočimo da je potencijala koncentričnih kružnica prazan skup, jer je potencijala dviju kružnica koje se sijeku pravac koji prolazi njihovim sjecištima. Naime, ako su k_1 i k_2 dvije koncentrične kružnice i ako je k_3 bilo koja kružnica koja siječe k_1 i k_2, onda su potencijale p_{13} kružnica k_1 i k_3 i p_{23} kružnica k_2 i k_3 paralelne, pa je stoga potencijala od k_1 i k_2 prazan skup.

Primjer 15. Neka je O centar opisane, a U centar upisane kružnice trokuta $\triangle ABC$. Neka su R i r radijusi opisane i upisane kružnice, a $d = |OU|$. Dokažite **Eulerov teorem**:

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Rješenje. Neka simetrala kuta β siječe opisanu kružnicu u točki M. Tvrdimo prvo da je

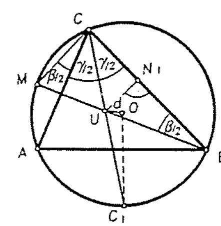
$$|BU| \cdot |UM| = R^2 - d^2.$$

To slijedi iz potencije točke U obzirom na opisanu kružnicu.
Nadalje, $\triangle UCM$ je jednakokračan, jer je $|UM| = |CM|$ zbog $\sphericalangle CUM = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ i $\sphericalangle UCM = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$. Stoga je

$$|BU| \cdot |CM| = R^2 - d^2 \qquad (*)$$

Dokažimo sada da je

$$|BU| \cdot |CM| = 2Rr \qquad (**)$$



Sl. 155.

Neka je N_1 nožište okomice iz U na BC, a C_1 sjecište pravca CU s opisanom kružnicom. Prema poučku o obodnom i središnjem kutu je $\triangle BUN_1 \sim \triangle C_1MC$. Odavde je

$$\frac{|BU|}{|UN_1|} = \frac{2R}{|CM|}, \quad \text{pa je} \quad |BU| \cdot |CM| = 2Rr.$$

Iz $(*)$ i $(**)$ slijedi tvrdnja. ∎

§ 4. Izmjerivi skupovi točaka i njihova površina

4.1. Izmjerivost i površina

Kažemo da je skup točaka $S \subseteq M$ **izmjeriv**, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoje poligoni (tj. zbrojevi konačno jednostavnih poligona) Π i Π', tako da je

$$\Pi \subseteq S \subseteq \Pi' \quad \text{i} \quad p(\Pi') - p(\Pi) < \varepsilon.$$

Za poligon Π kažemo da je **upisan** skupu S, a za poligon Π' da je **opisan** skupu S. Možemo, dakle, reći da je skup točaka izmjeriv ako se razlika površina tom skupu opisanog i upisanog poligona može učiniti po volji malom.

PROPOZICIJA 1. *Svaki poligon je izmjeriv skup točaka.*

Dokaz. Ako je S poligon, onda za poligone Π i Π' možemo uzeti poligon S. ∎

Neka je $\mathcal{M}$ skup (množina) svih izmjerivih skupova točaka u ravnini (uključujući $\emptyset$). Prema gornjoj propoziciji slijedi da je skup svih poligona $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$.

Na drugi (ekvivalentan) način možemo izmjerive skupove ovako definirati. Za dani skup $S \subseteq M$, neka je $\mathcal{U}(S)$ skup svih poligona koji su upisani u S, a sa $\mathcal{O}(S)$ skup svih poligona koji su opisani oko S.
Unutarnja mjera (površina) od S je

$$p_{\mathcal{U}}(S) = \sup\{p(\Pi) \mid \Pi \in \mathcal{U}(S)\},$$

a **vanjska mjera (površina)** od S je

$$p_{\mathcal{O}}(S) = \inf\{p(\Pi) \mid \Pi \in \mathcal{O}(S)\}.$$

Odmah se vidi da je $p_{\mathcal{U}}(S) \leq p_{\mathcal{O}}(S)$. Ako vrijedi jednakost $p_{\mathcal{U}}(S) = p_{\mathcal{O}}(S)$, onda kažemo da je S **izmjeriv** (u Jordanovom smislu) i da je njegova **mjera** (ili **površina u Jordanovom smislu**) jednaka

$$p(S) = p_{\mathcal{U}}(S) = p_{\mathcal{O}}(S).$$

Napomenimo da postoje skupovi koji nisu izmjerivi u ovom smislu (npr. $S = (\mathbf{Q} \cap [0,1]) \times (\mathbf{Q} \cap [0,1])$, za koji je $p_{\mathcal{U}}(S) = 0$, $p_{\mathcal{O}}(S) = 1$).

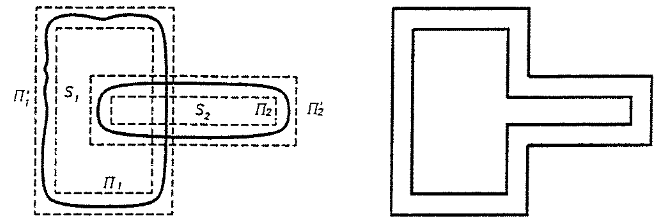
Mi dakle mjeru ili površinu definiramo na izmjerivim skupovima. Prema tome, funkcija $p : \mathcal{M} \to \mathbf{R}$ je funkcija koja svakom izmjerivom skupu pridružuje njegovu mjeru za koju ćemo u daljem reći naprosto **površina**. Osnovna (očekivana) svojstva izmjerivih skupova i na njima definirane funkcije površine sadržana su u sljedećem teoremu.

TEOREM 1. *Familija $\mathcal{M}$ i funkcija površine $p : \mathcal{M} \to \mathbf{R}$ imaju ova svojstva:*

1. $p(S) \geq 0$, *za sve* $S \in \mathcal{M}$;

2. $p(\emptyset) = 0$;
3. *Ako su* $S, S' \in \mathcal{M}$, *onda je* $S \cup S'$, $S \setminus S'$, $S \cap S' \in \mathcal{M}$;
4. *Ako su* $S, S' \in \mathcal{M}$ *i* $S \cap S' = \emptyset$, *onda je* $p(S \cup S') = p(S) + p(S')$;
5. *Ako su* $S, S' \in \mathcal{M}$ *i* $S \subseteq S'$, *onda je* $p(S' \setminus S) = p(S') - p(S)$, *pa je posebno* p *monotona, tj. za* $S, S' \in \mathcal{M}$, $S \subseteq S' \Rightarrow p(S) \leq p(S')$;
6. *Ako su* $S, S' \in \mathcal{M}$ *i* $p(S \cap S') = 0$, *onda je* $p(S \cup S') = p(S) + p(S')$;
7. *Funkcija* p *se na skupu* $\mathcal{P}$ *poligona podudara s površinom poligona definiranom ranije* (u §3.2).

Dokaz. Svojstvo **7** slijedi iz prethodne propozicije, a onda svojstvo **1** i **2** slijede odmah iz definicije.
Dokažimo **3**, i to prvo za uniju. Za dano $\varepsilon > 0$ odaberimo $\Pi_1, \Pi_1' \in \mathcal{P}$ tako da je $\Pi_1 \subseteq S \subseteq \Pi_1'$, $p(\Pi_1') - p(\Pi_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $\Pi_2, \Pi_2' \in \mathcal{P}$ tako da je $\Pi_2 \subseteq S' \subseteq \Pi_2'$, $p(\Pi_2') - p(\Pi_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Neka je $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$, $\Pi' = \Pi_1' \cup \Pi_2' \in \mathcal{P}$. Tada je $\Pi \subseteq S \cup S' \subseteq \Pi'$, a $p(\Pi') - p(\Pi) \leq p(\Pi_1') - p(\Pi_1) + p(\Pi_2') - p(\Pi_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ Dakle je $S \cup S' \in \mathcal{M}$. Da



Sl. 156. $p(\Pi') - p(\Pi)$ je površina uskog sloja.

dokažemo **3** za razliku $S \setminus S'$, postupimo slično. Odaberimo opet $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_1', \Pi_2'$ kao gore. Ovaj puta trianguliramo $\Pi_1' \cup \Pi_2'$ tako da je svako od područja $\Pi_1, \Pi_1', \Pi_2, \Pi_2'$ unija trokutova koji se sijeku samo u vrhovima i stranicama (tj. zbroj trokutova). Sada neka je Π' unija svih trokutova koji su u Π_1', ali nisu u Π_2, a Π unija svih trokutova koji su u Π_1, ali nisu u Π_2'. Tada je opet

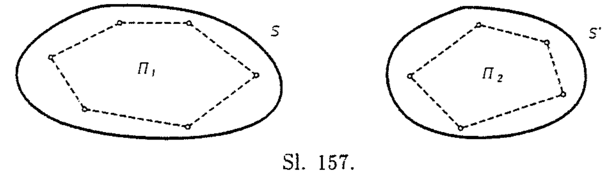
$$p(\Pi') - p(\Pi) \leq p(\Pi_1') - p(\Pi_1) + p(\Pi_2') - p(\Pi_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pa je $S \setminus S' \in \mathcal{M}$.
Za presjek $S \cap S'$ sada imamo zbog dokazanog svojstva za uniju i razliku da je

$$S \cap S' = (S \cup S') \setminus [(S \setminus S') \cup (S' \setminus S)] \in \mathcal{M}.$$

Dokažimo **4**. Prvo primijetimo da ako je Π poligon koji leži u $S \cup S'$, onda je $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$, gdje je $\Pi_1 \subseteq S$, $\Pi_2 \subseteq S'$. Stoga je

$$p(\Pi) = p(\Pi_1) + p(\Pi_2) \leq p_u(S) + p_u(S'),$$



Sl. 157.

pa je

$$p_u(S \cup S') \leq p_u(S) + p_u(S'),$$

jer je $p_u(S \cup S')$ najmanja gornja međa svih $p(\Pi)$.
S druge strane, za dano $\varepsilon > 0$ uzmimo $\Pi_1 \subseteq S$, $\Pi_2 \subseteq S'$ tako da je $p(\Pi_1) > p_u(S) - \frac{\varepsilon}{2}$, $p(\Pi_2) > p_u(S') - \frac{\varepsilon}{2}$. Tada je $p(\Pi) > p_u(S) + p_u(S') - \varepsilon$, pa je $p_u(S \cup S') \geq p_u(S) + p_u(S') - \varepsilon$, za svako $\varepsilon > 0$. Odatle slijedi $p_u(S \cup S') \geq p_u(S) + p_u(S')$. Obratnu nejednakost već znamo, pa kako su sva ova tri skupa izmjeriva slijedi da je

$$p(S \cup S') = p(S) + p(S').$$

Dokažimo **5**. Ako je $S \subseteq S'$, onda je $S' = (S' \setminus S) \cup S$ i ova dva skupa su disjunktna i izmjeriva (zbog **3**), pa je $p(S') = p(S' \setminus S) + p(S)$ zbog **4**, odakle slijedi tvrdnja.
Dokažimo **6**. Prvo $S \setminus S' = S \setminus (S \cap S')$, $S' \setminus S = S' \setminus (S \cap S')$, pa je prema već dokazanome

$$p(S \setminus S') = p(S) - 0, \qquad p(S' \setminus S) = p(S') - 0,$$

pa zbog (disjunktnog) rastava $S \cup S' = (S \setminus S') \cup (S \cap S') \cup (S' \setminus S)$ slijedi zbog **5**

$$p(S \cup S') = p(S) + 0 + p(S').$$

Time je teorem u potpunosti dokazan. ■

Krug s centrom O i radijusom r, u oznaci $K(O, r)$ je skup $\{T \in M \mid d(O, T) \leq r\}$.

TEOREM 2. *Krug* $K = K(O, r)$ *je izmjeriv skup i njegova površina je jednaka* $r^2\pi$, *gdje je* π *konstanta ("Ludolfov broj" pi) približno jednaka* 3,14159265...

Dokaz. Neka je Π_n pravilni $3 \cdot 2^{n-1}$-terokut ($n \in \mathbb{N}$) upisan krugu $K(O, r)$, a Π_n' pravilni $3 \cdot 2^{n-1}$-terokut opisan krugu. Neka su a_n, b_n duljine stranica od Π_n i Π_n', a c_n udaljenost središta O kruga do pravca bilo koje stranice poligona Π_n. Prema definiciji površine poligona imamo

$$p(\Pi_n) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2^{n-1} a_n c_n, \qquad p(\Pi_n') = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2^{n-1} b_n r. \tag{1}$$

Kako su poligoni Π_n i Π_n' slični (odnosno, dovoljno je $\Delta OAB \sim \Delta OA'C$), to je

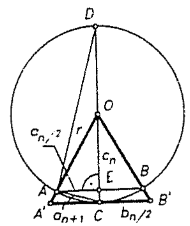
$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{r}{c_n}. \tag{2}$$

Za $n = 1$ su Π_n i Π_n' jednakostranični trokuti i obje strane iz (2) jednake 2. Očito je nadalje $a_n < 2a_{n+1}$, $b_n > 2b_{n+1}$ (zbog nejednakosti trokuta). Zato je

$$\frac{b_n}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}},$$

pa razlomak (2) pada kada n raste. Stoga je

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{r}{c_n} \le 2. \qquad (3)$$



Sl. 158.

Dalje imamo

$$a_n < b_n < \frac{1}{2}b_{n-1} < \frac{1}{4}b_{n-2} < \cdots < \frac{1}{2^{n-1}}b_1 = \frac{1}{2^{n-1}}2r\sqrt{3} < \frac{4r}{2^{n-1}} = \frac{r}{2^{n-3}}. \qquad (4)$$

Iz $\triangle OAB$ dobivamo $c_n + \frac{1}{2}a_n > r$, tj.

$$r - c_n < \frac{1}{2}a_n < \frac{r}{2^{n-2}}. \qquad (5)$$

Zbog (2), koristeći nejednakosti (3), (4) i (5), iz (1) proizlazi

$$\begin{aligned} p(\Pi_n') - p(\Pi_n) &= 3\cdot 2^{n-2}(b_n r - a_n c_n) = 3\cdot 2^{n-2}\left(\frac{a_n r}{c_n}r - a_n c_n\right) = \\ &= 3\cdot 2^{n-2}\frac{a_n}{c_n}(r^2 - c_n^2) = 3\cdot 2^{n-2}a_n\left(\frac{r}{c_n}+1\right)(r-c_n) < \\ &< 3\cdot 2^{n-2}\cdot\frac{r}{2^{n-3}}\cdot 3\cdot\frac{r}{2^{n-2}} = \frac{9r^2}{2^{n-3}} = \frac{72r^2}{2^n}. \end{aligned}$$

Neka je sada $\varepsilon > 0$ bilo koji dani pozitivni broj. Tada uzmimo $n \in \mathbf{N}$ takav da je $\varepsilon > \frac{72r^2}{2^n}$, tj. $2^n > \frac{72r^2}{\varepsilon}$, odn. $n > \log_2\frac{72r^2}{\varepsilon}$.

$$p(\Pi_n') - p(\Pi_n) < \frac{72r^2}{2^n} < \varepsilon,$$

pa je $K = K(O,r)$ izmjeriv skup. U stvari smo dokazali da je $\lim\limits_{n\to\infty}(p(\Pi_n') - p(\Pi_n)) = 0$. Sada izračunajmo površinu tog kruga. Iz definicije površine slijedi da je ta površina jednaka $\lim_{n\to\infty} p(\Pi_n) = \lim_{n\to\infty} p(\Pi_n')$. Ovi limesi zaista postoje, jer je npr. niz $(p(\Pi_n))$ odozgo omeđen (npr. s $p(\Pi_1')$) i rastući je jer je $\Pi_n \subset \Pi_{n+1}$ pa stoga $p(\Pi_n) \le p(\Pi_{n+1})$. Stoga postoji $\frac{p(K)}{r^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{p(\Pi_n)}{r^2}$. Označimo ga s π. Ocijenimo taj limes. Prvo za $n = 1$, Π_1 je jednakostranični trokut s duljinom stranice $a_1 = r\sqrt{3}$, pa je $a_1/r = \sqrt{3}$. Iz $\triangle OAB$ dobivamo $r^2 = (a_n/2)^2 + c_n^2$, pa je

$$\frac{c_n}{r} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{a_n}{r}\right)^2}.$$

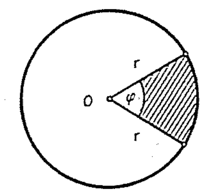
Znamo i da je $\frac{b_n}{r} = \frac{a_n}{c_n}$. Iz sličnosti pravokutnih trokuta $\triangle AEC \sim \triangle DAC$ (obodni kutovi!) imamo $|AC| : |EC| = |DC| : |AC|$, tj. $a_{n+1} : (r - c_n) = 2r : a_{n+1}$. Odavde je

$$\frac{a_{n+1}}{r} = \sqrt{2\left(1 - \frac{c_n}{r}\right)}, \quad \text{tj.}$$

$$\frac{a_{n+1}}{r} = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{a_n}{r}\right)^2}\right)}.$$

Iz svih ovih jednakosti i nejednakosti dobiva se sukcesivnim računanjem $3 < \frac{p(\Pi_n)}{r^2} < 4$ i zapravo

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\frac{p(\Pi_n)}{r^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{p(\Pi_n')}{r^2} \approx 3{,}14159\ldots \quad \blacksquare$$



Sl. 159.

Kružni isječak K_φ kruga $K = K(O,r)$ koji pripada središnjem kutu φ je presjek kruga i središnjeg kuta veličine φ. Lako se vidi da je K_φ izmjeriv (upisivanjem i opisivanjem poligona). Jasno je da je za $\varphi = 2\pi$, $K_{2\pi} = K$.

PROPOZICIJA 2. *Površina kružnog isječka $p(K_\varphi) = \frac{1}{2}r^2\varphi$, gdje je r radijus, a φ središnji kut u radijanima.*

Dokaz. Očito je površina kružnog isječka proporcionalna središnjem kutu, pa je $p(K_\varphi) : p(K) = \varphi : 2\pi$, odakle slijedi

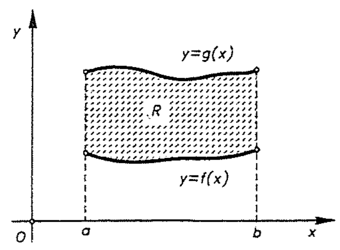
$$p(K_\varphi) = \frac{\varphi}{2\pi}p(K) = \frac{\varphi}{2\pi}r^2\pi = \frac{1}{2}r^2\varphi. \quad \blacksquare$$

Kasnije, kad definiramo duljinu luka kružnice, dat ćemo još jednu formulu za površinu isječka.

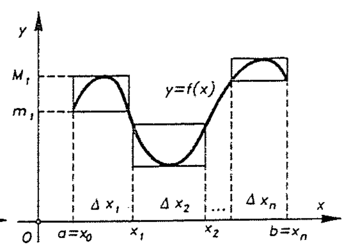
Napomena. U početnim kursevima matematičke analize obično se razmatra problem računanja površine područja R omeđenog grafovima dviju neprekidnih funkcija $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$, $f(x) \le g(x)$, $x \in [a,b]$, tj. skupa $R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$ (v. sl. 160). Pri tom se onda kaže da je ta površina dana formulom s određenim integralom:

$$p(R) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx.$$

No, obično se ne kaže što je ta površina. Upravo je Jordanova mjera ta na koju treba ukazati da se ima u vidu na kakvu površinu pri tom mislimo. Tek nakon toga, izvod te formule u strogom smislu postaje valjan. Ova je situacija prilično slična onoj s krugom. Jednom kad imamo definiciju na koju se (obično prešutno) oslanjamo, onda standardne i



Sl. 160.



Sl. 161.

poznate konstrukcije postaju adekvatne. Tako je i u slučaju određenih integrala. Da se to vidi, promotrimo prvo slučaj kada je R područje "ispod" grafa jedne neprekidne funkcije $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, tj. za $R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ (v. sl. 161). Kao u definiciji određenog integrala, uzmimo niz točaka $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Neka je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ duljina i-tog podsegmenta, $m_i = \min\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $M_i = \max\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Tada je $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ zbroj površina *upisanih* pravokutnika (crtkanih na slici 161), a $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ zbroj površina *opisanih* pravokutnika (puna linija na slici).

Ima više načina kako se definira određeni integral i mi se ovdje nećemo u to upuštati (vidi npr. cit. knjigu S. Kurepe). U svakom slučaju vrijedi

$$\sum m_i \Delta x_i \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum M_i \Delta x_i.$$

Za neprekidnu funkciju f, razlika $\sum M_i \Delta x_i - \sum m_i \Delta x_i$ se može učiniti po volji mala kada uzmemo sve Δx_i dovoljno malene. Stoga za svako $\varepsilon > 0$ postoji niz $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, takav da je

$$\sum M_i \Delta x_i - \sum m_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

Prva suma je površina $p(\Pi')$ poligona Π' opisanog oko R, a druga je površina $p(\Pi)$ poligona Π upisanog u R. Stoga je R izmjeriv i $p_{\mathcal{U}}(R) = p_{\mathcal{O}}(R)$. Kako je integral gornja međa za brojeve $p(\Pi)$ slijedi da je

$$p_{\mathcal{U}}(R) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Slično je integral donja međa za brojeve $p(\Pi')$, pa je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq p_{\mathcal{O}}(R).$$

Kako je $p_{\mathcal{U}}(R) = p_{\mathcal{O}}(R) = p(R)$, slijedi da je

$$p(R) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

što smo i htjeli pokazati.

Proširenje na slučaj kada je R omeđen grafovima dviju neprekidnih funkcija se odavde lako izvodi, pa se u to nećemo upuštati. U mnogim udžbenicima iz matematičke analize nastoje *definirati* površinu takvog područja kao određeni integral. To nije dobro. Površina nekog područja bi trebala ovisiti samo o svojoj veličini i obliku, a ne o načinu na koji je postavljena obzirom na koordinatne osi. Drugačije rečeno, površina mora biti invarijantna obzirom na izometrije ravnine, što nije jasno da će biti ispunjeno ako površinu *definiramo* kao određeni integral. Poteškoća je u tome što se neko područje može na beskonačno načina opisati kao područje među grafovima neprekidnih funkcija. Stoga bi trebalo dokazati samo unutar te teorije da taj integral ne ovisi o tome kako je područje postavljeno obzirom na koordinatni sustav, što nije sasvim lagano u početnom kursu integralnog računa. Jordanova mjera ili površina se u smislu integrala definira kao

$$p(S) = \iint_{\Pi} \chi_S(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdje je χ_S karakteristična funkcija skupa S (tj. $\chi_S(x) = 1$ za $x \in S$, $\chi_S = 0$ za $x \notin S$), a $\Pi \supset S$ je pravokutnik, ako ovaj integral (u Riemannovom smislu) postoji.

Zaključno kažimo da je teorija Jordanove mjere sasvim dostatna da opravda elementarne metode računanja ravninskih površina. Teoriju mjere (ili "mjerenja") su generalizirali Henri Lebesgue i Emile Borel na mnogo širu klasu skupova, što vodi na opću teoriju mjere (vidi cit. knjigu S. Mardešića), ali kao što rekosmo Jordanova mjera je dovoljna za svrhe elementarne matematike.

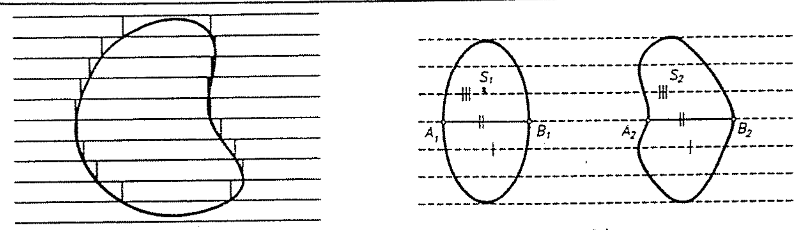
U vezi s integralnim računom za računanje površine (a još više za računanje volumena) korisna je jedna metoda koju je uočio još talijanski geometar Bonaventura Cavalieri (1598–1647). Ideja te metode sastoji se u tome da se o jednakosti (ili odnosu) površina ili volumena dviju figura zaključuje na temelju jednakosti njihovih presjeka s paralelnim pravcima, odnosno ravninama. Vrijedi naime:

Cavalierijev princip za ravninu. Ako dva izmjeriva skupa u ravnini S_1 i S_2 imaju svojstvo da postoji pravac p, takav da sve paralele sa p sijeku S_1 i S_2 u dvije jednake dužine ($|A_1B_1| = |A_2B_2|$), onda su im površine jednake.

Formalni dokaz pomoću integralnog računa nije težak i nećemo ga ovdje provesti.

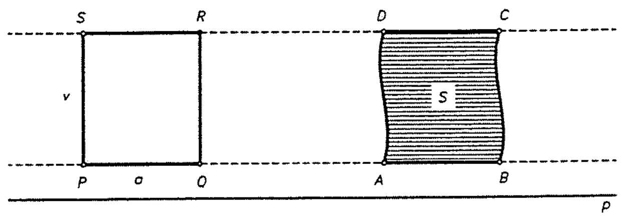
Intuitivno međutim se on ovako može objasniti. Figuru u ravnini možemo približno shvatiti kao da je "istkana" iz uskih pravokutnih traka male visine čije su baze dužine koje sijeku figuru i paralelne su sa p. Površina figure je približno jednaka sumi površina tih pravokutnika. Ta "približnost" je to točnija, što su trake uže, tj. visine pravokutnika što manje (sl. 162a). Primijenimo li to na obje figure na sl. 162.b), imamo na svakom "nivou" jednake pravokutnike jer su im visine jednake po konstrukciji, a baze jednake po pretpostavci. No u tom su slučaju površine "stepenastih figure" jednake, a one su približno jednake površinama danih figura.

Cavalierijev princip u ravnini nam može pomoći da izračunamo površine nekih figura uspoređujući ih s poznatima, npr. kao na sl. 163.



a) b)

Sl. 162.



Sl. 163.

Tu je $|AB| = |CD| = |PQ| = |RS| = a$, a visina v figure S je jednaka visini pravokutnika $PQRS$. Zbog Cavalierijevog principa dobivamo

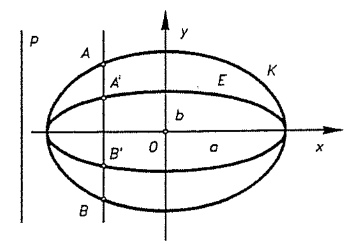
$$p(S) = a \cdot v.$$

Malo poopćeni Cavalierijev princip kaže da ako paralelni presjeci imaju omjer koji je jednak konstanti, onda se i površine odnose isto tako.

Primjer. Izračunajte površinu omeđenu **elipsom** s poluosima a i b $(a > b)$.

Rješenje. Iz analitičke geometrije znamo da su kanonske jednadžbe centralne kružnice K radijusa a i elipse E dane sa $x^2 + y^2 = a^2$ i $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Elipsa E se dobije sažimanjem kružnice K. Naime, iz ovih jednadžbi dobivamo

$$|y_{kr}| = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad |y_{el}| = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$



Sl. 164.

pa je omjer $|A'B'| : |AB|$ dužina, u kojima pravci paralelni osi y sijeku elipsu i kružnicu, konstantan i jednak

$$\frac{2|y_{el}|}{2|y_{kr}|} = \frac{b}{a}.$$

Zbog poopćenog Cavalierijevog principa slijedi da je odnos površina područja El omeđenog elipsom i krugom K jednak $p(El) : p(K r) = b : a$, pa je površina područja El jednaka

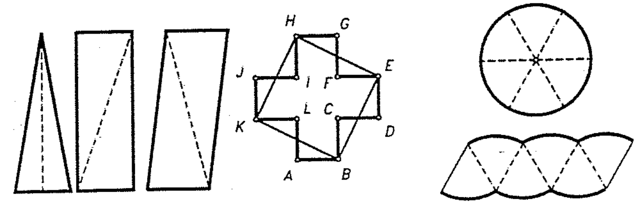
$$p(El) = \frac{b}{a} p(K r) = \frac{b}{a}\pi a^2 = ab\pi. \quad \blacksquare$$

4.2. Jednakosastavljivost figura u ravnini

U proučavanju površina dokazali smo da površina poligona ne ovisi o njegovu prikazu kao sume poligona, tj. ako je $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \cdots + \Pi_n = \Pi_1' + \Pi_2' + \cdots + \Pi_m'$, onda je $\sum_i p(\Pi_i) = p(\Pi) = \sum_j p(\Pi_j')$. Stoga kad želimo računati površinu onda je često pogodno "prekrojiti" poligon u jedan drugi npr. triangulacioni iz kojeg je lako očitati površinu. Tako dolazimo do pojma jednakosastavljivosti. Grubo govoreći, dva poligona su jednakosastavljiva ako jedan iz drugog možemo "prekrojiti". Točnije, imamo ovu definicju.

Dva poligona Π i Π' su **jednakosastavljiva** (ili **rastavno jednaki**) i pišemo $\Pi \equiv \Pi'$ ako postoje poligoni $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ i $\Pi_1', \Pi_2', \ldots, \Pi_n'$, takvi da je $\Pi_1 \cong \Pi_1', \Pi_2 \cong \Pi_2', \ldots, \Pi_n \cong \Pi_n'$ (tj. u parovima su kongruentni ili izometrični) i $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_n$, $\Pi' = \Pi_1' + \Pi_2' + \ldots + \Pi_n'$ (tj. $\Pi = \cup_{i=1}^{n} \Pi_i$, a unutrašnosti Π_i, Π_j su disjunktne za $i \neq j$).

Jasno je da s očitim izmjenama, ovu definiciju možemo proširiti i na mnogo općenitije izmjerive skupove točaka (figura) u ravnini. Na sl. 165a) su tri jednakosastavljiva poligona, na sl. 165b) imamo "križ", tj. dvanaesterokut

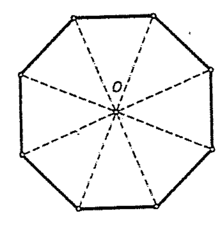


a) b) c)

Sl. 165.

$ABCDE \ldots KL$ koji je jednakosastavljiv s kvadratom $BEHK$, a na sl. 165c) su dvije jednakosastavljive "krivocrtne" figure.

Podsjetimo da za svaki poligon Π (= zbroj od konačno jednostavnih poligona) postoji **triangulacija**, tj. familija trokutova $K = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ čija je unija Π, a presjek svaka dva trokuta je ili $\emptyset$ ili zajednički vrh ili zajednička stranica. Ako su $K = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ i $K' = \{T_1', T_2', \ldots, T_m'\}$ dvije triangulacije, onda ćemo reći da je K' **subdivizija** (ili **podtriangulacija**) od K, ako je svaki T_i' sadržan u nekom T_j. Neke triangulacije će biti posebno korisne. **Zvjezdasta triangulacija** konveksnog poligona se definira kao na sl. 166. (Probajte je precizno definirati!)

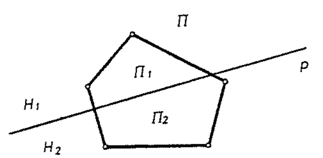


Sl. 166.

Očito svaki konveksni poligon ima zvjezdastu triangulaciju i svaka unutrašnja točka O može se uzeti za centralnu točku.

LEMA 1. *Neka je Π konveksni poligon, a p bilo koji pravac koji siječe unutrašnjost od Π. Tada p rastavlja Π u dva konveksna poligona.*

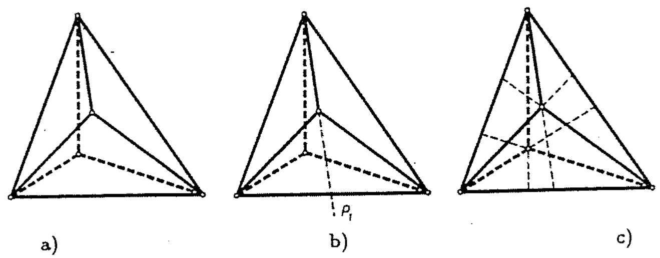
Dokaz. Neka su H_1 i H_2 poluravnine određene pravcem p, a $\overline{H}_1 = H_1 \cup p$, $\overline{H}_2 = H_2 \cup p$ pripadne zatvorene poluravnine. Neka su $\Pi_1 = \Pi \cap \overline{H}_1$, $\Pi_2 = \Pi \cap \overline{H}_2$. Tada su Π_1, Π_2 konveksni skupovi i ustvari konveksni poligoni i $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$. ■



Sl. 167.

LEMA 2. *Svake dvije triangulacije nekog poligona imaju zajedničku subdiviziju.*

Dokaz. Neka su K i K' triangulacije poligona Π. Neka su nadalje $p_1, p_2, \ldots, p_n$ svi pravci koji sadrže sve stranice obiju triangulacija K i K' (na slici 168a) je $n = 9$). Pravac p_1 dekomponira prema Lemi 1 svaki $T_i \in K$ i svaki $T_j' \in K'$ u



Sl. 168.

dva konveksna poligona, ukoliko p_1 siječe interior takvog trokuta (v. sl. 168b). Induktivno sada lako slijedi da svi pravci p_i dekomponiraju Π u konačno mnogo konveksnih poligona $C_1, C_2, \ldots, C_m$. Očito da svaki C_i leži u nekom $T_j \in K$ i nekom $T_k' \in K'$. Sada u svakom C_i izvršimo zvjezdastu triangulaciju. Svi tako dobiveni trokuti čine zajedničku subdiviziju K'' od K i K'. ■

Budući da se svaki poligon može triangulirati, to jednakosastavljivost možemo izreći i ovako. Poligoni Π i Π' su **jednakosastavljivi** ako i samo ako postoje triangulacije $K = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ i $K' = \{T_1', T_2', \ldots, T_n'\}$ od Π i Π', tako da je $T_i \cong T_i'$ za svako i.

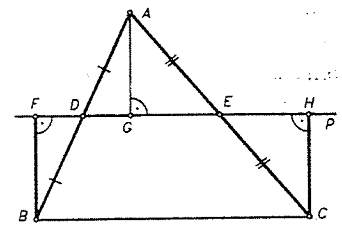
LEMA 3. *Jednakosastavljivost ($\equiv$) je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Očito je $\equiv$ refleksivna i simetrična relacija na skupu poligona. Pokažimo da $\Pi \equiv \Pi'$, $\Pi' \equiv \Pi''$ povlači $\Pi \equiv \Pi''$ (tranzitivnost). Neka su $K = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ i $K' = \{T_1', T_2', \ldots, T_n'\}$ triangulacije od Π i Π', tako da je $T_i \cong T_i'$ za svako i, a K_1' i K'' triangulacije koje daju $\Pi' \equiv \Pi''$. Prema Lemi 2 postoji zajednička subdivizija

L' od K' i K_1'. Za $T_i \in K$, odgovarajući trokut $T_i' \in K'$ je subdivizijom L' trianguliran na neki način, pa preko kongruencije $T_i \cong T_i'$ "prenesimo" tu triangulaciju natrag na T_i. Napravimo li to na svakom T_i, dobivamo subdiviziju L od K. Slično se dobiva subdivizija L'' od K''. Sada se lako vidi da triangulacije L i L'' daju jednakosastavljivost $\Pi \equiv \Pi''$. ■

Ako su dva poligona Π, Π' jednakosastavljiva, onda zbog $\Pi = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n$, $\Pi' = T_1' \cup T_2' \cup \ldots \cup T_n'$, $T_i \cong T_i'$ i svojstva površine slijedi da su im površine jednake, tj. $p(\Pi) = p(\Pi')$. Farkas Bolyai je 1832. g. dokazao da vrijedi i obrat, tj. $p(\Pi) = p(\Pi') \Rightarrow \Pi \equiv \Pi'$.

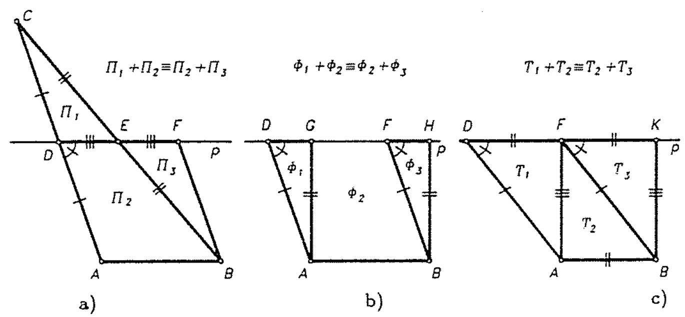
Neka je zadan $\triangle ABC$ s bazom $\overline{BC}$, i neka su D, E polovišta od $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a $p = DE$. Neka su nadalje $\overline{BF}, \overline{AG}$ i $\overline{CA}$ okomice na p. Tada je četverokut $BCHF$ pravokutnik (zbog K-S-K). Taj ćemo pravokutnik zvati **pridruženi pravokutnik** trokuta $\triangle ABC$. (Naravno, taj pravokutnik ovisi o izboru baze, ali će uvijek biti jasno o kojoj je bazi riječ.)



Sl. 169.

LEMA 4. *Svaki trokut je jednakosastavljiv s pridruženim pravokutnikom.*

Dokaz. Najlakše je dokaz opisati slikom. Slučaj sa prethodne slike slijedi iz dvije sukladnosti trokuta. Dokaz u općem slučaju slijedi iz ovih slika.



Sl. 170.

Na sl. 170a) je $\Pi_1 \cong \Pi_3$. Stoga je $\triangle ABC \equiv \square ABFD$. Zato treba još pokazati da je $\square ABFD \equiv \square ABHG$. Ako G leži na $\overline{DF}$ kao na sl. b), to slijedi iz činjenice da je $\triangle AGD \cong \triangle BHF$. Ako to nije slučaj, tvrdnja se svodi na taj slučaj višestrukom primjenom činjenice prikazane na sl. c). ■

LEMA 5. *Ako dva trokuta imaju istu bazu i istu površinu, onda su ti trokuti jednakosastavljivi.*

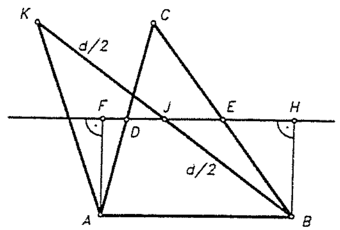
Dokaz. Neka su T i T' dva trokuta, a P i P' njihovi pridruženi pravokutnici. Tada P i P' imaju istu bazu b. Kako je $p(P) = p(T) = p(T') = p(P')$, slijedi da

P i P' imaju istu visinu. Stoga je $P \equiv P'$ (zašto?), pa je zbog Leme 4 $T \equiv P \equiv$ $\equiv P' \equiv T'$, što povlači $T \equiv T'$ (zbog Leme 3). ∎

TEOREM 3 (Bolyai). *Ako dva trokuta imaju istu površinu, onda su oni jednakosastavljivi.*

Dokaz. Neka su T_1 i T_2 dva trokuta s istom površinom $p(T_1) = p(T_2)$ i neka je T_1 trokut ΔABC. Ako je jedna stranica od T_1 jednaka nekoj stranici od T_2, onda tvrdnja slijedi iz Leme 5.

Uzmimo stoga da T_2 ima stranicu duljine $d > |BC|$. Ako dokažemo teorem u ovom slučaju, onda tvrdnja teorema slijedi i općenito zamjenom oznaka. Kao i ranije, neka je p pravac srednjice $\overline{DE}$. Neka je nadalje, J točka na p, takva da je $|BJ| = d/2$, a K točka na polupravcu BJ, tako da je i $|JK| = d/2$. Neka je $T_3 = \Delta ABK$, a P pridruženi pravokutnik $\square ABHF$ trokuta $T_1 = \Delta ABC$.



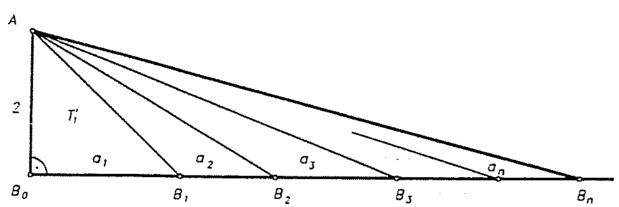
Sl. 171.

Prema Lemi 5 imamo da je $T_3 \equiv P$ i $T_2 \equiv T_3$, pa je zbog tranzitivnosti $T_2 \equiv P$. Po Lemi 4 je $P \equiv T_1$, pa je opet zbog tranzitivnosti $T_1 \equiv T_2$. ∎

Pokažimo konačno kako se Bolyaijev teorem može proširiti na poligone. U tu svrhu treba nam sljedeći teorem euklidske ravnine (koji neće vrijediti u npr. hiperboličkoj ravnini).

TEOREM 4. *U euklidskoj ravnini je svaki poligon jednakosastavljiv s nekim trokutom.*

Dokaz. Neka je Π poligon s triangulacijom $K = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$. Označimo površinu $p(T_i)$ sa a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Konstruirajmo pravokutni trokut dobiven kao zbroj trokuta T_i' kao na sl. 172.



Sl. 172.

Vrijedi očito da je $p(T_i') = p(T_i)$. Prema prethodnom teoremu je stoga $T_i' \equiv T_i$, za svaki i. Stoga je $\Pi \equiv T_1' + T_2' + \ldots + T_n' \equiv \Delta AB_0B_n$. Time je teorem dokazan. Bitno svojstvo euklidske geometrije koje smo tu koristili je da *možemo konstruirati* trokute $T_1', T_2', \ldots, T_n'$. ∎

KOROLAR 1 (Bolyai). *Neka su Π i Π' dva poligona euklidske ravnine s istom površinom. Tada su oni jednakosastavljivi.*

Dokaz. Prema prethodnom teoremu postoje trokuti T i T', takvi da je $\Pi \equiv T$ i $\Pi' \equiv T'$. Tada je $p(T) = p(\Pi)$ i $p(T') = p(\Pi')$. Zbog pretpostavke je tada i $p(T) = p(T')$, a odavde zbog Bolyaijevog teorema slijedi $T \equiv T'$. Iz tranzitivnosti $\equiv$ slijedi da je $\Pi \equiv \Pi'$, što je i trebalo dokazati. ∎

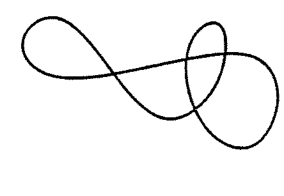
Napomenimo već ovdje da analogna tvrdnja u prostoru neće vrijediti (v. pogl. V), što još više potvrđuje osebujnu strukturu euklidske ravnine.

4.3. Duljina luka krivulje

Polazeći od intuitivno jasnog pojma krivulje u ravnini i luka krivulje kao njenog dijela, u srednjoškolskoj se matematici najčešće uzima kao jasan i pojam duljine luka krivulje i definira ga se obično kao granična vrijednost duljine poligonalne linije upisane tom luku kada broj stranica te poligonalne linije neograničeno raste, a duljina svake stranice postaje sve manja i teži k nuli. Da bi se ovaj pristup korektno i dosljedno proveo, bile bi potrebne opet mnoge predradnje, pa ćemo mi dati definiciju duljine luka služeći se pojmom površine. Taj pristup potječe od H. Minkowskog.

Definirajmo prvo pojam jednostavne krivulje. U tu svrhu nam treba pojam homeomorfizma. Za skupove $S, S' \subseteq M$ kažemo da su **homeomorfni** ako postoji bijekcija $f : S \to S'$ koja je neprekidna, a i inverz f^{-1} je također neprekidan. f se zove **homeomorfizam**. Neprekidno preslikavanje je (intuitivno govoreći) ono koje bliske točke preslikava u bliske točke. Preciznije o tome vidi npr. pogl. II i cit. knjigu S. Mardešića).

Jednostavna krivulja je homeomorfna slika segmenta (tj. dužine), a **jednostavna zatvorena krivulja** homeomorfna slika kružnice.
Katkad se pojam krivulje malo proširuje, pa se dopušta da krivulja sama sebe presjeca u konačno mnogo točaka (sl. 173). Dio krivulje između njene dvije točke zovemo **lukom krivulje**.



Sl. 173.

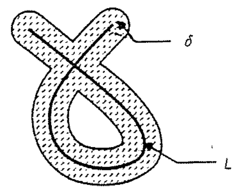
Neka je sada L luk neke krivulje a $\delta > 0$ dani realni broj. Označimo sa $K_\delta(L)$ skup svih točaka ravnine, kojima je udaljenost od skupa L jednaka najviše δ. Pod **udaljenošću** točke A od skupa L podrazumijevamo po definiciji broj $d(A, L) =$ $= \inf\{d(A,T) \mid T \in L\}$. Očito je $K_\delta(L) = \cup_{T \in L} K(T, \delta)$, gdje je $K(T, \delta)$ krug sa središtem u T polumjera δ.

Duljina luka krivulje L je broj $l(L)$ sa svojstvom: za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ tako da je

$$\left| l(L) - \frac{1}{2\delta}\, p(K_\delta(L)) \right| < \varepsilon.$$

Očito je da je

$$l(L) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta}\, p(K_\delta(L)).$$



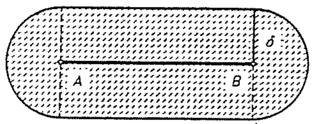
Sl. 174.

Ako $l(L)$ postoji, tada kažemo da je luk L **izmjeriv** ili **rektifikabilan** i da mu je duljina jednaka $l(L)$.

Primjer. Dokažite da se u skladu s ovom definicijom, duljina dužine podudara sa "standardnom" duljinom dužine.

Rješenje. Neka je $\overline{AB}$ dužina standardne duljine a. Tada je skup $K_\delta(\overline{AB})$ unija pravokutnika sa stranicama a i 2δ i dvaju polukrugova polumjera δ. Stoga je $p(K_\delta(\overline{AB})) = 2a\delta + \delta^2\pi$, pa je odavde

$$l(\overline{AB}) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta}(2a\delta + \delta^2\pi) = $$
$$= \lim_{\delta \to 0} \left(a + \frac{\delta\pi}{2} \right) = a. \ \blacksquare$$



Sl. 175.

TEOREM 5. *Opseg (tj. duljina) kružnice polumjera r dana je formulom*

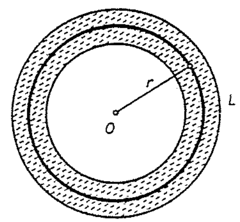
$$O = 2r\pi.$$

Dokaz. Neka je L kružnica radijusa r. Za $0 < \delta < r$, skup $K_\delta(L)$ je kružni vijenac s radijusima $r - \delta$ i $r + \delta$. Stoga je

$$p(K_\delta(L)) = [(r+\delta)^2 - (r-\delta)^2]\pi = 4\delta r\pi,$$

pa je duljina kružnice

$$l(L) = \lim_{\delta \to 0} \frac{4\delta r\pi}{2\delta} = 2r\pi. \ \blacksquare$$

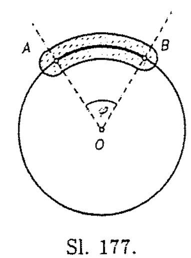


Sl. 176.

TEOREM 6. *Duljina luka kružnice kojemu je pripadni središnji kut φ (u radijanima) jednaka je $r\varphi$.*

Dokaz. Uzmimo na kružnici $k(O, r)$ luk $L = \overset{\frown}{AB}$ sa središnjim kutom φ. Tada se za $0 < \delta < r$, $K_\delta(\overset{\frown}{AB})$ sastoji od isječka kružnog vijenca omeđenog kružnicama radijusa $r + \delta$ i $r - \delta$ i dvaju polukrugova radijusa δ (sl. 177). Stoga je

$$p(K_\delta(\overset{\frown}{AB})) = [(r+\delta)^2 - (r-\delta)^2]\, \frac{\varphi}{2} + \delta^2\pi =$$
$$= 2r\varphi\delta + \delta^2\pi, \quad \text{pa je}$$
$$l(\overset{\frown}{AB}) = \lim_{\delta \to 0} \frac{2r\varphi\delta + \delta^2\pi}{2\delta} =$$
$$= \lim_{\delta \to 0} \left(r\varphi + \frac{\delta}{2}\pi \right) = r\varphi. \ \blacksquare$$



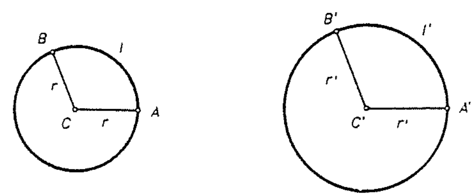
Sl. 177.

KOROLAR 2. *Ako je luk kružnice zadan svojim središnjim kutem $\alpha°$ (u stupnjevima), onda je njegova duljina jednaka $r\pi\alpha/180$.* $\blacksquare$

KOROLAR 3. *Površina kružnog isječka kruga radijusa r koji je omeđen s dva radijusa kružnice i lukom duljine l jednaka je $\frac{1}{2}rl$*

Dokaz. Odmah izlazi iz prethodnog teorema i formule za površinu kružnog isječka $P = \frac{1}{2}r^2\varphi$. $\blacksquare$

Napomena. Iz formule za opseg kružnice $O = 2r\pi$ slijedi da za sve kružnice vrijedi $\frac{O}{2r} = \pi$, pa se u nekim pristupima "Ludolfov broj pi" tako i uvodi. Naime, ako se duljina (opseg) kružnice definira kao $O = \sup\{O_n\}$, gdje je O_n opseg upisanog n-terokuta u kružnicu, onda se lako dokazuje da za svake dvije kružnice k, k' s radijusima r i r' i opsezima O i O' vrijedi $O/2r = O'/2r'$. (Dokažite to dovodeći k i k' u koncentričan položaj i koristeći sličnost.) Isto tako ako su $\overset{\frown}{AB}$ i $\overset{\frown}{A'B'}$ lukovi na tim kružnicama koji imaju istu mjeru u stupnjevima pripadnih središnjih kutova i čije su duljine l i l', onda je $l/r = l'/r'$. Ako je $\overset{\frown}{AB}$ manji luk, onda se l/r zove **mjera kuta** $\sphericalangle BCA$ **u radijanima**.



Sl. 178.

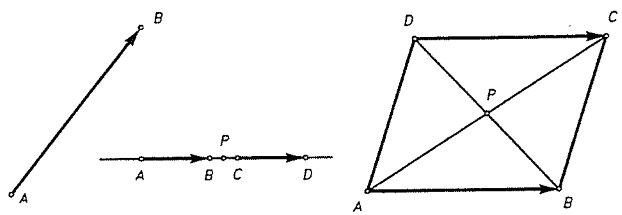
Na kraju svih ovih razmatranja o površini, duljini luka itd., kažimo da se u elementarnoj geometriji najčešće promatraju tzv. **geometrijske figure**, tj. skupovi točaka u ravnini koji imaju površinu, zatim ta figura ima rub, tj. postoji jednostavna zatvorena krivulja koja omeđuje figuru i ta krivulja ima duljinu (ili opseg), te konačno postoji omeđena konveksna ljuska takve figure. Najčešće se te pretpostavke prešutno izostavljaju u srednjoškolskim programima, ali se isto tako pri tom i prešutno pretpostavljaju.

§ 5. Vektori u ravnini

Tendencija suvremene matematike jest da se geometrija zasniva na teoriji vektorskih prostora čiji elementi se zovu **vektori**. U mnogim suvremenim udžbenicima geometrije je tako i učinjeno. Razlog tome je da vektori dopuštaju da se mnogi teoremi iz geometrije mogu time jednostavnije dokazati. Stoga ćemo se sada ukratko upoznati s osnovnim činjenicama tzv. vektorske algebre.

Do pojma vektora dolazimo preko pojma **orijentirane dužine**. Za dužinu $\overline{AB}$ kažemo da je **orijentirana** ako je propisano koja je od njenih krajnjih točaka početna, a koja završna. Drugim riječima, orijentirana dužina je uređen par točaka ravnine. Orijentiranu dužinu kojoj je početak u točki A, a završetak (kraj) u točki B označavat ćemo sa $\overrightarrow{AB}$. Orijentirana dužina $\overrightarrow{AB}$ još nije vektor kao što bi se to moglo pomisliti iz oznake. Do pojma vektora doći ćemo tek onda kad se dogovorimo kada su takve orijentirane dužine jednake. Do toga ćemo doći preko izvjesne relacije ekvivalencije (jednakosti).

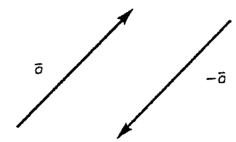
Reći ćemo da su orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ **jednake** ako dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ imaju zajedničko polovište i pisati $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{DC}$. Ako točke A, B, C, D nisu na istom pravcu, to znači da je $ABCD$ paralelogram.



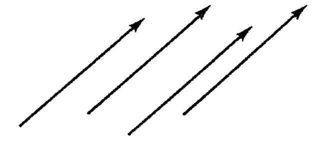
Sl. 179.

Lako se vidi da je relacija $\approx$ relacija ekvivalencije na skupu svih orijentiranih dužina ravnine. Klasa ekvivalencije obzirom na relaciju $\approx$ na skupu orijentiranih dužina zove se **vektor**. Vektor je, dakle, element kvocjentnog skupa $M \times M/_{\approx}$ kojeg ćemo označavati sa V^2. Primijetimo da iz $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{DC}$ slijedi da je $\overrightarrow{AD} \approx \overrightarrow{BC}$.

Klasu ekvivalencije orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ označavat ćemo opet sa $\overrightarrow{AB}$. Klasu ekvivalencije orijentirane dužine $\overrightarrow{AA}$ zvat ćemo **nul-vektor** i označavati sa $\vec{0}$. Za vektor $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, označavat ćemo **suprotni vektor** $\overrightarrow{BA}$ sa $-\vec{a}$ (v. sl. 180). Očito vrijedi $-(-\vec{a}) = \vec{a}$.



Sl. 180.



Sl. 181.

Uočite da jednakost orijentiranih dužina $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{DC}$ intuitivno znači da one imaju jednake duljine, da leže na paralelnim pravcima i da su jednako orijentirane. Stoga su sve orijentirane dužine na sl. 181. reprezentanti jednog te istog vektora.

Za vektore čiji predstavnici leže na paralelnim pravcima, kažemo da su istog **smjera**.

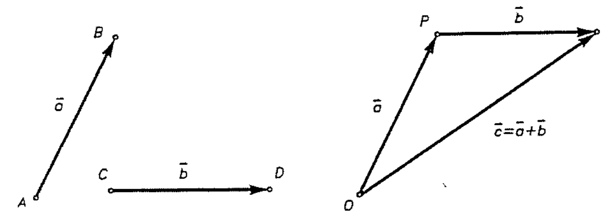
Geometrijski crtež vektora uvijek ćemo stoga predstaviti jednim njegovim reprezentantom. **Duljina** (ili **modul**) **vektora** $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ je duljina $|AB|$ dužine $\overline{AB}$. Specijalno, ako je $|AB| = 1$, kažemo da je $\overrightarrow{AB}$ **jedinični vektor (ort)**. Ako je $d = |AB|$, pisat ćemo da je $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| = d$.

Jedno od osnovnih svojstava vektora je da za svaki vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i svaku točku O ravnine, postoji jedinstvena točka T tako da je $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$. (Točkom B povucite paralelu sa AO, a točkom O paralelu sa AB; one se sijeku u točki T.)

Ako su A, O, B točke istog pravca i ako je O između A i B, onda kažemo da su vektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ **suprotne orijentacije**. Kažimo završno da je vektor potpuno određen svojim modulom, smjerom i orijentacijom.

Operacije zbrajanja vektora i množenja vektora realnim brojem definiraju se pomoću predstavnika klasa.

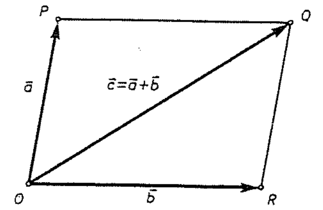
Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva vektora i $O \in M$ bilo koja (čvrsta) točka ravnine. Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{PQ}$. Tada vektor $\overrightarrow{OQ} = \vec{c}$ zovemo **zbroj vektora** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i pišemo $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (sl. 182).



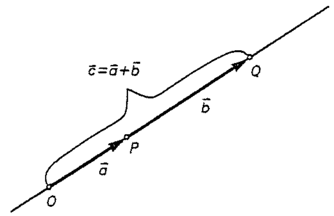
Sl. 182.

Ovo pravilo zbrajanja vektora zovemo **pravilo trokuta**. Uočite da isti rezultat dobijemo i ovako. Uzmemo točku O i konstruiramo točku P tako da je $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$ i točku R, tako da je $\vec{b} = \overrightarrow{OR}$. Tada konstruiramo paralelogram $OPQR$ (sl. 183).

Tada je opet $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OQ}$. Ovaj način zbrajanja vektora zovemo **pravilo paralelograma**.



Sl. 183.



Sl. 184.

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ takvi vektori da su točke O, P, Q kolinearne, onda zbrajanje izgleda kao na sl. 184.

Prema tome, možemo reći da je zbrajanje vektora jedna funkcija $+ : V^2 \times V^2 \to V^2$ dana sa $(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a}+\vec{b}$. Zbrajanje ima ova svojstva. Za svako $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^2$ vrijedi:

1. (asocijativnost) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

2. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$;

3. $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$;

4. (komutativnost) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

Drugim riječima, $(V^2,+)$ je komutativna grupa.

Dokaz ove tvrdnje nije težak (provedite ga sami ili pogledajte neki udžbenik iz linearne algebre).

Za dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in V^2$ se njihova **razlika** definira sa

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

Neka je $\vec{a} \in V^2$ neki vektor i $\lambda \in \mathbf{R}$. Definiramo vektor $\lambda\vec{a}$ kao vektor kojemu je modul jednak $|\lambda|\,|\vec{a}|$, istog je smjera kao i $\vec{a}$ i iste je orijentacije kao i $\vec{a}$ za $\lambda > 0$, a suprotne za $\lambda < 0$. Za $\lambda = 0$ je $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Prema tome, možemo reći da je množenje vektora s realnim brojevima (skalarima) funkcija $\cdot : \mathbf{R} \times V^2 \to V^2$ dana sa $(\lambda, \vec{a}) \mapsto \lambda\vec{a}$. Množenje sa skalarima ima ova svojstva.

Za svako $\vec{a}, \vec{b} \in V^2$ i $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ vrijedi:

5. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;

6. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;

7. $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;

8. $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

Dokažite ova svojstva također sami.

Napomenimo da se svaki skup objekata na kojem imamo operacije $+$ i $\cdot$ za koje vrijedi **1. - 8.** zove realni **vektorski prostor.**

Dva su vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ **linearno nezavisna** ako $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}$ povlači $\lambda=\mu=0$. Inače govorimo o **linearno zavisnim** vektorima.

Lako se vidi da je maksimalni broj linearno nezavisnih vektora u prostoru V^2 jednak 2, pa kažemo da je **dimenzija** od V^2 jednaka 2 i pišemo $\dim V^2 = 2$. Stoga, ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva linearno nezavisna vektora, onda se svaki vektor $\vec{c}$ u ravnini može na jedinstveni način zapisati kao njihova **linearna kombinacija**, tj. postoje jedinstveni $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tako da je

$$\vec{c} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{b}.$$

Pri rješavanju geometrijskih zadataka metodom vektorske algebre korisno je upotrebljavati radijvektore.

Ako je O čvrsta točka ravnine i T bilo koja točka u ravnini, onda vektor $\overrightarrow{OT}$ zovemo **radijvektorom točke** T (obzirom na točku O) i označavamo ga sa $\vec{r}_T$.

Ako su A, B, T tri točke istog pravca i $A \neq B$, onda kažemo da točka T **dijeli orijentiranu dužinu** $\overline{AB}$ **u omjeru** $\lambda \in \mathbf{R}$ ako vrijedi $\overrightarrow{AT} = \lambda\overrightarrow{BT}$. Neka su $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$ radijvektori točaka A i B. Odredimo radijvektor $\vec{r}_T$ točke T koja orijentiranu dužinu dijeli u zadanom omjeru λ. Imamo redom

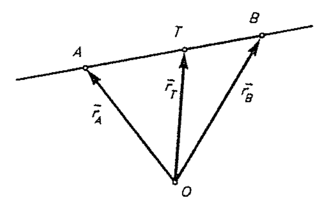
$$\overrightarrow{AT} = \vec{r}_T - \vec{r}_A, \qquad \overrightarrow{BT} = \vec{r}_T - \vec{r}_B,$$

pa zbog $\overrightarrow{AT} = \lambda\overrightarrow{BT}$ imamo

$$\vec{r}_T - \vec{r}_A = \lambda(\vec{r}_T - \vec{r}_B).$$

a odavde je

$$\vec{r}_T = \frac{\vec{r}_A - \lambda\vec{r}_B}{1-\lambda}.$$



Sl. 185.

Posebno za $\lambda = -1$ je T polovište dužine $\overline{AB}$, pa za radijvektor polovišta, kojeg ćemo označiti sa P vrijedi

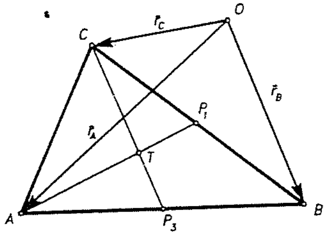
$$\vec{r}_P = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B).$$

Napomena. Uočite da se prijašnja definicija omjera u kojemu točka dijeli zadanu dužinu razlikuje samo po predznaku. Ovdje se međutim radi o orijentiranim dužinama, a osim toga točka T se ne mora nalaziti na dužini $\overline{AB}$. Ako se točka T nalazi na dužini $\overline{AB}$, onda se katkad govori da T **dijeli** $\overline{AB}$ **iznutra**, a ako T nije na $\overline{AB}$, onda se kaže da T **dijeli** $\overline{AB}$ **izvana**. Kod nekih se autora djelišni omjer λ definira formulom $\overrightarrow{AT} = \lambda \cdot \overrightarrow{TB}$.

Primjer 1. Dokažite metodom vektorske algebre teorem o težištu trokuta i izrazite radijvektor težišta pomoću radijvektora vrhova.

Rješenje. Neka je $\triangle ABC$ zadani trokut, P_1, P_2, P_3 polovišta stranica, a O bilo koja točka ravnine. Neka su $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$ radijvektori vrhova. Uzmimo na $\overrightarrow{AP_1}$ točku T koja ju dijeli u omjeru $\lambda = -2$. Tada je radijvektor od T jednak

$$\vec{r}_T = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + 2\vec{r}_{P_1}).$$



Sl. 186.

Kako je $\vec{r}_{P_1} = \frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C)$, to dobivamo da je

$$\vec{r}_T = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C).$$

Ako bismo sada izvršili isti postupak sa $\overrightarrow{BP_2}$ i $\overrightarrow{CP_3}$, dobili bi očito isti rezultat, što znači da sve tri težišnice prolaze istom točkom. ■

Primjer 2. Dokažite da postoji trokut kojemu su stranice paralelne i jednake težišnicama zadanog trokuta. Koristeći taj rezultat konstruirajte trokut kojemu su zadane sve tri težišnice.

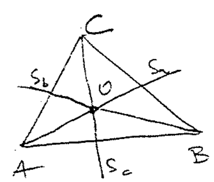
Rješenje. Prema oznakama iz prethodnog primjera imamo

$$\overrightarrow{AP_1} = \vec{r}_{P_1} - \vec{r}_A = \frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C - 2\vec{r}_A),$$

i analogno

$$\overrightarrow{BP_2} = \vec{r}_{P_2} - \vec{r}_B = \frac{1}{2}(\vec{r}_C + \vec{r}_A - 2\vec{r}_B),$$

$$\overrightarrow{CP_3} = \vec{r}_{P_3} - \vec{r}_C = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B - 2\vec{r}_C).$$



Zbrajanjem ovih jednakosti slijedi da je $\overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{BP_2} + \overrightarrow{CP_3} = \vec{0}$. Kako $\overrightarrow{AP_1}, \overrightarrow{BP_2}$ i $\overrightarrow{CP_3}$ nisu kolinearni vektori, iz pravila trokuta za zbrajanje vektora slijedi da traženi trokut postoji.

Uputa za konstrukciju. Prvo konstruirajte trokut kojemu su stranice jednake $2t_a/3$, $2t_b/3$, $2t_c/3$, gdje su t_a, t_b, t_c zadane duljine težišnica. Iz tog se trokuta može lako konstruirati i traženi trokut. ■

Primjer 3. Dokažite da za svaki poligon $A_1, A_2, \ldots, A_n$ postoji jedinstvena točka T za koju je

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{TA_i} = \vec{0}.$$

Rješenje. Neka su $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ radijvektori točaka $A_1, A_2, \ldots, A_n$ obzirom na bilo koju točku O. Tvrdimo da tražena točka T ima radijvektor $\vec{r} = \vec{r}_T$ dan sa

$$\vec{r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i.$$

Očito je $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{TA_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i - \frac{1}{n}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \cdots + \vec{r}_n)\right) = \vec{0}$. Dokažimo da je T jedinstvena točka s tim svojstvom. Neka je i S točka sa svojstvom $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{SA_i} = \vec{0}$. Kako je $\overrightarrow{SA_i} = \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TA_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, to je $\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TA_i}) = \vec{0}$, tj. $\overrightarrow{ST} = -\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{TA_i} = \vec{0}$, pa je $\overrightarrow{ST} = \vec{0}$, tj. $S = T$ (usp. Primjer 2. u § 6.2). ■

Primjer 4. Neka je $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ bilo koji šesterokut. Uočimo težišta trokuta $A_6A_1A_2$, $A_1A_2A_3, \ldots, A_5A_6A_1$. Neka su to redom točke $B_1, B_2, \ldots, B_6$. Dokažite da su u šesterokutu $B_1B_2 \ldots B_6$ nasuprotne stranice paralelne i jednake.

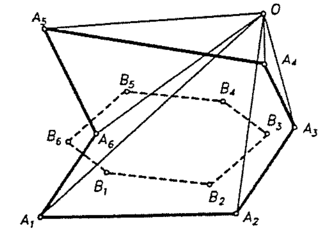
Rješenje. Neka su $\vec{r}_i = \overrightarrow{OA_i}$ radijvektori točaka A_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Tada je

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_6}{3}, \quad \overrightarrow{OB_2} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3}{3}, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{OB_6} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_5 + \vec{r}_6}{3}.$$

Uočimo u šesterokutu $B_1B_2 \ldots B_6$ par nasuprotnih stranica B_1B_2 i B_4B_5. Tada je

$$\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OB_1} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3}{3} - \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_6}{3} = \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_6}{3},$$

$$\overrightarrow{B_5B_4} = \overrightarrow{OB_4} - \overrightarrow{OB_5} = \frac{\vec{r}_3 + \vec{r}_4 + \vec{r}_5}{3} - \frac{\vec{r}_4 + \vec{r}_5 + \vec{r}_6}{3} = \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_6}{3}.$$



Sl. 187.

Stoga je $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_5B_4}$, pa su zaista $\overline{B_1B_2}$ i $\overline{B_5B_4}$ jednake i paralelne. Analogno se dokazuje za ostale parove stranica. ■

Primjer 5. Dokažite vektorski da se simetrale unutarnjih kutova trokuta $\triangle ABC$ sijeku u jednoj točki. Izrazite radijvektor središta upisane kružnice trokutu pomoću radijvektora vrhova i duljina stranica trokuta.

Rješenje. Ako su $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ i $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$ dva linearno nezavisna vektora, izrazimo prvo bilo koji vektor koji ima smjer simetrale kuta $\sphericalangle POQ$. Neka je $\overrightarrow{OE} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ i $\overrightarrow{OF} = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}$.

Neka je R četvrti vrh paralelograma razapetog vektorima $\overrightarrow{OE}$ i $\overrightarrow{OF}$. Tada je $OEFR$ romb i vektor $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ ima smjer simetrale kuta $\sphericalangle POQ$. Dakle, točka T je na simetrali kuta $\sphericalangle POQ$ ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbf{R}$ takav da je

$$\overrightarrow{OT} = \lambda\left(\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} + \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\right).$$

(Uočite da je T unutar kuta ako i samo ako je $\lambda > 0$.) Neka je $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ ($|\overrightarrow{AB}| = c$ itd.). Neka se simetrale unutarnjih kutova pri A i B sijeku u točki U. Tada prema prethodnom postoje $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ takvi da je

$$\overrightarrow{AU} = \lambda\left(\frac{\vec{c}}{c} - \frac{\vec{b}}{b}\right), \quad \overrightarrow{BU} = \mu\left(\frac{\vec{a}}{a} - \frac{\vec{c}}{c}\right).$$

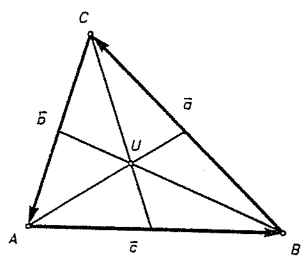
Odredimo λ i μ. Uvrstimo li ove jednakosti u $\overrightarrow{AU} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BU}$, dobivamo

$$\lambda\left(\frac{\vec{c}}{c} - \frac{\vec{b}}{b}\right) = \vec{c} + \mu\left(\frac{\vec{a}}{a} - \frac{\vec{c}}{c}\right).$$

Zbog $\vec{a} = -\vec{b} - \vec{c}$ vrijedi

$$\lambda\left(\frac{\vec{c}}{c} - \frac{\vec{b}}{b}\right) = \vec{c} + \mu\left(-\frac{\vec{b}}{a} - \frac{\vec{c}}{a} - \frac{\vec{c}}{c}\right).$$

Odavde je $\dfrac{\lambda}{c} = 1 - \mu\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}\right)$, $\dfrac{\lambda}{b} = \dfrac{\mu}{a}$, pa slijedi



Sl. 188.

$$\lambda = \frac{bc}{a+b+c}, \quad \mu = \frac{ac}{a+b+c}.$$

Dakle je

$$\overrightarrow{AU} = \frac{b\vec{c} - c\vec{b}}{a+b+c}, \quad \overrightarrow{BU} = \frac{c\vec{a} - a\vec{c}}{a+b+c}.$$

Ako sada označimo sa U' sjecište simetrala unutarnjih kutova kod vrhova B i C na sasvim analogan način dobit ćemo

$$\overrightarrow{BU'} = \frac{c\vec{a} - a\vec{c}}{a+b+c}, \quad \overrightarrow{CU'} = \frac{a\vec{b} - b\vec{a}}{a+b+c}.$$

Odavde slijedi da je $\overrightarrow{BU} = \overrightarrow{BU'}$, pa je $U = U'$, pa se zaista sve tri simetrale sijeku u jednoj točki. Nadalje

$$\vec{r}_U = \vec{r}_A + \overrightarrow{AU} = \vec{r}_A + \frac{b\vec{c} - c\vec{b}}{a+b+c} = \vec{r}_A + \frac{b(\vec{r}_B - \vec{r}_A) - c(\vec{r}_A - \vec{r}_C)}{a+b+c},$$

pa je konačno

$$\vec{r}_U = \frac{a\vec{r}_A + b\vec{r}_B + c\vec{r}_C}{a+b+c}.$$

Uočite da smo mogli (i bez U') zaključiti da se simetrale sijeku u jednoj točki naprosto iz simetričnosti formule za $\vec{r}_U$. ■

Primjer 6. (**Hlawkina nejednakost**) Dokažite da za proizvoljna tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vrijedi

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \geq |\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{b} + \vec{c}| + |\vec{c} + \vec{a}|.$$

Dokaz. Vrijedi sljedeći identitet (provjerite ga):

$$\begin{aligned}(|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| - |\vec{a}+\vec{b}| - |\vec{b}+\vec{c}| - |\vec{c}+\vec{a}| + |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|) \cdot (|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|) = \\ = (|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{a}+\vec{b}|) \cdot (|\vec{c}| - |\vec{a}+\vec{b}| + |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|) + \\ +(|\vec{b}| + |\vec{c}| - |\vec{b}+\vec{c}|) \cdot (|\vec{a}| - |\vec{b}+\vec{c}| + |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|) + \\ +(|\vec{c}| + |\vec{a}| - |\vec{c}+\vec{a}|) \cdot (|\vec{b}| - |\vec{c}+\vec{a}| + |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|).\end{aligned}$$

Na desnoj strani su svi sumandi nenegativni zbog nejednakosti trokuta, pa je stoga takav i prvi faktor na lijevoj strani. Odatle slijedi tvrdnja. ■

Spomenimo ovdje da nam u geometriji vektori do punog izražaja dolaze tek uvođenjem skalarnog produkta. S tim u vezi imamo ovu definiciju.

Euklidska vektorska ravnina M je dvodimenzionalni vektorski prostor M nad $\mathbf{R}$ zajedno s preslikavanjem $\varphi : M \times M \to \mathbf{R}$ koje je bilinearno (tj. linearno u svakoj varijabli), simetrično (tj. $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$, $\forall x, y \in M$) i pozitivno definitno (tj. $\varphi(x,x) > 0$, $\forall x \in M$, $x \neq 0$).

Broj $\varphi(x,y)$ se najčešće označava sa $(x|y)$ i zove **skalarni produkt** vektora x i y. **Norma** $\|x\|$ vektora x je broj $\sqrt{\varphi(x,x)} = \sqrt{(x|x)}$. Ako je $(x|y) = 0$ kažemo da su vektori x i y **okomiti** ili **ortogonalni**.

Standardni primjer euklidske ravnine je $M = \mathbf{R}^2$ sa $\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$. No, o tome će biti više riječi u poglavljima Trigonometrija i Analitička geometrija.

§ 6. Neka preslikavanja ravnine

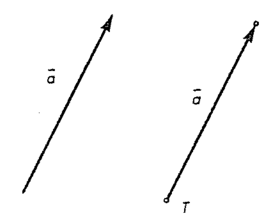
6.1. Translacije

Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ neki čvrsti vektor u ravnini M. **Translacija** $t_{\vec{a}}$ ravnine M za vektor $\vec{a}$ je preslikavanje $t_{\vec{a}} : M \to M$ koje točki $T \in M$ pridružuje točku $T' = t_{\vec{a}}(T) \in M$, tako da je $\overrightarrow{TT'} = \vec{a}$.

Iz definicije neposredno slijedi da je svaka translacija izometrija ravnine, i da vrijedi

$$t_{\vec{a}} \circ t_{\vec{b}} = t_{\vec{a}+\vec{b}}, \quad t_{-\vec{a}} = (t_{\vec{a}})^{-1} \quad \text{i} \quad t_{\vec{0}} = 1_M.$$

Stoga je skup svih translacija ravnine obzirom na kompoziciju komutativna grupa.



Sl. 189.

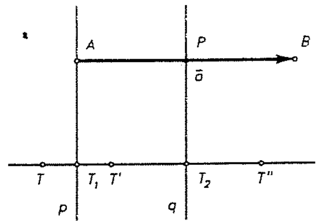
PROPOZICIJA 1. *a) Translacija ravnine preslikava pravac na paralelni pravac;*
b) Translacija $t_{\vec{a}}$ ravnine M za vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ je kompozicija osnih simetrija s_p i s_q obzirom na paralelne pravce p i q koji su okomiti na dužinu $\overline{AB}$, pri čemu je $A \in p$, a polovište P dužine $\overline{AB}$ leži na q.

Dokaz. a) je očito.
b) Paralela sa AB kroz $T \in M$ siječe p u T_1, a q u T_2. Neka je $s_p(T) = T'$, $s_q(T') = T''$. Tada je

$$\overrightarrow{TT''} = \overrightarrow{TT_1} + \overrightarrow{T_1T'} + \overrightarrow{T'T_2} + \overrightarrow{T_2T''} =$$
$$= 2\overrightarrow{T_1T'} + 2\overrightarrow{T'T_2} = 2\overrightarrow{T_1T_2} =$$
$$= 2\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}.$$

Stoga je $\overrightarrow{TT''} = \vec{a}$, pa je $t_{\vec{a}}(T) = T'' = s_q(T') = s_q(s_p(T))$, tj.

$$t_{\vec{a}} = s_q \circ s_p. \ \blacksquare$$



Sl. 190.

6.2. Rotacije i izometrije

Podsjetimo da smo rotaciju ravnine M definirali kao izometriju s jedinstvenom fiksnom točkom O ili 1_M (v. §1.3). Nadalje smo vidjeli da za svaki par polupravaca Ox i Oy, postoji jedinstvena rotacija oko O koja prevodi Ox u Oy. Ako je $\alpha = \sphericalangle xOy$, onda rotaciju r za koju je $r(Ox) = Oy$ zovemo **rotacijom za kut** α. Kako je i r^{-1} rotacija i $r^{-1}(Oy) = Ox$, tu ćemo rotaciju zvati rotacijom za kut $-\alpha$. S tim u vezi proširuje se i pojam kuta, pa na taj način moramo razlikovati kut $\sphericalangle xOy$ i $\sphericalangle yOx$. Ako $\sphericalangle xOy$ ima mjeru α, onda ćemo reći da $\sphericalangle yOx$ ima mjeru $-\alpha$. Ta su pitanja u vezi s orijentacijom ravnine i orijentiranim kutom, a ta će pitanja biti preciznije tretirana u poglavlju o analitičkoj geometriji ravnine.

Intuitivno, međutim, možemo reći da rotacija r oko O u pozitivnom smislu za kut α pridružuje točki $T \in M$ ($T \neq O$) točku $T' \in M$ ovako. Kroz T provucimo kružnicu k s centrom u O. Gibanjem po kružnici k u smislu obrnutim od gibanja kazaljke na satu, točka T prelazi u T', tako da je središnji kut $\sphericalangle TOT' = \alpha$. Još se definira $r(O) = O$. Analogno se uvodi i rotacija ravnine M oko točke O za kut α u negativnom smislu. O je središte, a α kut rotacije r. Ta se rotacija katkad bilježi sa $r(O,\alpha)$. Vrijedi $r(O,\alpha) \circ r(O,\beta) = r(O,\alpha+\beta)$. (Pri tom, podrazumijevamo $\alpha + \beta = (\alpha+\beta) \bmod 2\pi$.)

Ranije smo dokazali da je svaka rotacija $r : M \to M$ kompozicija dviju osnih simetrija kojima se osi sijeku u centru rotacije i pri tome smo jednu od osi mogli odabrati proizvoljno. Nadalje, u prethodnoj točki smo vidjeli da je i svaka translacija također kompozicija dviju osnih simetrija s paralelnim osima i pri tom smo jednu od osi mogli također birati proizvoljno, ali tako da je okomita na vektor translacije. Stoga **osnovni teorem o izometrijama** (vidi §1.3. Teorem 4), možemo sada preformulirati ovako (dokažite ga sami!).

TEOREM 1. *Svaka izometrija $f : M \to M$ dopušta jedinstveni prikaz oblika $f = t \circ s_p$ ili $f = t \circ r$, gdje su t translacija, s_p osna simetrija, a r rotacija ravnine M.* $\blacksquare$

6.3. Homotetije ravnine

Preslikavanje $h : M \to M$ je **homotetija** ravnine M s **koeficijentom** homotetije $k \neq 0$ i **središtem** $O \in M$, ako je $\overrightarrow{OT'} = k \cdot \overrightarrow{OT}$, gdje je $h(T) = T'$. Katkad pišemo $h = h(O,k)$.

PROPOZICIJA 2. *Homotetija h ravnine je bijekcija.*

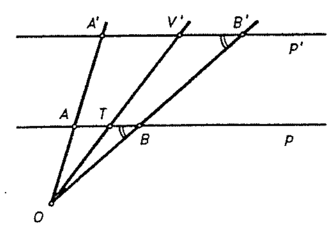
Dokaz. Injektivnost. Neka su $P, Q \in M$, $P \neq Q$ i $P' = h(P)$, $Q' = h(Q)$. Tada je $\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OQ} - k\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{PQ}$, pa je $\overrightarrow{P'Q'} \neq \vec{0}$ i stoga $P' \neq Q'$. Surjektivnost. Neka je $B \in M$. Tada uzmemo točku A određenu s $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OB}$. Označimo li $A' = h(A)$, imamo

$$\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow A' = B, \quad \text{tj.} \quad B = h(A). \ \blacksquare$$

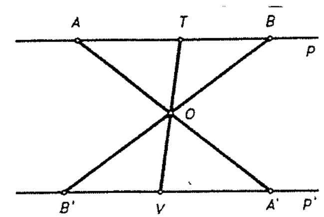
TEOREM 2. *Homotetija $h : M \to M$ ravnine M bijektivno preslikava svaki pravac $p \subset M$ na pravac $p' \subset M$ paralelan sa p. Ako p sadrži središte homotetije, onda je $p = p'$. Homotetija h svaku dužinu $\overline{AB}$ bijektivno preslikava na dužinu $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$.*

Dokaz. Neka je $h = h(O,k)$. Uzmimo prvo pravac $p \subset M$ koji prolazi kroz O. Očito je $h(p) \subseteq p$. Neka je $B \in p$. Tada za točku A, $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OB}$ imamo $A \in p$ i $B = h(A)$, pa je $h(p) = p$.

Neka sada p ne prolazi točkom O. Neka su $A, B \in p$, $A \neq B$. Neka je p' pravac $A'B'$, $A' = h(A)$, $B' = h(B)$. Neka je $T \in \overline{AB}$ i neka pravac OT siječe p' u V. Tada je $\triangle OBT \sim \triangle OB'V$ (K-K-K), pa je $|OV| : |OT| = |OB'| : |OB| = k$. Tada je $|OV| = k|OT|$ i vektori $\overrightarrow{OT}$ i $\overrightarrow{OV}$ imaju isti smjer, pa je $\overrightarrow{OV} = k\overrightarrow{OT}$. Za točku $T' = h(T)$, imamo $\overrightarrow{OT'} = k\overrightarrow{OT}$. Stoga je $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OT'}$ i konačno $V = T' = h(T)$.



Sl. 191.

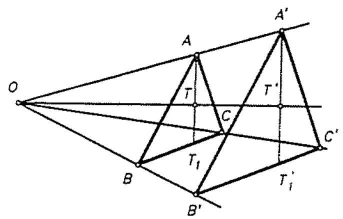


Sl. 192.

Kada točka T prolazi dužinu $\overline{AB}$ od A prema B, pripadna točka $T' = V$ prolazi dužinu $\overline{A'B'}$ od A' prema B'. Stoga h preslikava dužinu $\overline{AB}$ na dužinu $\overline{A'B'}$. Kako je $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, slijedi da je $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, pa stoga i $p \parallel p'$. Budući je $\overline{AB}$ proizvoljna dužina na p, slijedi da h bijektivno preslikava p na p'. Ovo je bio slučaj $k > 0$. Ako je $k < 0$, onda (v. sl. 192) imamo $\Delta OBT \sim \Delta OB'V$, pa je $|OV| : |OT| = |OB'| : |OB| = -k$. Budući su $\overrightarrow{OT}$ i $\overrightarrow{OV}$ suprotnog smjera slijedi $\overrightarrow{OV} = k\overrightarrow{OT}$, pa tvrdnja dalje slijedi kao u prvom dijelu. ■

TEOREM 3. *Homotetija $h : M \to M$ preslikava svaki trokut ΔABC ravnine M na $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$.*

Dokaz. Prema prethodnom teoremu $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$ pa je $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. h bijektivno preslikava BC na $B'C'$, CA na $C'A'$, AB na $A'B'$. Neka je T unutarnja točka u ΔABC i neka je $AT \cap BC = T_1$ i $T_1' = h(T_1) \in \overline{B'C'}$. Tada h bijektivno preslikava $\overline{AT_1}$ na $\overline{A'T_1'}$. Zato kad T prolazi kroz $\overline{AT_1}$, T' prođe dužinu $\overline{A'T_1'}$. Stoga h preslikava bijektivno trokut ΔABC na $\Delta A'B'C'$. ■



Sl. 193.

TEOREM 4. *Neka su $h_a = h(A, a)$, $h_b = h(B, b) : M \to M$ dvije homotetije. Tada je $f = h_b \circ h_a$ homotetija ili translacija od M. Ako je $ab \neq 1$, onda je f homotetija s koeficijentom ab. Ako je $ab = 1$, onda je f translacija.*

Dokaz. Ako je $ab = 1$, onda za vektor $\vec{d} = (1-b)\overrightarrow{AB}$ i za $T' = f(T) = h_b h_a(T)$ imamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{TT'} &= \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{Bh_b(h_a(T))} = \overrightarrow{TB} + b\overrightarrow{Bh_a(T)} = \overrightarrow{TB} + b\cdot\overrightarrow{BA} + b\cdot\overrightarrow{Ah_a(T)} = \\ &= \overrightarrow{TB} + b\cdot\overrightarrow{BA} + ba\cdot\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB} + b\cdot\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + b\cdot\overrightarrow{BA} = \\ &= (1-b)\overrightarrow{AB} = \vec{d},\end{aligned}$$

pa je f translacija za vektor $\vec{d}$.

Ako je $A = B$, onda je $\vec{d} = \vec{0}$, pa je $f = 1_M$ identiteta na M, pa iz $ab = 1$ i $h_b \circ h_a = 1_M$ slijedi $h_b = (h_a)^{-1}$. Dakle je $h_{1/a} = (h_a)^{-1}$.

Neka je sada $ab \neq 1$. Neka je točka O takva da je $\overrightarrow{OA} = \dfrac{1-b}{1-ab}\overrightarrow{BA}$. Tada imamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT'} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{Bh_b(h_a(T))} = \overrightarrow{OB} + b\overrightarrow{Bh_a(T)} = \overrightarrow{OB} + b\cdot\overrightarrow{BA} + b\cdot\overrightarrow{Ah_a(T)} = \\ &= \overrightarrow{OB} + b\cdot\overrightarrow{BA} + b\cdot\overrightarrow{Ah_a(T)} = \overrightarrow{OB} + b\cdot\overrightarrow{BA} + ba\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \\ &+ b\cdot\overrightarrow{BA} + ab\cdot\overrightarrow{AO} + ab\overrightarrow{OT} = (1-ab)\overrightarrow{OA} + (b-1)\overrightarrow{BA} + ab\cdot\overrightarrow{OT} = \\ &= ab\cdot\overrightarrow{OT}.\end{aligned}$$

Dakle, $f = h_b \circ h_a$ je homotetija sa središtem O i koeficijentom ab. Ako je $A \neq B$, onda O leži na pravcu AB. ■

KOROLAR 1. *Ako su $h_a = h(O, a)$, $h_b = h(O, b) : M \to M$ homotetije s centrom O, onda je to i $h_a \circ h_b$ i vrijedi $h_a \circ h_b = h_{ab} = h(O, ab)$.* ■

SLIJEDA

6.4. Preslikavanje sličnosti

Preslikavanje $f : M \to M$ je **preslikavanje sličnosti** (ili **ekviformno preslikavanje**) ako postoji broj $s > 0$ takav da je $|f(P)f(Q)| = s|PQ|$, za svako $P, Q \in M$. Broj s se zove **koeficijent sličnosti**.

TEOREM 5 (o sličnosti). 1. *Izometrija je preslikavanje sličnosti s koeficijentom sličnosti 1.*

2. *Homotetija h_k s koeficijentom k je preslikavanje sličnosti s koeficijentom $s = |k|$.*
3. *Kompozicija homotetije h_k i izometrije je preslikavanje sličnosti s koeficijentom $s = |k|$.*
4. *Svako preslikavanje sličnosti s koeficijentom s je kompozicija homotetije h_s (koeficijent homotetije s) i jedne izometrije.*

Dokaz. Tvrdnje **1**, **2**, **3** dokazujemo istovremeno. Neka je $g : M \to M$ izometrija, $h_k = h(O, k) : M \to M$ homotetija i za svaku točku $T \in M$ neka je $T_k = h_k(T)$. Neka je kompozicija $g \circ h_k = f$. Za bilo koje točke $A, B \in M$ tada imamo

$$|f(A)f(B)| = |g(A_k)g(B_k)| = |A_kB_k| = |k\overrightarrow{AB}| = |k|\,|\overrightarrow{AB}| = s|AB|,$$

gdje je $s = |k|$, pa je f preslikavanje sličnosti s koeficijentom $s = |k|$, čime je **3** dokazano. Ako je $k = 1$, tj. $h_k = 1_M$, slijedi da je $f = g$, čime je **1** dokazano, a ako je $g = 1_M$, onda je $f = h_k$, pa slijedi **2**.

Dokažimo **4**. Neka je $f : M \to M$ preslikavanje sličnosti s koeficijentom sličnosti s, tj. $|P'Q'| = s|PQ|$, $\forall P, Q \in M$ ($P' = f(P)$, $Q' = f(Q)$). Neka je $O \in M$ bilo koja točka, a $h : M \to M$ homotetija, $h = h(O, 1/s)$, tj. za $T \in M$, $T_0 = h(T)$,

$$\overrightarrow{OT_0} = \frac{1}{s}\overrightarrow{OT} \qquad (*)$$

Stavimo $g = f \circ h$. Neka su $A, B \in M$. Tada imamo

$$|g(A)g(B)| = |f(A_0)f(B_0)| = s|A_0B_0| = s|\overrightarrow{A_0B_0}| = s|\frac{1}{s}\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB}| = |AB|.$$

Dakle, g je izometrija. Iz $(*)$ slijedi da je $h \circ h_s = h_s \circ h = 1_M$, gdje je $h_s = h(O, s) : M \to M$ homotetija s centrom O i koeficijentom s. Sada za svaku točku $P \in M$ imamo

$$(g \circ h_s)(P) = (f \circ h)[h_s(P)] = f[(h \circ h_s)(P)] = f(P),$$

pa je

$$f = g \circ h_s. \ ■$$

KOROLAR 2. *Preslikavanje sličnosti $f : M \to M$ bijektivno preslikava pravac $p \subset M$ na pravac $p' \subset M$, dužinu $\overline{AB} \subset M$ na dužinu $\overline{A'B'} \subset M$. Nadalje, ono paralelne pravce preslikava na paralelne pravce, tj. $p_1 \parallel p_2 \Rightarrow f(p_1) \parallel f(p_2)$. Ako je $\alpha = \sphericalangle(p_1, p_2)$, onda je $\sphericalangle(f(p_1), f(p_2)) = \alpha$, tj. f čuva kutove.* ■

KOROLAR 3. *Neka su $\Delta = \Delta ABC$ i $\Delta' = \Delta A'B'C'$ dva trokuta u ravnini M. Tada su oni slični, tj. $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ ako i samo ako postoji preslikavanje sličnosti $f : M \to M$, tako da je $f(\Delta) = \Delta'$.* ■

Tvrdnja iz Korolara 3 vrijedi i za konveksne n-terokute. Podsjetimo da su po definiciji dva takva poligona $A_1A_2 \ldots A_n$ i $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ **slična** ako je $\alpha_1 = \alpha'_1, \alpha_2 = \alpha'_2, \ldots, \alpha_n = \alpha'_n$ i $\frac{a_1}{a'_1} = \frac{a_2}{a'_2} = \ldots = \frac{a_n}{a'_n}$. Tada vrijedi

KOROLAR 4. *Dva su konveksna n-terokuta Π i Π' slična ako i samo ako postoji preslikavanje sličnosti $f : M \to M$, tako da je $f(\Pi) = \Pi'$.* ■

Općenito se kaže da su dva skupa $S, S' \subseteq M$ **slična** i piše $S \sim S'$, ako postoji preslikavanje sličnosti $f : M \to M$, tako da je $f(S) = S'$.

TEOREM 6. *(a) Ako je $f_i : M \to M$ preslikavanje sličnosti s koeficijentom s_i, $i = 1, 2$, onda je i $f = f_2 \circ f_1$ preslikavanje sličnosti s koeficijentom s_1s_2.*
(b) Ako je $f : M \to M$ preslikavanje sličnosti s koeficijentom s, onda je i $f^{-1} : M \to M$ preslikavanje sličnosti s koeficijentom $1/s$.
Stoga sva preslikavanja sličnosti čine grupu.

Dokaz. (a) Neka su $A, B \in M$ i neka je $A_1 = f_1(A)$, $B_1 = f_1(B)$. Imamo

$$|f(A)f(B)| = |f_2(A_1)f_2(B_1)| = s_2|A_1B_1| = s_2|f_1(A)f_1(B)| = s_2s_1|AB|.$$

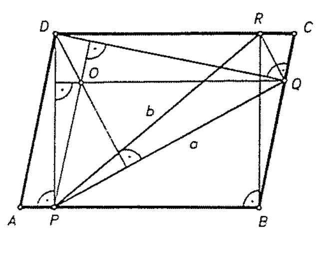
(b) Prema prethodnom Teoremu, f se može zapisati kao $f = g \circ h_s$, gdje je g izometrija, a h_s homotetija s koeficijentom s. Tada je $f^{-1} = h_s^{-1} \circ g^{-1}$. No, g^{-1} je izometrija, a $h_s^{-1} = h_{1/s}$. Sada tvrdnja izlazi iz prethodnog teorema i tvrdnje (a). ■

Sljedećim primjerima dajemo neke primjene ovih transformacija.

Primjer 1. Iz vrha D paralelograma $ABCD$ povučene su visine DP i DQ. Zadano je $|PQ| = a$ i $|BD| = b$. Izračunajte udaljenost od D do ortocentra trokuta ΔDPQ.

Rješenje. Neka je O ortocentar ΔDPQ. Četverokut $OPBQ$ je paralelogram, jer je $QO \perp DP$ i $PO \perp DQ$, pa je $OQ \| PB$ i $OP \| BQ$. Stoga translacijom $t_{\overrightarrow{OQ}}$ za vektor $\overrightarrow{OQ}$, točka P prelazi u točku B, a točka D u neku točku R. Kako je $RB \| DP$, to je $DPBR$ pravokutnik i $|PR| = |BD| = b$. Nadalje je $DO \perp PQ$, $RQ \perp PQ$. Također je $|RQ| = |DO|$.

U pravokutnom trokutu ΔPQR poznata je hipotenuza $|PR| = b$ i kateta $|PQ| = a$. Stoga je $|DO| = |RQ| = \sqrt{b^2 - a^2}$. ■



Sl. 194.

Primjer 2. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vrhovi pravilnog n-terokuta, a O njegovo središte. Dokažite da je $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$.

Rješenje. Neka je $r = r\left(O, \frac{360°}{n}\right)$ rotacija oko O za $\frac{360°}{n}$. Tom rotacijom očito poligon prelazi u sama sebe, pa $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}$ ostaje nepromijenjen. No to je moguće samo tako da je ta suma nul vektor. ■

Primjer 3. Na kružnici $k(O, r)$ je zadana točka X i vrhovi $A_1A_2 \ldots A_n$ pravilnog n-terokuta. Dokažite da i točke koje su simetrične točki X obzirom na pravce $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ čine vrhove pravilnog n-terokuta.

Rješenje. Lako je dokazati sljedeću tvrdnju. Neka su p i q pravci koji se sijeku u točki O. Neka je $r(O, \alpha) : M \to M$ rotacija koja prevodi p u q. Tada je $s_q \circ s_p = r(O, 2\alpha)$.

Sada označimo osne simetrije obzirom na pravce $OA_1, \ldots, OA_n$ sa $s_1, \ldots, s_n$. Neka je $X_k = s_k(X)$, $k = 1, \ldots, n$. Dovoljno je dokazati da nekom rotacijom oko O skup $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ prelazi u samog sebe. Jasno je da je

$$(s_{k+1} \circ s_k)(X_k) = (s_{k+1} \circ s_k \circ s_k)(X) = X_{k+1}.$$

No preslikavanje $s_{k+1} \circ s_k$ je rotacija $r(O, 4\pi/n)$. Uočite da se za n paran dobiva $n/2$-terokut. ■

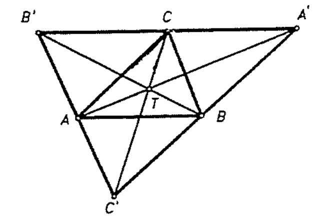
Primjer 4. (Eulerov pravac) Središte opisane kružnice S trokuta ΔABC, ortocentar O i težište T trokuta leže na jednom pravcu koji se zove **Eulerov pravac**. Težište T leži između O i S i vrijedi

$$|OT| = 2|TS|.$$

Dokaz. Vrhovima trokuta ABC povucimo paralele s nasuprotnim stranicama. Tako dobijemo $\Delta A'B'C'$. Očito homotetija ravnine $h = h(T, -2) : M \to M$ s centrom T i koeficijentom -2 prevodi ΔABC na trokut $\Delta A'B'C'$. Za svaku točku $X \in M$ vrijedi

$$\overrightarrow{X'T} = -2\overrightarrow{XT} \quad (X \in M,\ X' = h(X)).$$

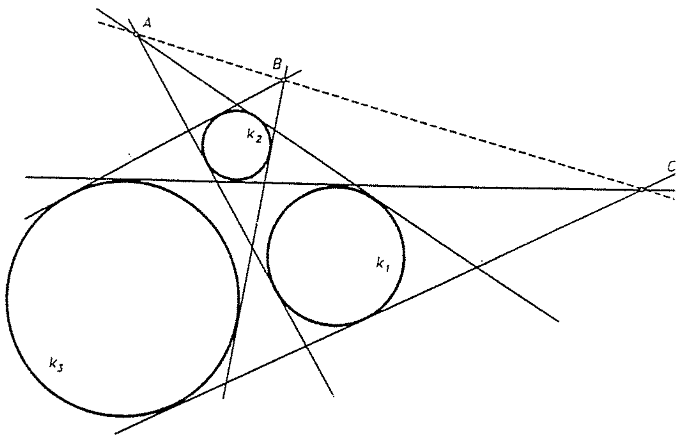
Opisana kružnica oko ΔABC prelazi tom homotetijom u kružnicu opisanu oko $\Delta A'B'C'$ sa središtem $S' = h(S)$. Kako je ortocentar O trokuta ΔABC ujedno i središte opisane kružnice trokuta $\Delta A'B'C'$, to je $S' = O$, pa gornja relacija za $X = S$ postaje $\overrightarrow{OT} = -2\overrightarrow{ST}$. Odavde slijedi da O, T i S leže na pravcu i da je $|OT| = 2|ST|$ i da je T između točkaka O i S. ■



Sl. 195.

Primjer 5. Neka su k_1, k_2 i k_3 tri kružnice u ravnini različitih radijusa. Neka su AD i AE zajedničke vanjske tangente od k_1 i k_2, BF i BG zajedničke vanjske tangente od k_2 i k_3, a CH i CK zajedničke vanjske tangente od k_1 i k_3. Dokažite da su točke A, B i C kolinearne.

Rješenje. A je centar homotetije h_1 koja prevodi k_1 u k_2. Točka B je centar homotetije h_2 koja prevodi k_2 u k_3. Kompozicija $h_2 \circ h_1$ prevodi k_1 u k_3 i njen centar leži



Sl. 196.

na pravcu AB. S druge strane jasno je da je C centar homotetije koja prevodi k_1 u k_3, pa C leži na pravcu AB. ■

Primjer 6. (**Kružnica "9 točaka" trokuta**) Nožišta visina trokuta, polovišta stranica i polovišta dužina koje spajaju vrhove i ortocentar trokuta leže na jednoj kružnici (kružnica "9 točaka").

Dokaz. Neka je O ortocentar trokuta $\triangle ABC$, $\overline{AA_2}, \overline{BB_2}, \overline{CC_2}$ visine trokuta, A_1, B_1, C_1 polovišta dužina $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}$, a A_3, B_3, C_3 polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$.

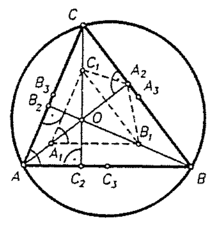
Prvo, $\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle BAC$ (kutovi s paralelnim kracima). Nadalje, $\triangle B_1A_2C_1 \cong \triangle B_1OC_1$ (osno simetrični obzirom na B_1C_1). Stoga je

$$\sphericalangle B_1A_2C_1 = \sphericalangle B_1OC_1 = 180^\circ - \sphericalangle B_1A_1C_1,$$

pa dakle, točke A_1, B_1, A_2, C_1 leže na istoj kružnici (teorem o tetivnom četverokutu). Na isti se način vidi da je

$$\sphericalangle B_1A_3C_1 = \sphericalangle B_1OC_1 = 180^\circ - \sphericalangle B_1A_1C_1,$$

tj. da točke A_1, B_1, A_3, C_1 također leže na istoj kružnici. Odatle slijedi da svih 9 točaka o kojima je riječ leže na jednoj kružnici.



Sl. 197.

Primijetimo da je kružnica "9 točaka" homotetična opisanoj kružnici trokutu ABC s centrom homotetije u O, a koeficijentom $1/2$ (to je stoga jer ta homotetija prevodi $\triangle ABC$ u $\triangle A_1B_1C_1$). Također primijetimo da je kružnica "9 točaka" homotetična s opisanom kružnicom, ali s centrom u težištu trokuta i koeficijentom $-1/2$ (to je stoga što tom homotetijom $\triangle ABC$ prelazi u $\triangle A_3B_3C_3$). ■

Primjer 7. a) Neka je O ortocentar trokuta $\triangle ABC$, D polovište jedne njegove stranice, a K sjecište pravca OD s opisanom kružnicom (D leži između O i K). Dokažite da je D polovište dužine $\overline{OK}$.

b) Neka je T težište trokuta $\triangle ABC$, E nožište jedne njegove visine, F jedno od sjecišta pravca TE s opisanom kružnicom (T leži između E i F). Dokažite da je $|TF| = 2|TE|$.

Rješenje. a) Tvrdnja slijedi iz činjenica da D leži na kružnici "9 točaka", a ta je kružnica homotetična s opisanom kružnicom čiji je centar homotetije u O, a koeficijent $1/2$.
b) Slijedi slično (vidi Primjer 6). ■

6.5. Inverzija

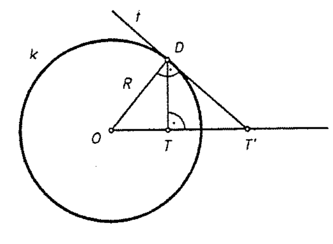
Sve transformacije ravnine koje smo do sada promatrali, preslikavale su pravce u pravce, a kružnice u kružnice. Sada ćemo se upoznati s jednim preslikavanjem posve drugog tipa koje skup pravaca i kružnica opet preslikava u taj skup, ali pri tome se pravac može preslikati ili u pravac ili u kružnicu. U tome i drugim značajnim svojstvima te transformacije sastoji se njezina efikasnost pri rješavanju raznih geometrijskih problema, a osobito u geometriji kružnice. To se preslikavanje počelo intenzivno proučavati oko 1830. g.

Neka je M ravnina i $O \in M$ čvrsta točka, a $R > 0$ zadani pozitivan broj. Preslikavanje

$$\mathcal{I}_O : M \setminus \{O\} \to M \setminus \{O\}, \quad T \mapsto T' = \mathcal{I}_O(T),$$

zove se **inverzija s centrom** O **i radijusom** $R > 0$, ako su točke O, T i T' kolinearne, T i T' s iste strane točke O i ako vrijedi $|OT| \cdot |OT'| = R^2$.

Očito je $\mathcal{I}_O \circ \mathcal{I}_O = \mathrm{id}$ (tj. $\mathcal{I}_O$ je involucija), pa je stoga $\mathcal{I}_O$ bijekcija. Kružnica $k = k(O, R)$ se zove **kružnica inverzije** $\mathcal{I}_O$. Očito je svaka točka kružnice inverzije fiksna točka te inverzije i to su jedine njene fiksne točke.



Sl. 198.

Inverzija je zadana kružnicom inverzije $k(O, R)$. Stoga je inverzija potpuno određena s centrom O i radijusom R, pa ju zapisujemo kao $\mathcal{I}_O^R$, odnosno, samo kao $\mathcal{I}_O$ ako nam radijus nije važan. Pokažimo kako se konstruira slika T' neke točke T. Neka je prvo T unutar kružnice inverzije $k = k(O, R)$. Na spojnicu OT u točki T podignimo okomicu i neka je D jedno od sjecišta te okomice sa k. U točki D povucimo tangentu t na k. Tada je sjecište pravca OT sa t točka T' pridružena točki T tom inverzijom. To slijedi iz sličnosti $\triangle OTD \sim \triangle ODT'$ (v. sl. 198). Naime,

$$\frac{|OT'|}{R} = \frac{R}{|OT|} \Rightarrow |OT| \cdot |OT'| = R^2.$$

Ako je pak T vanjska točka od k, onda se iz T povuče jedna od tangenata na k i iz njenog dirališta D spusti okomica na OT. Sjecište T' te okomice s OT je tada slika točke T. Očito inverzija unutrašnjost kružnice k preslikava u njenu vanjštinu i obratno.

PROPOZICIJA 3. *Neka je $p \subset M$, pravac kroz centar O inverzije $\mathcal{I}_O$. Tada je $\mathcal{I}_O(p \setminus \{O\}) = p \setminus \{O\}$. Drugim riječima, pravac kroz O preslikava se inverzijom u taj isti pravac.*

Dokaz. Napomenimo najprije da strogo govoreći ne smijemo kazati da se pravac kroz O preslikava u pravac kroz O, već treba kazati da se pravac kroz O bez točke O preslikava na samog sebe, no mi ćemo ipak kraće (ali ne sasvim precizno) govoriti da se pravac kroz O preslikava na samog sebe. Dokaz je neposredna posljedica činjenice da O, T, T' moraju biti kolinearni i da je $\mathcal{I}_O$ bijekcija. ■

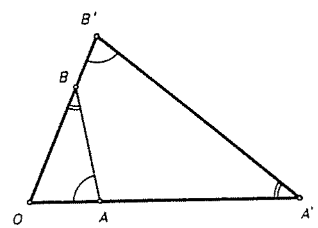
PROPOZICIJA 4. *Neka su A, A' i B, B' parovi pridruženih točaka pri inverziji $\mathcal{I}_O = \mathcal{I}_O^R$. Tada vrijedi*

$$\sphericalangle OAB = \sphericalangle OB'A' \quad i \quad \sphericalangle OBA = \sphericalangle OA'B'.$$

Dokaz. Označimo kutove kao na slici. Kako su A i A' pridružene točke inverzije $\mathcal{I}_O$, to vrijedi $|OA| \cdot |OA'| = R^2$. Analogno je $|OB| \cdot |OB'| = R^2$, pa je

$$|OA| : |OB| = |OB'| : |OA'|.$$

Trokuti $\triangle OAB$ i $\triangle OB'A'$ imaju zajednički kut kod O, slijedi zbog S–K–S da je $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$, a iz te sličnosti slijedi tvrdnja. ■

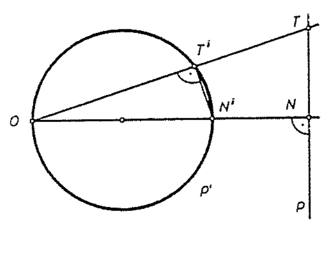


Sl. 199.

KOROLAR 5. *Inverzija je određena s centrom i parom pridruženih točaka.* ■

PROPOZICIJA 5. *Pravac p koji ne prolazi centrom O inverzije $\mathcal{I}_O$ preslikava se u kružnicu kroz O. Točnije, $\mathcal{I}_O(p)$ je kružnica kroz O, bez točke O.*

Dokaz. Neka je $p \subset M \setminus \{O\}$ neki pravac. Neka je N nožište okomice spuštene iz O na p, a $N' = \mathcal{I}_O(N)$. Neka je $T \in p$ bilo koja točka pravca p, a $T' = \mathcal{I}_O(T)$. Prema Propoziciji 4 je $\sphericalangle OT'N' = \sphericalangle ONT = \pi/2$. Dakle se T' nalazi na kružnici p' kojoj je $\overline{ON'}$ dijametar (Tales!). Dakle se svaka točka pravca p preslikava u točku kružnice p'. Kako je $\mathcal{I}_O$ bijekcija, tvrdnja neposredno slijedi. ■



Sl. 200.

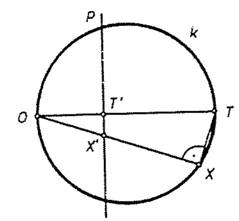
Napomena. Geometrijski je očito da ako se točka T giba po p u neizmjernost, onda se T' giba po p' prema točki O. Ako ravninu nadopunimo "beskonačno dalekom točkom ∞ pravca p" i pri tom uzmemo da svi pravci ravnine prolaze tom točkom ∞, onda je smisleno smatrati da je slika te točke upravo točka O. Uz taj

dogovor, $\mathcal{I}_O$ postaje bijekcija sa $\overline{M} = M \cup \{\infty\}$ na samu sebe. Za $\overline{M}$ se katkad kaže da je "ravnina M kompaktificirana točkom ∞".

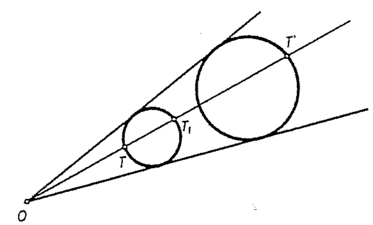
PROPOZICIJA 6. *Neka je k kružnica u ravnini M. Ako k prolazi centrom O inverzije $\mathcal{I}_O$, onda je slika $\mathcal{I}_O(k)$ pravac koji ne prolazi centrom O. Ako pak k ne prolazi centrom O, onda je slika $\mathcal{I}_O(k)$ kružnica koja također ne prolazi kroz O.*

Dokaz. Neka je k kružnica koja prolazi kroz O i $\overline{OT}$ njen dijametar. Neka je $X \in k$ bilo koja točka i $X' = \mathcal{I}_O(X)$, a $T' = \mathcal{I}_O(T)$ (v. sl. 201).

Neka je p pravac koji prolazi kroz T' i $p \perp OT$. Tvrdimo da je $p = \mathcal{I}_O(k)$. Kako je $\sphericalangle TXO = \pi/2$, to prema Propoziciji 4 slijedi da je $\sphericalangle OT'X' = \pi/2$, pa je $X' \in p$. To vrijedi za svaku točku $X \in k$, pa slijedi da je $\mathcal{I}_O(k) \subseteq p$. Budući je $\mathcal{I}_O$ bijekcija, slijedi da je $\mathcal{I}_O(k) = p$.



Sl. 201.



Sl. 202.

Neka je sada k kružnica koja ne prolazi kroz O (sl. 202) i $T \in k$, a $T' = \mathcal{I}_O(T)$. Tada je $|OT| \cdot |OT'| = R^2$. Neka je $\{T_1\} = OT \cap k$ drugo sjecište pravca OT i k. Prema svojstvima potencije točke O obzirom na k vrijedi da je $|OT| \cdot |OT_1| = r^2$, gdje je r radijus kružnice k. Odavde slijedi da je $|OT'| = (R/r)^2 |OT_1|$. Dakle je T' slika točke T_1 pri homotetiji $h = h(O, (R/r)^2)$. Kako je homotetična slika kružnice opet kružnica, tvrdnja slijedi. ■

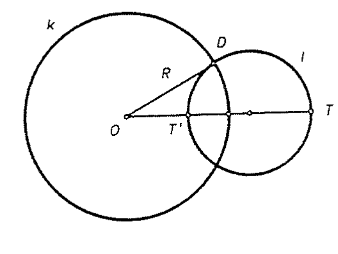
Inverzija u ravnini zove se katkada još i **zrcaljenje na kružnici**. Opravdanje za to sadržano je u sljedećoj Propoziciji.

PROPOZICIJA 7. *Neka je $\mathcal{I}_O = \mathcal{I}_O^R$ inverzija, a T i T' par pridruženih točaka te inverzije. Tada sve kružnice ravnine koje prolaze točkom T i okomite su na $k = k(O, r)$, prolaze točkom T'.*

Dokaz. Neka je l bilo koja kružnica kroz T koja je okomita na k, a T' sjecište OT sa l. Prema svojstvu potencije točke O obzirom na l vrijedi

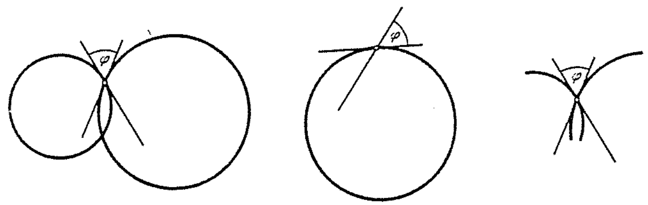
$$|OT| \cdot |OT'| = |OD|^2 = R^2,$$

pa je zaista T' slika od T. Dakle, l prolazi inverznom točkom točke T. Kako to vrijedi za svaku kružnicu kroz T, tvrdnja je dokazana. ■



Sl. 203.

Sjetimo se da je kut dvaju kružnica po definiciji jednak kutu pod kojim se sijeku tangente u njihovom sjecištu. Slično se definira kut pravca i kružnice, odnosno, općenito kut između dvije krivulje.



Sl. 204.

Ako preslikavanje ravnine čuva kut između krivulja, onda se ono zove **konformno preslikavanje**. Drugim riječima, ako su k i l dvije krivulje koje se u točki S sijeku pod kutom φ, onda se i njihove slike k' i l' u točki S' sijeku pod tim istim kutom φ.

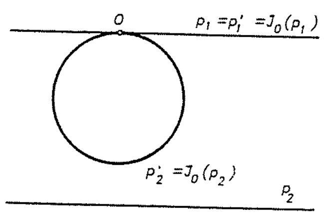
TEOREM 7. *Inverzija je konformno preslikavanje ravnine.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da inverzija čuva kut između pravaca. Razlikujemo tri slučaja.

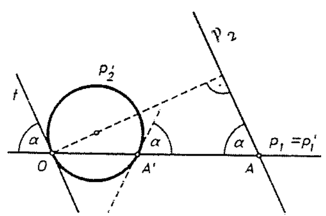
1. Pravci prolaze centrom inverzije $\mathcal{I}_O$. U tom slučaju tvrdnja slijedi iz Propozicije 3.

2. Jedan pravac prolazi centrom inverzije O, a drugi ne. Tu razlikujemo dva podslučaja.

2a) Pravci p_1 i p_2 su paralelni. Tada (vidi sl. 205) je $\sphericalangle(p_1, p_2) = 0$ i $\sphericalangle(p_1', p_2') = 0$, pa je tvrdnja dokazana.



Sl. 205.

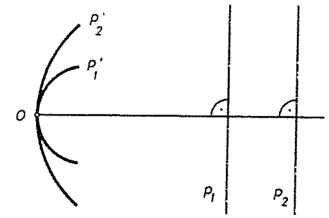


Sl. 206.

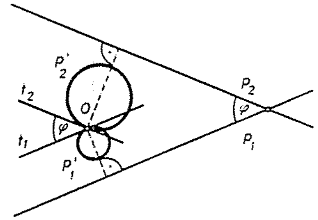
2b) Pravci p_1 i p_2 se sijeku. Neka je A njihovo sjecište i neka je $\sphericalangle(p_1, p_2) = \alpha$. Tada je $p_1 = p_1' = \mathcal{I}_O(p_1)$, a $p_2' = \mathcal{I}_O(p_2)$ je kružnica koja prolazi kroz O. Dokažimo da je $\sphericalangle(p_1', p_2') = \alpha$, tj. $\sphericalangle(p_1, p_2') = \alpha$. No, to je posljedica činjenice da tetiva $\overline{OA'}$ kružnice p_2' zatvara kut α s tangentama kojima su dirališta u njenim krajevima.

3. Ni jedan od pravaca ne prolazi centrom inverzije.

3a) $p_1 \| p_2$. U tom slučaju je tvrdnja trivijalna, jer je $\sphericalangle(p_1, p_2) = \sphericalangle(p_1', p_2') = 0$ (v. sl. 207).



Sl. 207.



Sl. 208.

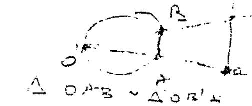
3b) p_1 i p_2 se sijeku. Uvedimo oznake kao na sl. 208. Tada je $\sphericalangle(p_1', p_2') = \sphericalangle(t_1, t_2) = \sphericalangle(p_1, p_2)$, jer se radi o kutovima s paralelnim kracima, $t_1 \| p_1$, $t_2 \| p_2$. ∎

PROPOZICIJA 8. *Kompozicija dviju inverzija s istim centrom je homotetija. Točnije,* $\mathcal{I}_O^{R'} \circ \mathcal{I}_O^R = h(O, (R'/R)^2)$.

Dokaz. Označimo $\mathcal{I}_O^R = \mathcal{I}$, $\mathcal{I}_O^{R'} = \mathcal{I}'$. Neka je $T \in M \setminus \{O\}$, a $\mathcal{I}(T) = T'$, $\mathcal{I}'(T') = T''$. Tada je $|OT| \cdot |OT'| = R^2$, $|OT'| = |OT''| = R'^2$, pa dijeljenjem ovih jednakosti slijedi $|OT''| = (R'/R)^2 |OT|$. Kako su točke O, T i T'' kolinearne, tvrdnja neposredno slijedi iz definicije homotetije. ∎

PROPOZICIJA 9. *Neka je $\mathcal{I}_O^R$ inverzija ravnine, a A, A' i B, B' parovi pridruženih točaka tom inverzijom. Tada je*

$$\boxed{|A'B'| = \frac{|AB|}{|OA| \cdot |OB|} R^2.}$$



Dokaz. Iz Propozicije 4 slijedi da je $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$, pa je $\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|OB|}$. No, zbog $|OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'| = R^2$ slijedi odmah tvrdnja. ∎

Napomenimo da se inverzija $\mathcal{I} = \mathcal{I}_O^R$ može jednostavno opisati pomoću kompleksnih brojeva kao transformacia $z \mapsto z'$, $z' = \mathcal{I}(z)$ sa

$$z' = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a,$$

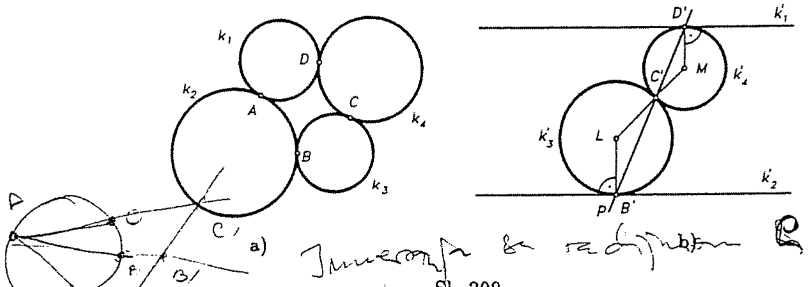
pri čemu je $O = a$ centar inverzije, a $\bar{z}$ konjugirano kompleksni broj od z.

Primjer 8. Neka su k_1, k_2, k_3 tri kružnice koje prolaze istom točkom O. Pokažite da postoje četiri kružnice koje diraju k_1, k_2 i k_3.

Rješenje. Neka je $\mathcal{I}_O^R$ bilo koja inverzija s centrom O. Tada su $k_i' = \mathcal{I}_O(k_i)$, $i = 1,2,3$ tri pravca koji određuju trokut. Kako postoje četiri kružnice koje diraju te pravce (upisana i tri pripisane kružnice tom trokutu), to su slike tih kružnica pri $\mathcal{I}_O^R$ opet kružnice koje diraju k_1, k_2 i k_3, jer inverzija čuva tangencijalnost zbog svoje konformnosti. ∎

Primjer 9. Od četiri kružnice, dvije po dvije se diraju izvana kao na sl. 209a). Dokažite da četiri dirališta tih kružnica leže na jednoj kružnici.

Rješenje. Označimo kružnice i pripadna dirališta kao na sl. 209a. Neka je $\mathcal{I}_A^R = \mathcal{I}_A$ inverzija s centrom u A radijusa R. Tada su $k_1' = \mathcal{I}_A(k_1)$ i $k_2' = \mathcal{I}_A(k_2)$ paralelni pravci, a $k_3' = \mathcal{I}_A(k_3)$ i $k_4' = \mathcal{I}_A(k_4)$ kružnice koje se diraju u $C' = \mathcal{I}_A(C)$. Pri tome k_3' dira k_2' u $B' = \mathcal{I}_A(B)$, a k_4' dira k_1' u $D' = \mathcal{I}_A(D)$ (v. sl. 209b). Pokažimo da su B', C' i D'



Inverzija & radijusom R i središtem

Sl. 209.

$|AB||CD| + |BC||AD| \geq |AC||BD|$

kolinearne točke. Neka su L i M središta kružnica k_3' i k_4' redom. Kako je $MD' \| LB'$, to je $\sphericalangle C'MD = \sphericalangle B'LC'$. Nadalje je $|MC'| = |MD'|$, pa je stoga $\sphericalangle MC'D' = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sphericalangle C'MD'$. Na isti je način $\sphericalangle B'C'L = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sphericalangle B'LC'$, pa je $\sphericalangle MC'D' = \sphericalangle B'C'L$, pa zaista točke B', C', D' leže na istom pravcu p. Kako inverzija čuva dodir i kako se inverzijom $\mathcal{I}_A$ pravac p preslikava u kružnicu koja prolazi centrom inverzije, to je $\mathcal{I}_A(p)$ kružnica koja prolazi točkama A, B, C, D. ∎

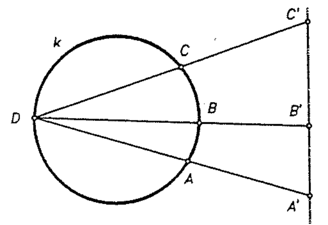
Primjer 10. (Ptolomejev teorem) Za četiri točke $A, B, C, D \in M$ vrijedi

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geq |AC| \cdot |BD|.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su A, B, C, D četiri uzastopne točke na nekoj kružnici ili pravcu.

Drugim riječima, konveksni četverokut je tetivni ako i samo ako je suma produkata nasuprotnih stranica jednaka produktu dijagonala.

Dokaz. Neka su prvo točke A, B, C, D na nekoj kružnici k. Uzmimo inverziju $\mathcal{I}$ s centrom u D i radijusom inverzije ϱ. Tada je slika kružnice k pravac k' na kojem leže točke A', B' i C'. Zbog $|A'B'| + |B'C'| = |A'C'|$ i iz Propozicije 9 slijedi



Sl. 210.

$$\frac{|AB|}{|DA| \cdot |DB|}\varrho^2 + \frac{|BC|}{|DB| \cdot |DC|}\varrho^2 = \frac{|AC|}{|DA| \cdot |DC|}\varrho^2,$$

tj. $|AB| \cdot |DC| + |BC| \cdot |DA| = |AC| \cdot |DB|$.

Ako sada jedna od točaka ne leži na kružnici k, npr. točka B, onda je $|A'B'| + |B'C'| > |A'C'|$ (nejednakost trokuta!), pa slijedi $|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| > |AC| \cdot |BD|$. ∎

Primjer 11. a) Neka je $\mathcal{I} = \mathcal{I}_O^R$ inverzija ravnine, a $k = k(S, r)$ kružnica s centrom S i radijusom r, te neka je $k' = \mathcal{I}(k)$ kružnica. Dokažite da je radijus r' kružnice k' dan formulom

$$r' = \frac{rR^2}{\left||OS|^2 - r^2\right|}.$$

b) Neka su R i r polumjeri opisane i upisane kružnice trokutu, a $d = |OU|$ udaljenost njihovih središta. Koristeći inverziju dokažite tada **Eulerov teorem** (v. § 3.5. Primjer 15) $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Rješenje. a) Neka su A i B krajevi onog dijametra kružnice k, koji leži na pravcu OS. Tada prema Propoziciji 9 vrijedi

$$2r' = |A'B'| = \frac{|AB|R^2}{|OA| \cdot |OB|} = \frac{2rR^2}{\left||OS| - r\right| \cdot (|OS| + r)},$$

pa odavde slijedi tvrdnja.

b) Neka su D_1, D_2, D_3 dirališta upisane kružnice sa stranicama AC, AB i BC redom. Inverzijom s obzirom na upisanu kružnicu se točke A, B i C redom preslikavaju u polovišta dužina $\overline{D_1D_2}, \overline{D_2D_3}$ i $\overline{D_3D_1}$ (zašto?). Stoga se trokutu $\triangle ABC$ opisana kružnica preslikava u kružnicu polumjera r' opisanu trokutu $\triangle A'B'C'$ koji je homotetičan s trokutom $\triangle D_1D_2D_3$ i koeficijentom homotetije $1/2$. Stoga je $r' = r/2$. No prema a) imamo da je

$$r' = \frac{Rr^2}{R^2 - d^2},$$

pa odavde slijedi tvrdnja. ∎

Primjer 12 (Feuerbachov teorem). Dokažite da kružnica "9 točaka" (koja prolazi polovištima stranica) dira upisanu i tri trokutu pripisane kružnice.

Dokaz. Neka su K, L, M polovišta stranica $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ trokuta $\triangle ABC$, k kružnica "9 točaka", k_u upisana kružnica trokutu $\triangle ABC$, a k_c pripisana kružnica koja dira $\overline{AB}$. Neka su D i E dirališta stranice $\overline{AB}$ s kružnicama k_c i k_u redom(sl. 211). Lako se dobiva da vrijedi

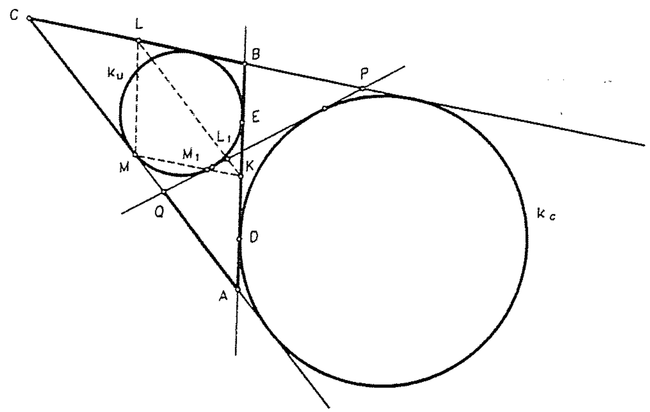
$$|BE| = |AD| = \frac{a + c - b}{2} \quad \text{i} \quad |KD| = |KE| = \frac{|b - a|}{2}.$$

Uzmimo inverziju $\mathcal{I} = \mathcal{I}_K$ s centrom K i radijusom $|KD| = |KE|$. Tada su točke D i E fiksne točke te inverzije. Inverzija $\mathcal{I}$ preslikava kružnicu k_u (odn. k_c) u kružnicu k_u' (odn. k_c'), homotetičnu s kružnicom k_u (odn. k_c) obzirom na centar K. Kružnica k_u' (odn. k_c') dira AB u točki D (odn. E), pa je $k_u' = k_u$, a $k_c' = k_c$. Inverzija $\mathcal{I}$ preslikava kružnicu k u pravac $M'L'$, pa preostaje dokazati da taj pravac dira kružnice k_u i k_c.

Da to dokažemo, povucimo četvrtu tangentu PQ kružnica k_u i k_c ($P \in BC$, $Q \in AC$). Neka su L_1 i M_1 redom sjecišta KL i KM s pravcem PQ. Sve će biti dokazano ako pokažemo da je

$$|KL'| = |KL_1| \quad \text{i} \quad |KM'| = |KM_1|,$$

jer će odavde slijediti da je $L' = L_1$ i $M' = M_1$.



Sl. 211.

Simetrala unutarnjeg kuta kod C je os simetrije kružnica k_u i k_c. Stoga je $|PC| = |AC| = b$ i $|QC| = |BC| = a$. Iz sličnosti $\Delta PLL_1 \sim \Delta PCQ$ i $\Delta QM_1M \sim \Delta QPC$ dobivamo

$$|L_1L| = |CQ| \cdot \frac{|PL|}{|PC|} = a\frac{b-\frac{a}{2}}{b}, \qquad |M_1M| = |PC| \cdot \frac{|QM|}{|QC|} = b\frac{a-\frac{b}{2}}{a}.$$

Dalje imamo

$$|KL_1| = |KL| - |L_1L| = \frac{b}{2} - a\frac{b-\frac{a}{2}}{b} = \frac{(a-b)^2}{2b} = \frac{|KD|^2}{|KL|} = |KL'|$$

$$|KM_1| = |KM| - |M_1M| = \frac{a}{2} - b\frac{a-\frac{b}{2}}{a} = \frac{(a-b)^2}{2a} = \frac{|KD|^2}{|KM|} = |KM'|.$$

Stoga je $L_1 = L'$ i $M_1 = M'$. Prema tome, kružnica k prelazi inverzijom $\mathcal{I}$ u pravac PQ koji dira kružnice k_u i k_c, pa stoga kružnica k dira k_u i k_c. Analogno se vidi i za kružnice k_a i k_b. ■

ČETVRTAK

§ 7. Geometrijske konstrukcije

Prije svega moramo se dogovoriti kojim ćemo se sredstvima služiti pri geometrijskom konstruiranju i što to uopće znači konstruirati neki lik. Na ovom mjestu govorit će se o konstrukcijama ravnalom i šestarom. Kad kažemo ravnalo misli se na jednobridno ravnalo; to je ravnalo kod kojega koristimo samo jedan njegov brid (a ne njemu paralelan brid) i na kojemu nije istaknuta nikakva jedinica mjere, dakle nema na njemu podjela. Pri tome ćemo smatrati da ravnalom uvijek možemo povući spojnicu dviju točaka, tj. konstruirati pravac koji prolazi kroz dvije različite zadane točke. Nadalje pretpostavljamo da znamo odrediti sjecište dvaju pravaca od kojih je svaki zadan sa po dvije svoje točke i to tako da ravnalom nacrtamo spojnice tih točaka i onda vizuelno odredimo i njihovo sjecište.

Sljedeći instrument kojim ćemo se koristiti je šestar. Pri tome mislimo na šestar kojim se oko svake točke može opisati kružnica sa po volji zadanim polumjerom.

Nadalje ćemo smatrati da znamo odrediti presjek pravca koji je zadan sa dvije točke i kružnice određene središtem i polumjerom i to tako da ravnalom nacrtamo pravac tim točkama i oko zadanog središta šestarom opišemo kružnicu zadanog polumjera i onda vizuelno odredimo njihova sjecišta (ukoliko postoje). Na isti način smatramo da znamo odrediti sjecišta dviju kružnica.

Prema svemu rečenom smatrat ćemo da je točka konstruirana ako je ona dobivena kao sjecište dvaju pravaca, pravca i kružnice ili pak kao sjecište dviju kružnica. Pravac ćemo smatrati konstruiranim ako znamo konstruirati bilo koje njegove dvije točke. Kružnicu smatramo konstruiranom ako znamo konstruirati njeno središte i bilo koju njenu točku. Trokut smatramo konstruiranim ako znamo konstruirati njegove vrhove itd. Osnovnim konstrukcijama trokuta susreli smo se već u § 2.2.

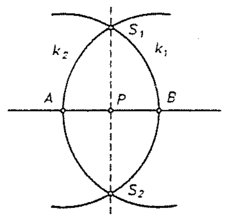
Riješiti neki konstruktivni zadatak znači svesti ga na prije opisane tri konstrukcije, sjecišta dvaju pravaca, sjecišta pravca i kružnice i sjecište dviju kružnica. Navedimo sada nekoliko osnovnih konstrukcija.

Primjer 1. Zadana je dužina $\overline{AB}$ svojim krajevima A i B. Treba konstruirati polovište te dužine.

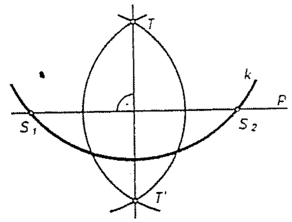
Rješenje. Povucimo pravac AB i oko točke A opišemo kružnicu k_1 kroz B i oko točke B kružnicu k_2 kroz A (v. sl. 212). Te se dvije kružnice sijeku u točkama S_1 i S_2. Pravac S_1S_2 siječe pravac AB u traženom presjecištu P. (Zašto?)

Primjer 2. Zadanom točkom T izvan zadanog pravca p konstruirajte okomicu na p.

Rješenje. Oko točke T kao središta opišimo bilo koju kružnicu k koja siječe p u točkama S_1 i S_2. Oko S_1 (kao središta) opišimo kružnicu k_1 kroz T i oko S_2 kružnicu k_2 kroz T (v. sl. 213). Te se dvije kružnice sijeku osim u T još u nekoj točki T'. Spojnica TT' je okomica kroz T na p. (Zašto?) Ovo je ujedno konstrukcija zrcalne slike T' točke T obzirom na pravac p.



Sl. 212.

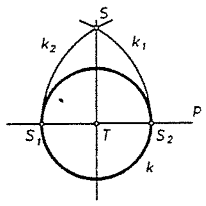


Sl. 213.

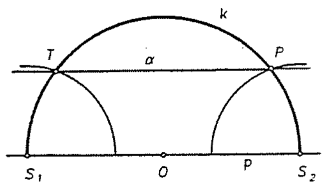
Primjer 3. Zadan je pravac p i na njemu točka T. Konstruirajte točkom T okomicu na pravac p.

Rješenje. Oko točke T opišimo kružicu k bilo kojeg polumjera. Ona siječe p u točkama S_1 i S_2 (v. sl. 214).

Oko S_1 opišimo kružnicu k_1 kroz S_2 i oko S_2 kružnicu k_2 kroz S_1 Označimo sa S jedno od sjecišta kružnica k_1 i k_2. Pravac ST je tada tražena okomica. (Zašto?)



Sl. 214.



Sl. 215.

Primjer 4. Zadan je pravac p i točka T izvan njega. Konstruirajte točkom T pravac q paralelan sa p.

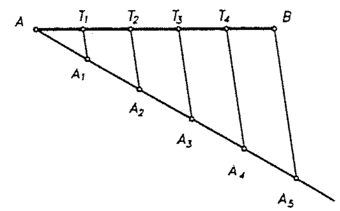
Rješenje. Najprije se točkom T konstruira pravac v okomit na p (vidi Primjer 2), zatim točkom T pravac q okomit na v (vidi Primjer 3). Tada je q tražena paralela.

Zadatak se može riješiti i na ovaj način. Uzmimo pravac p i točku T van njega. Uzmimo na p bilo koju točku O i oko nje opišimo kružnicu k kroz T. Ona siječe p u točkama S_1 i S_2 (v. sl. 215). Sada oko S_2 opišimo kružnicu polumjera $|S_1T|$, ona siječe k u P. Pravac TP je tada očito paralelan sa p.

Primjer 5. Zadanu dužinu $\overline{AB}$ konstruktivno podijeliti na 5 jednakih dijelova.

Rješenje. Točkom A povucimo bilo koji polupravac koji ne leži na pravcu AB (v. sl. 216). Zatim šestarom nanesimo počev od A pet puta istu dužinu. tako dobijemo točke A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 takve da je $|AA_1| = |A_1A_2| = |A_2A_3| = |A_3A_4| = |A_4A_5|$. Spojimo A_5 sa B i na već poznati način točkama A_1, A_2, A_3, A_4 povucimo paralele s pravcem BA_5. Te paralele sijeku $\overline{AB}$ u točkama T_1, T_2, T_3, T_4 koje dužinu $\overline{AB}$ dijele na 5 jednakih dijelova (Talesov poučak).

Napomena. Bilo bi vrlo komplicirano kada bi pri konstrukciji paralela kroz točke A_1, A_2, A_3, A_4 koristili konstrukciju iz primjera 4. Zato ćemo se za konstrukciju paralela poslužiti sa dva trokuta, onako kako se to uči u školi, a za konstrukciju okomica također. Međutim moramo biti svjesni da to nisu konstrukcije ravnalom i šestarom. Važno je da znamo da su te konstrukcije izvodljive **samo** ravnalom i šestarom.



Sl. 216.

Pri rješavanju konstruktivnih zadataka svrsishodno je zadatak rastaviti na četiri etape. Te etape jesu:

1) Analiza. Sastoji se u tome da se pretpostavi da je zadatak riješen. Napravi se skica i na njoj uoče zadani elementi. Nastoji se crtež nadopuniti i na njemu uočiti lik kojeg znamo konstruirati i čija konstrukcija rješava i naš konstruktivni zadatak. U analizi dakle tražimo put k rješenju.

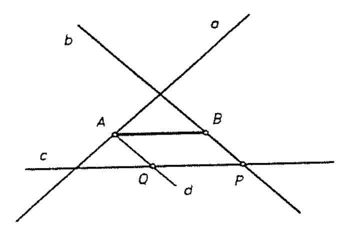
2) Konstrukcija. Vrši se na osnovi analize.

3) Dokaz valjanosti konstrukcije. Nakon konstrukcije treba dokazati da lik dobiven konstrukcijom odgovara uvjetima zadatka.

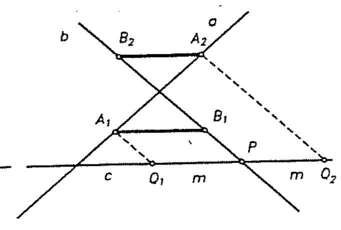
4) Diskusija. U diskusiji treba razmotriti pitanje uz koje uvjete zadani lik postoji te koliko rješenja ima zadatak. Nadalje treba vidjeti je li u svim mogućim slučajevima nađena konstrukcija provediva, a ako nije, onda treba naći konstrukciju i u takvim slučajevima.

Ilustrirajmo to na primjerima.

Primjer 1. U ravnini su nacrtana tri pravca a, b i c u općem položaju, tj. od kojih se dva po dva sijeku i sva tri ne prolaze istom točkom. Neka se na pravcu a nađe točka A, na pravcu b točka B tako da je $AB \parallel c$ i dužina $\overline{AB}$ ima zadanu duljinu m.



Sl. 217.



Sl. 218.

Rješenje. 1) Analiza. Pretpostavimo da je zadatak riješen i da smo našli točku $A \in a$, $B \in b$ tako da je $AB \parallel c$ i $|AB| = m$. Nadopunimo sada skicu tako da točkom A povučemo pravac $d \parallel b$ i neka on siječe c u točki Q. Tada je $QPBA$ paralelogram. To nam daje ideju za konstrukciju (v. sl. 217).

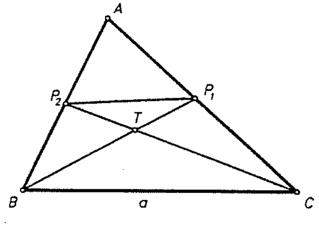
2) Konstrukcija. Od sjecišta P pravaca b i c nanesimo lijevo i desno dužinu duljine m, tj. $|Q_1P| = |PQ_2| = m$ (v. sl. 218). Povucimo točkama Q_1 i Q_2 paralele sa b. One sijeku a redom u točkama A_1 i A_2. Paralele sa c kroz A_1 i A_2 sijeku redom b u točkama B_1 i B_2. $\overline{A_1B_1}$ i $\overline{A_2B_2}$ su tražena rješenja.

3) Dokaz konstrukcije. $\overline{A_1B_1}$ zadovoljava uvjete zadatka jer je $Q_1PB_1A_1$ paralelogram, pa je $|A_1B_1| = m$ i $A_1B_1 \parallel c$. Osim toga po konstrukciji je $A_1, A_2 \in$ $\in a$. Analogno se vidi da i $\overline{A_2B_2}$ zadovoljava uvjete zadatka.

4) Diskusija. Iz konstrukcije je vidljivo da zadatak ima uvijek dva rješenja.

Primjer 2. Konstruirajte trokut kojemu je zadana duljina stranice a i težišnice t_b i t_c.

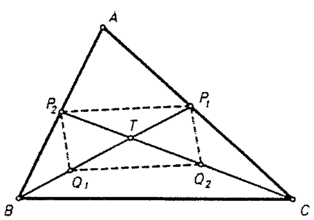
Rješenje. 1) Analiza. Nacrtajmo skicu kao da smo zadatak riješili. Označimo polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ trokuta ABC sa P_1 i P_2. Neka je T težište tog trokuta. Očito ćemo trokut $\triangle ABC$ znati konstruirati ako znamo konstruirati trokut $\triangle BCT$. Prema svojstvu težišta je $|BT| = \frac{2}{3}t_b$ i $|CT| = \frac{2}{3}t_c$. Znači u trokutu $\triangle BCT$ znamo sve tri stranice, pa ga možemo konstruirati.



Sl. 219.

2) Konstrukcija. Najprije iz tri poznate stranice $a = |BC|$, $|BT| = \frac{2}{3}t_b$, $|CT| = \frac{2}{3}t_c$ konstruiramo trokut $\triangle BCT$. Zatim $\overline{BT}$ produžimo preko T za $\frac{1}{3}t_b$ i dobijemo točku P_1 tako da je $|TP_1| = \frac{1}{3}t_b$. Analogno konstruiramo točku P_2. Pravci BP_2 i CP_1 sijeku se u trećem vrhu A traženog trokuta $\triangle ABC$.

3) Dokaz konstrukcije. Treba dokazati da su $\overline{BP_1}$ i $\overline{CP_2}$ zaista težišnice trokuta $\triangle ABC$. Neka su Q_1 i Q_2 polovišta dužina $\overline{BT}$ i $\overline{CT}$. Tada je $\overline{Q_1Q_2}$ srednjica trokuta $\triangle BCT$. Kako je po konstrukciji $|Q_1T| = |TP_1| = \frac{1}{3}t_b$ i $|Q_2T| = |TP_2| = \frac{1}{3}t_c$, to se u četverokutu $Q_1Q_2P_1P_2$ dijagonale raspolavljaju pa je taj četevrokut paralelogram. Slijedi da je $\overline{P_1P_2} \parallel Q_1Q_2$ i $|P_1P_2| = |Q_1Q_2|$, pa je $\overline{P_1P_2}$ srednjica trokuta $\triangle ABC$. Odavde slijedi valjanost konstrukcije.

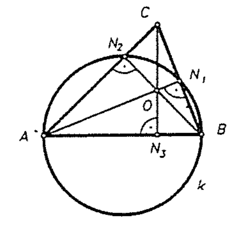


Sl. 220.

4) Diskusija. Konstrukcija je moguća ako je moguće konstruirati trokut $\triangle BCT$, a to će biti ako je $2(t_b + t_c) > 3a$ i $3a > 2|t_b - t_c|$. Uz ovaj uvjet zadatak ima jedinstveno rješenje. U ostalim slučajevima nema rješenja. Uočimo da smo točku T mogli konstrirati i na drugu stranu pravca BC. Tada bismo dobili $\triangle A'BC$, gdje je A' točka simetrična točki A obzirom na pravac BC. No u tom su slučaju trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'BC$ sukladni, pa u tom smislu valja smatrati da je rješenje jedinstveno. Napomenimo (još jednom) da je time trokut $\triangle ABC$ konstruiran do na izometriju.

Primjer 3. U ravnini je nacrtana kružnica k i jedan njezin dijametar $\overline{AB}$. Iz zadane točke C, koja ne leži na kružnici ni na pravcu AB, **samo pomoću ravnala** konstruirajte okomicu na pravac AB.

Rješenje. 1) Analiza. Neka je CN_3 tražena okomica. Nadopunimo crtež tako da iz A i B spustimo okomice na stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ trokuta $\triangle ABC$. Označimo nožišta tih okomica sa N_1 i N_2. Sve tri okomice se sijeku u ortocentru O trokuta. Prema Talesovom teoremu točke N_1 i N_2 moraju ležati na kružnici k. Iz slike lako zaključujemo na konstrukciju.



Sl. 221.

2) Konstrukcija. Spojimo C sa A i neka CA siječe k u N_2. Na isti način konstruiramo točku N_1. Neka je O sjecište $\overline{AN_1}$ i $\overline{BN_2}$. Pravac CO je tada tražena okomica. Konstrukcija je provedena samo ravnalom.

3) Dokaz konstrukcije. Prema konstrukciji točka O je ortocentar trokuta $\triangle ABC$, pa na pravcu CO mora ležati treća visina trokuta. Zato je $CO \perp AB$.

4) Diskusija. Konstrukcija ne funkcionira ako je $N_2 = A$ (odnosno $N_1 = B$), no onda je CA (odnosno CB) tražena okomica. U oba ova slučaja zadatak ima jedinstveno rješenje. Uočite da ne može biti istodobno $N_2 = A$ i $N_1 = B$. Naime ako je $N_2 = A$, onda se C nalazi na tangenti od k kojoj je A diralište, pa u tom slučaju $\overline{CB}$ siječe kružnicu k u točki $N_1 \neq B$. U svakom dakle slučaju zadatak ima jedinstveno rješenje.

Riješite prethodni zadatak samo pomoću ravnala ako točka C leži na kružnici, $C \neq A$ i $C \neq B$.

7.1. Metode geometrijskog konstruiranja

Postoji više metoda kojima se služimo pri geometrijskom konstruiranju. Nabrojat ćemo ovdje samo najvažnije:

1) Metoda presjeka;

2) Metoda geometrijskih transformacija;

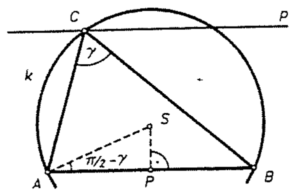
3) Algebarska metoda.

1. Metoda presjeka. Ako se geometrijska konstrukcija svodi na konstrukciju neke točke, onda je prirodno postupiti na sljedeći način. Nađu se dva nezavisna uvjeta koja ta točka mora zadovoljavati. Svaki od tih uvjeta određuje neki skup točaka u ravnini. Takav skup točaka obično zovemo **geometrijsko mjesto točaka**. Tražena točka je onda u presjeku tih geometrijskih mjesta točaka. Ilustrirajmo to na primjerima.

Primjer 1. Konstruirajte trokut ako je zadano c, v_c i γ.

Rješenje. 1) Analiza. Nacrtajmo dužinu $\overline{AB}$, takvu da je $|AB| = c$. Treći vrh C trokuta $\triangle ABC$ tada mora ležati na pravcu p koji je za v_c udaljen od pravca AB (to je prvo geometrijsko mjesto točaka). Nadalje kut $\sphericalangle ACB$ mora biti jednak γ. Kako je skup svih točaka ravnine iz kojih se dužina $\overline{AB}$ vidi pod zadanim kutom γ luk kružnice k (to je drugo geometrijsko mjesto točaka), to se točka C nalazi na presjeku pravca p i luka kružnice k.

2) Konstrukcija. Nacrtajmo dužinu $\overline{AB}$, $|AB| = c$ i pravac p udaljen za v_c od pravca AB. Nad $\overline{AB}$, kao osnovicom, konstruirajmo jednakokračni trokut $\triangle ABS$ tako da je $\sphericalangle BAS = \frac{\pi}{2} - \gamma$. Oko S (kao središta) opišimo luk kružnice k kroz točke A i B. Sjecište pravca p i luka kružnice je tada traženi vrh C (v. sl. 222).



Sl. 222.

3) Dokaz konstrukcije. Treba pokazati da trokut $\triangle ABC$ zadovoljava zadane uvjete. Kako C leži na p to je visina trokuta $\triangle ABC$ zaista jednaka v_c. Nadalje prema konstrukciji je $\sphericalangle ASB = 2\gamma$, pa je prema teoremu o obodnom i središnjem kutu $\sphericalangle ACB = \gamma$.

4) Diskusija. Ako pravac p ne siječe luk kružnice k onda zadatak nema rješenje. Ako pravac p dira kružnicu k, onda zadatak ima jedinstveno rješenje i $\triangle ABC$ je jednakokračan trokut. Ako pravac p siječe luk kružnice k onda zadatak samo prividno ima dva rješenja. Lako se naime vidi da su tako konstruirani trokuti sukladni, pa ih sa stanovišta geometrije treba identificirati. Dakle, zadatak ima i u ovom slučaju jedinstveno rješenje. Navedena konstrukcija funkcionira ako je γ šiljast kut. Modificirajte konstrukciju ako je γ tupi kut.

Napomena. Diskusija u ovom zadatku nije sasvim korektna. U diskusiji bi naime trebalo uvjete rješivosti zadatka izraziti pomoću zadanih veličina c, v_c i γ. Međutim takva diskusija izlazi izvan okvira planimetrije i iziskuje upotrebu trigonometrije. Ipak navedimo korektnu diskusiju za šiljasti kut γ. Dakle treba pomoću c, v_c i γ izraziti uvjet da p siječe k, tj. da je $v_c \leq r + |SP|$, gdje je r polumjer kružnice k, a P polovište od $\overline{AB}$. Iz pravokutnog trokuta APS nalazimo $|SP| = r\cos\gamma$, $r = \frac{c}{2\sin\gamma}$. Dakle traženi uvjet glasi

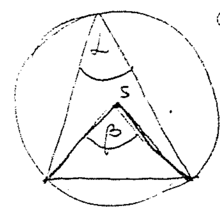
$$v_c \leq \frac{c}{2\sin\gamma}(1+\cos\gamma) = \frac{c}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Prema tome ako je $2v_c \leq c \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ zadatak ima jedinstveno rješenje. Ako je $2v_c = c \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$, onda je trokut jednakokračan. Ako je $2v_c > c \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$, onda zadatak nema rješenja. Provedite diskusiju ako je γ tupi kut.

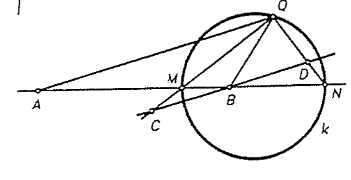
Za primjenu ove metode svrsishodno je poznavati Apolonijevu definiciju kružnice.

Neka su A i B dvije različite točke ravnine. Tada je skup svih točaka T ravnine za koju omjer udaljenosti $|AT| : |TB| = const. = \lambda$, kružnica ako je $\lambda \neq 1$, a simetrala dužine AB ako je $\lambda = 1$. Na taj je način **Apolonije** iz Perge definirao

kružnicu. Pokažimo da se u slučaju $\lambda \neq 1$ zaista radi o kružnici. Najprije na pravcu AB definiramo točke M i N tako da M dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru $|AM| : |MB| = \lambda$, a N tu istu dužinu u omjeru $|AN| : |NB|$ izvana (v. sl. 223).

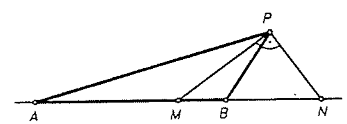


$\alpha = 2\beta$

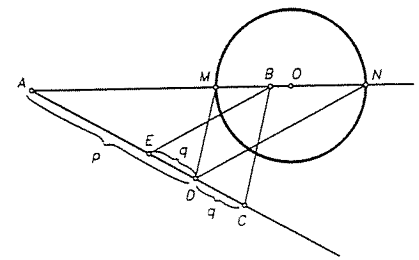


Sl. 223.

Tvrdimo da je traženi skup točaka kružnica kojoj je $\overline{MN}$ dijametar. Dokažimo da za svaku točku Q kružnice k vrijedi $|AQ| : |BQ| = \lambda$. Ako je $Q = M$ ili $Q = N$, onda je tvrdnja na trivijalni način istinita. Pretpostavimo stoga da je $Q \neq M, N$. Spojimo A sa Q, Q sa M i točkom B povucimo paralelu s AQ. Tada je $\triangle BMC \sim \triangle AMQ$. Odavde je $|BC| : |AQ| = |BM| : |AM|$ ili $|BC| : |AQ| = 1 : \lambda$. Kako je i $\triangle BDN \sim \triangle AQN$, to je $|BD| : |AQ| = |BN| : |AN|$, tj. $|BD| : |AQ| = 1 : \lambda$. Iz ovih jednakosti slijedi $|BC| = |BD|$. Dakle u $\triangle CDQ$ je $\overline{QB}$ težišnica stranice $\overline{CD}$. Prema Talesovom teoremu $\triangle CDQ$ je pravokutni. Težišnica hipotenuze pravokutnog trokuta jednaka je polovici hipotenuze, tj. $|BQ| = |BC|$. Ranije smo vidjeli da je $|BC| : |AQ| = 1 : \lambda$, pa slijedi da je $|AQ| : |BQ| = \lambda : 1$, a to znači da točka Q pripada traženom skupu točaka.



Sl. 224.



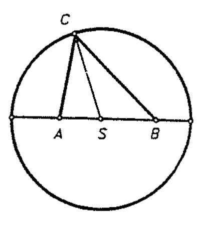
Sl. 225.

Treba vidjeti i obrat, tj. da svaka točka P za koju je $|AP| : |BP| = \lambda$ leži na kružnici k. U tu svrhu uzmimo točke A, B i konstruirajmo točke M i N kao prije. Iz $|AM| : |BM| = \lambda$ i $|AP| : |BP| = \lambda$ slijedi da je $|AM| : |BM| = |AP| : |BP|$ pa je PM simetrala $\sphericalangle APB$. Iz istog je razloga PN simetrala vanjskog kuta trokuta $\triangle ABP$ pri vrhu P. Iz tog razloga je $\sphericalangle MPN = \frac{\pi}{2}$, pa točka P leži na kružnici kojoj je $\overline{MN}$ dijametar, tj. na kružnici k (v. sl. 224).

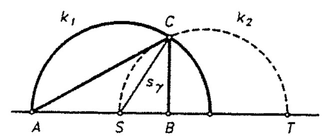
Postavlja se sada pitanje kako konstruirati kružnicu na temelju te definicije, tj. ako su zadane točke A i B i $\lambda = p : q$, $p, q \in \mathbf{R}$ $(p > q)$. Točkom A se povuče bilo koji polupravac i na njemu konstruiraju točke C, D, E tako da je $|AD| = p$, $|DC| = q$, $|DE| = q$. Spojimo E i C sa B i točkom D povučemo paralele sa EB i CB. One sijeku AB redom u točkama M i N. Kružnica kojoj je $\overline{MN}$ dijametar je tražena Apolonijeva kružnica (v. sl. 225).

Primjer 2. Na jednom dijametru okruglog biljarskog stola smještene su s različitih strana od središta dvije kugle. Jedna od kugala udarena je tako da ona nakon refleksije na rubu stola udari u drugu kuglu. Konstruirajte trajektoriju udarene kugle.

Rješenje. 1) Analiza. Označimo sa A i B dirne točke kugala sa ravninom stola, sa S središte stola, a sa C ortogonalnu projekciju dirališta udarene kugle s rubom stola na ravninu stola (v. sl. 226). Zamislimo da smo udarili drugu kuglu i da se ona nakon refleksije sudarila sa prvom. Tada je $\sphericalangle SCB = \sphericalangle SCA$ (kut upada jednak je kutu refleksije). Dakle CS je simetrala kuta trokuta ABC. Kako su točke A, B, S zadane to su potpuno određeni brojevi $|AS| = p$, $|BS| = q$. Dakle naš se zadatak svodi na to da konstruiramo trokut kojemu je zadana duljina simetrale kuta i odresci na koje ona dijeli tom kutu nasuprotnu stranicu. Prema tome treba konstruirati trokut ABC ako je zadana duljina simetrale s_γ unutarnjeg kuta pri vrhu C i ako su dani odresci $|AS| = p$, $|BS| = q$ na koje ta simetrala dijeli stranicu $\overline{AB}$. Najprije C mora ležati na kružnici k_1 sa središtem u S polumjera s_γ (to je prvo geometrijsko mjesto točaka C). Prema teoremu o simetrali kuta trokuta vrijedi $|AC| : |BC| = p : q$. Ako je $p \neq q$ onda je skup svih točaka C za koje vrijedi gornji razmjer kružnica k_2 (Apolonijeva definicija kružnice), a ako je $p = q$, onda je to pravac. Dakle drugo geometrijsko mjesto točaka C je ili kružnica k_2 ili pravac p. Dakle je C sjecište kružnica k_1 i k_2 ili k_1 i p.



Sl. 226.



Sl. 227.

2) Konstrukcija. Povucimo u ravnini bilo koji pravac i odaberimo na njemu točke A, B, S tako da je $|AS| = p$, $|SB| = q$. Oko S opišimo kružnicu k_1 polumjera s_γ. Konstruirajmo sada Apolonijevu kružnicu k_2. k_1 i k_2 se sijeku u traženom vrhu C (v. sl. 227).

3) Dokaz konstrukcije slijedi iz rasuđivanja provedenim u analizi.

4) Diskusija. Neka je $p \neq q$, recimo $p > q$. Neka je $\overline{ST}$ dijametar kružnice k_2 Zadatak ima rješenje samo ako je $s_\gamma < |ST|$. Najprije

$$\frac{|AT|}{|BT|} = \frac{p}{q} \quad \Rightarrow \quad \frac{p+q+|BT|}{|BT|} = \frac{p}{q}.$$

Odavde slijedi

$$|BT| = \frac{q(p+q)}{p-q}.$$

U drugu ruku $|ST| = |SB| + |BT|$ radi toga povlači da je

$$|ST| = q\frac{p+q}{p-q} + q = \frac{2pq}{p-q}.$$

Prema tome zadatak ima rješenje samo ako vrijedi $s_\gamma < \dfrac{2pq}{p-q}$. U ovom je slučaju konstrukcija trokuta jedinstvena. Ako je $s_\gamma \geq \dfrac{2pq}{p-q}$ zadatak nema rješenje.

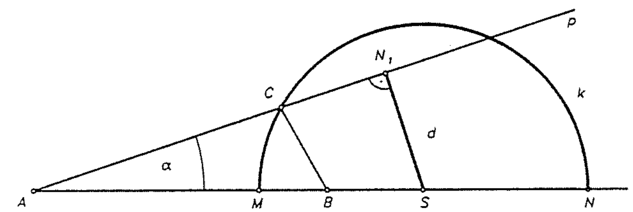
Za $p = q$ je k_2 simetrala dužine $\overline{AB}$ i konstrukcija je jednoznačna.

Prvotno postavljeni zadatak ima dva rješenja, tj. postoje dvije takve trajektorije. Druga je simetrična onoj prvoj obzirom na AB.

Primjer 3. Konstruirajte trokut ako je zadano c, $a : b = p : q$ $(p > q)$ i α.

Rješenje. 1) Analiza. Neka je $\triangle ABC$ traženi trokut i $|AB| = c$. Prema Apolonijevoj definiciji kružnice vrh C mora ležati na kružnici k. Ako točkom A povučemo pravac p koji s AB zatvara kut α, onda C mora ležati i na p. Znači točka C je na presjeku od k i p.

2) Konstrukcija. Nacrtajmo dužinu $\overline{AB}$, $|AB| = c$. Zatim konstruiramo dijametar $\overline{MN}$ Apolonijeve kružnice k određene sa $|AC| : |BC| = p : q$. Točkom A povucimo pravac p koji sa AB zatvara kut α (v. sl. 228).



Sl. 228.

Sjecište C pravca p i kružnice k je treći vrh trokuta $\triangle ABC$.

3) Dokaz konstrukcije. Ispravnost konstrukcije slijedi iz Apolonijevog teorema.

4) Diskusija. Pravac p može k sijeći u 2 točke, dirati k i ne sjeći k. Ako p siječe k u dvije točke, onda zadatak ima dva rješenja. Ako p dira k, onda zadatak ima jedinstveno rješenje i to pravokutni trokut. Ako p ne siječe k onda zadatak nema rješenja. Međutim i ovdje uvjete o kojima ovise rješenja treba izraziti pomoću zadanih veličina c, p, q, α. U tu svrhu označimo sa S središte kružnice k, a sa $|SN_1| = d$ udaljenost pravca p od S. Zadatak će imati dva rješenja ako je $d < r$ gdje je sa r označen polumjer kružnice k. Iz diskusije u prethodnom primjeru slijedi

$r = \dfrac{pqc}{p^2 - q^2}$. Iz $\triangle ASN_1$ slijedi $d = |AS| \sin\alpha$. Zbog

$$|AS| = |AM| + |MS| = \frac{pc}{p+q} + r = \frac{pc}{p+q} + \frac{pqc}{p^2-q^2} = \frac{p^2c}{p^2-q^2}$$

slijedi

$$\frac{p^2c}{p^2-q^2}\sin\alpha < \frac{pqc}{p^2-q^2}.$$

Dakle zadatak ima dva rješenja ako vrijedi

$$p\sin\alpha < q.$$

Ako je

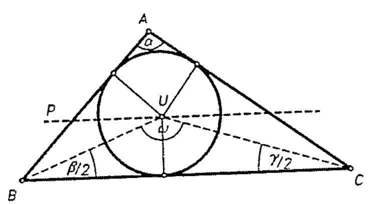
$$p\sin\alpha = q$$

onda zadatak ima jedinstveno rješenje i trokut je pravokutan. Ako je

$$p\sin\alpha > q$$

onda zadatak nema rješenja.

Primjer 4. Konstruirajte trokut ako je zadano a, α, r (= rad. up. kružnice).



Sl. 229.

Rješenje. Neka je $\triangle ABC$ traženi trokut (v. sl. 229), a U središte upisane kružnice. Točka U se tada nalazi na pravcu $p \parallel BC$ kojemu je udaljenost od pravca BC jednaka r. Nađimo kut $\omega = \sphericalangle BUC$. Imamo redom

$$\omega = \pi - \frac{1}{2}(\beta+\gamma) = \pi - \frac{1}{2}(\pi - \alpha) = \frac{1}{2}(\pi + \alpha)$$

Slijedi da se kut ω može konstruirati. Sada se konstruira luk kružnice iz čijih se točaka dužina $\overline{BC}$ vidi pod kutom ω. Sjecište pravca p i tog luka je točka U. Tangente povučene iz B i C na upisanu kružnicu sijeku se u trećem vrhu traženog trokuta.

Diskusija se provodi trigonometrijski. Nije teško vidjeti da zadatak ima rješenje ako i samo ako je

$$r \le \frac{a}{2}\left(\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$$

i to ako vrijedi znak jednakosti jedno rješenje, a u slučaju znaka nejednakosti dva rješenja.

7.2. Metode geometrijskih transformacija

Ta se metoda sastoji u tome da se skicira lik kojeg treba konstruirati i zatim pokuša vidjeti da li se zadatak pojednostavnjuje ako se lik ili dio lika podvrgne izvjesnoj geometrijskoj transformaciji i na taj način dobije lik koji znamo konstruirati, a čija konstrukcija omogućava da se konstruira traženi lik. Zavisno o vrsti transformacija razlikujemo ove metode geometrijskih transformacija:

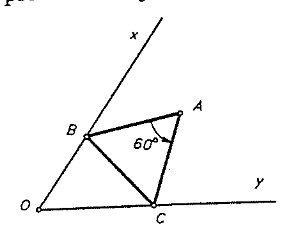
a) rotacije,
b) osne simetrije,
c) centralne simetrije,
d) translacije,
e) homotetije,
f) sličnosti,
g) inverzije,
h) kontraktibilnih preslikavanja.

Pokažimo na primjerima kako se te metode koriste.

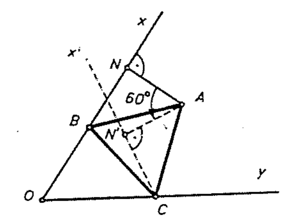
a) Metoda rotacije

Primjer 1. U ravnini je nacrtan šiljast kut i točka A unutar kuta. Konstruirajte jednakostranični trokut $\triangle ABC$ tako da je B na jednom kraku, a C na drugom kraku kuta.

Rješenje. 1) Analiza. Neka je O vrh, a x i y krakovi kuta i A zadana točka unutar kuta. Trokut $\triangle ABC$ mora biti jednakostraničan, pa je posebno $\sphericalangle BAC = 60°$ (v. sl. 230). Ako trokut $\triangle ABC$ rotiramo oko A za $60°$ onda se točka B preslika u točku C. Kako B leži na x to će slika od B (tj. C) ležati na pravcu x' koji se dobije rotiranjem pravca x oko A za $60°$. Kako C istodobno leži i na y to je C presjek pravaca x' i y.



Sl. 230.



Sl. 231.

2) Konstrukcija Zarotirajmo pravac x oko A za $60°$ i to tako da rotiramo okomicu $\overline{AN}$ na x za taj kut. Neka je N' slika od N pri toj rotaciji (v. sl. 231).

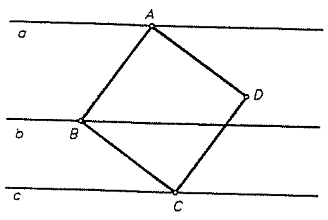
Okomica povučena točkom N' na AN' je rotirani položaj x' pravca x. Sjecište pravca x' i y je vrh C traženog trokuta. Konstrukcija vrha B je očita.

3) Dokaz konstrukcije. Treba vidjeti da je ΔABC jednakostraničan. Prema konstrukciji je ΔABC jednakokračan, tj. $|AB| = |AC|$, a kako je $\sphericalangle BAC = 60°$, to je on i jednakostraničan.

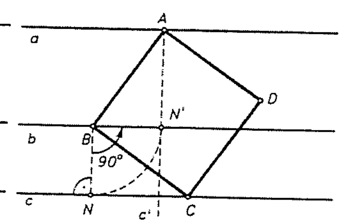
4) Diskusija. U našoj konstrukciji mogli smo rotaciju za 60° izvršiti i u smislu suprotnom kretanju kazaljke na satu. To pokazuje da zadatak može imati najviše dva rješenja. Lako se vidi ako je $\sphericalangle(Oxy) \neq 60°$, onda zadatak ima dva rješenja, a za $\sphericalangle(Oxy) = 60°$ samo jedno rješenje. U tom slučaju rotacijom za 60° u suprotnom smislu kretanja kazaljke na satu krak x prelazi u položaj $x' \| y$. Dokažite to.

Primjer 2. U ravnini su nacrtana tri paralelna pravca a, b, c. Konstruirajte kvadrat $ABCD$ tako da je $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$.

Rješenje. 1) Analiza. Sa skice (sl. 232) vidimo ako kvadrat $ABCD$ rotiramo za 90° oko B onda je slika točke C točka A. Kako je $C \in c$ to je slika točke C (tj. A) na slici c' od c. Točka A je dakle sjecište pravaca a i c'.



Sl. 232.



Sl. 233.

2) Konstrukcija. Uzmimo na b bilo koju točku B. Rotirajmo c oko B za 90° u smislu suprotnom kretanju kazaljke na satu (v. sl. 233). Rotirani položaj od c označimo sa c'. Sjecište pravaca a i c' je točka A. U B povucimo okomicu na AB. Tada ona siječe c u trećem vrhu C. Konstrukcija četvrtog vrha D je očita.

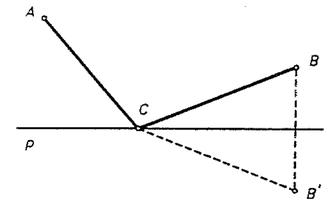
3) Dokaz konstrukcije. Valjanost konstrukcije slijedi iz analize.

4) Diskusija. Točku $B \in b$ smo odabrali proizvoljno, a to pokazuje da zadatak ima bar jednu beskonačnu seriju rješenja. Istina je da su svi ti kvadrati sukladni pa bi trebalo govoriti o jednom rješenju, ali ovdje je riječ o tzv. položajnom zadatku pa različitim treba smatrati sve one kvadrate koji imaju različite položaje. Ako jedan od pravaca nije jednako udaljen od ostala dva, onda se rotacijom u smislu kretanja kazaljke na satu dobije druga serija od beskonačno mnogo rješenja. Dakle u tom slučaju zadatak ima dvije serije od beskonačno mnogo rješenja. Lako se vidi, ako je jedan pravac jednako udaljen od ostala dva, onda zadatak ima samo jednu seriju od beskonačno mnogo rješenja.

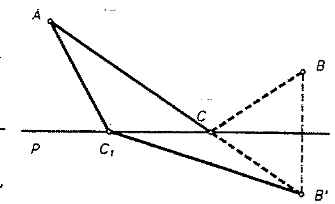
b) Metoda osne simetrije

Primjer 1. U ravnini su nacrtani pravac p i točke A i B s iste strane pravca p. Konstruirajte na pravcu p točku C tako da $|AC| + |CB|$ bude minimalno.

Rješenje. 1) Analiza. Neka je B' osno simetrična slika točke B obzirom na p (v. sl. 234). Tada je $|AC| + |CB| = |AC| + |CB'|$. Dakle $|AC| + |CB|$ je minimalno ako je $|AC| + |CB'|$ minimalno, a to je onda ako točke A, C i B' leže na istom pravcu.



Sl. 234.



Sl. 235.

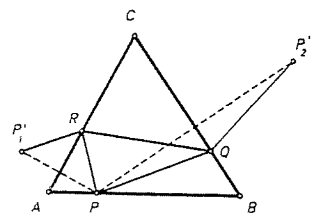
2) Konstrukcija. Konstruiramo osno simetričnu sliku B' točke B u odnosu na pravac p. Tražena točka C je sjecište pravaca AB' i p.

3) Dokaz konstrukcije. Neka je $C_1 \neq C$ bilo koja druga točka pravca p (v. sl. 235). Treba pokazati da je tada $|AC_1| + |C_1B| > |AC| + |CB|$. Zaista je $|AC_1| + |C_1B| = |AC_1| + |C_1B'| > |AC| + |CB'| = |AC| + |CB|$.

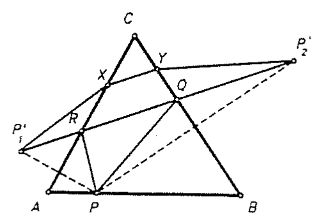
4) Diskusija. Zadatak ima uvijek jedinstveno rješenje. Konstrukcija ne funkcionira ako se A i B nalaze na pravcu o okomitom na p. Tada je C sjecište pravaca o i p.

Napomena. Ovaj smo zadatak mogli i ovako formulirati: Neka se na pravcu p odredi točka C tako da zraka svjetla polazeći iz A nakon refleksije u točki C prođe točkom B. To nam onda pokazuje da priroda traži najbrže ili najkraće putove (Heronov princip).

Primjer 2. Neka je ΔABC šiljastokutni trokut i P točka na stranici $\overline{AB}$. Konstruirajte točke $Q \in \overline{BC}$ i $R \in \overline{AC}$ tako da opseg trokuta ΔPQR bude najmanji mogući.



Sl. 236.



Sl. 237.

Rješenje. 1) Analiza. Neka je ΔPQR traženi trokut. Neka su dalje P_1' i P_2' redom simetrične točke točke P s obzirom na pravac AC i BC (v. sl. 236). Tada je očito opseg trokuta $\triangle PQR$ jednak $|P_1'R|+|RQ|+|QP_2'|$. Dakle taj je opseg jednak duljini poligonalne linije, koja spaja točke P_1' i P_2'. Prema tome opseg trokuta $\triangle PQR$ bit će minimalan ako točke R i Q leže na dužini $\overline{P_1'P_2'}$.

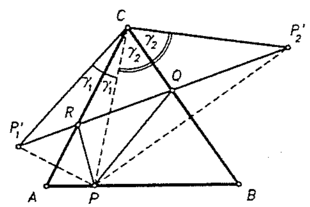
2) Konstrukcija. Nađimo zrcalne slike P_1' i P_2' točke P obzirom na pravac AC i BC redom. Pravac $P_1'P_2'$ siječe $\overline{AC}$ u točki R, a $\overline{BC}$ u točki Q. Trokut $\triangle PQR$ je traženi trokut.

3) Dokaz konstrukcije. Neka je $\triangle PXY$ bilo koji drugi trokut takav da je $X \in \overline{BC}$ i $Y \in \overline{AC}$ (v. sl. 237). Tada je opseg trokuta $\triangle PXY$ jednak $|P_1'X|+ +|XY|+|YP_2'| > |P_1'R|+|RQ|+|QP_2'| = |PR|+|RQ|+|QP|$.

4) Diskusija. Zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje.

Primjer 3. U zadani šiljastokutni trokut treba upisati trokut najmanjeg opsega.

Rješenje. 1) Analiza. Prirodan je pokušaj da se konstrukcija svede na prethodnu. Uzmimo da u zadani šiljastokutan trokut $\triangle ABC$ treba upisati trokut $\triangle PQR$ minimalnog opsega i pretpostavimo da je P bilo koja točka na stranici $\overline{AB}$ i ponovimo prethodnu konstrukciju i uvedimo oznake kao na slici. Dužinom $\overline{CP}$ je kut $\gamma = \sphericalangle ACB$ podijeljen na dva dijela γ_1 i γ_2, tj. $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.



Sl. 238.

Kako je $\sphericalangle P_1'CA = \gamma_1$ i $\sphericalangle BCP_2' = \gamma_2$ to je $\sphericalangle P_1'CP_2' = 2\gamma$.

Dakle ma kako odabrali točku P na $\overline{AB}$ uvijek će u jednakokračnom trokutu $\triangle P_1'P_2'C$ kut kod vrha C biti jednak dvostrukom kutu γ trokuta $\triangle ABC$. Kako je opseg trokuta $\triangle PQR$ jednak $|P_1'P_2'|$, to će opseg biti najmanji kada je osnovica $\overline{P_1'P_2'}$ trokuta $\triangle P_1'P_2'C$ najmanja. Dakle, rješenje zadatka se svodi na to da se od svih jednakokračnih trokuta $\triangle P_1'P_2'C$ kojima kraci $\overline{CP_1'}$ i $\overline{CP_2'}$ zatvaraju isti kut, odredi onaj kojemu je osnovica najmanja. Kako je $|CP_1'| = |CP_2'| = |CP|$ to zaključujemo da ćemo trokut najmanjeg opsega dobiti za onaj položaj točke $P \in \overline{AB}$ za kojeg je $|CP|$ najmanje. Drugim riječima P mora biti nožište visine spuštene iz vrha C na stranicu AB.

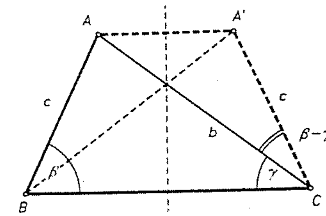
2) Konstrukcija. Nožišta visina trokuta $\triangle ABC$ su vrhovi traženog trokuta $\triangle PQR$.

3) Dokaz konstrukcije. Slijedi ponavljanjem argumenata iz analize za točke Q i R.

4) Diskusija. Zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje.

Primjer 4. Konstruirajte trokut ako je zadano b, c i $\beta - \gamma$.

Rješenje. 1) Analiza. Nacrtajmo trokut $\triangle ABC$ i neka je s simetrala stranice $\overline{BC}$. Osnom simetrijom se trokut $\triangle ABC$ preslika u trokut $\triangle A'CB$. U trokutu $\triangle ACA'$ tada znamo dvije stranice $|AC| = b$ i $|A'C| = c$ i $\sphericalangle ACA' = \beta - \gamma$ (vidi sliku). Trokut $\triangle ACA'$ znamo konstruirati pa iz njega i traženi trokut $\triangle ABC$.



Sl. 239.

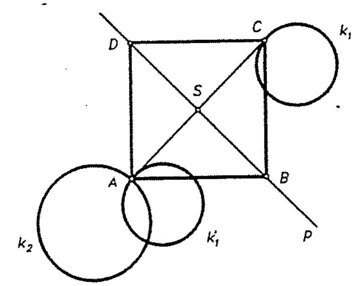
2) Konstrukcija. Konstruira se trokut $\triangle ACA'$. Neka je s simetrala stranice $\overline{AA'}$. Simetrična slika točke A' je tada vrh A, a točke C vrh B traženog trokuta.

3) Dokaz konstrukcije. Sljedi neposredno iz analize.

4) Diskusija. Za $b > c$ zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje.

Primjer 5. U ravnini su nacrtane dvije kružnice k_1, k_2 i pravac p. Konstruirajte kvadrat kojemu dva suprotna vrha leže na pravcu p, a od preostalih dvaju svaki na po jednoj od nacrtanih kružnica.

Rješenje. 1) Analiza. Pretpostavimo da je zadatak riješen (v. sl. 240). Pravac p je os simetrije tog kvadrata. Neka je s_p osna simetrija obzirom na pravac p. Tada je $s_p(C) = A$, a kako je $C \in k_1$ to je $s_p(C) \in s_p(k_1) = k_1'$, dakle $A \in k_1'$, a jer je $A \in k_2$ slijedi da je $A \in k_1' \cap k_2$.



Sl. 240.

2) Konstrukcija. Nađe se $s_p(k_1) = k_1'$. Sjecište kružnica k_2 i k_1' je vrh A kvadrata. Drugi vrh kvadrata je $C = s_p(A)$. Neka je S polovište od $\overline{AC}$. Ako na p od točke S na jednu i drugu stranu nanesemo dužinu $\overline{SA}$ dobit ćemo vrhove B i D kvadrata.

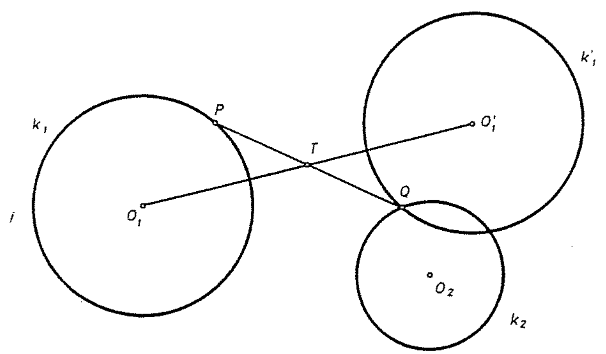
3) Dokaz konstrukcije. Dijagonale konstruiranog četverokuta su okomite i raspolavljaju se, pa je taj četverokut kvadrat.

4) Diskusija. Zadatak može imati 0, 1 ili 2 rješenja, već prema tome da li se kružnice k_2 i k_1' ne sijeku, diraju ili sijeku u dvije točke.

c) Metoda centralne simetrije

Primjer 1. U ravnini su nacrtane dvije kružnice k_1, k_2 i točka T koja ne leži ni na jednoj od njih. Odredite na k_1 točku P i na k_2 točku Q tako da je T polovište dužine $\overline{PQ}$.

Rješenje. 1) Analiza. Uzmimo centralnu simetriju c_T s centrom u T. Tada je $c_T(P) = Q$. Kako je $P \in k_1$ to je $Q = c_T(P) \in c_T(k_1)$ (v. sl. 241). Kako se Q nalazi i na k_2 to je Q sjecište kružnica k_2 i k_1'. Konstrukciju, dokaz konstrukcije i diskusiju provedite sami.

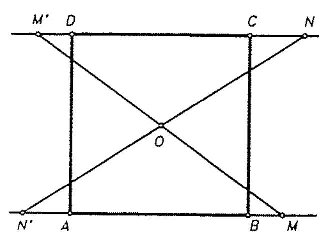


Sl. 241.

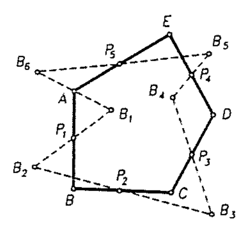
Primjer 2. U ravnini su nacrtane tri nekolinearne točke M, N i O. Konstruirajte kvadrat kojemu je središte u točki O i kojemu produžeci dviju suprotnih stranica prolaze točkama M i N.

Rješenje. Navedimo samo analizu zadatka.

Neka je c_O centralna simetrija s centrom u O, $M' = c_O(M)$ i $N' = c_O(N)$. Stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ kvadrata tada redom leže na pravcima MN' i $M'N$ (v. sl. 242).



Sl. 242.



Sl. 243.

Primjer 3. U ravnini je nacrtano pet točaka P_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ u općem položaju, tj. od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu. Konstruirajte peterokut $ABCDE$ kojemu su te točke polovišta stranica.

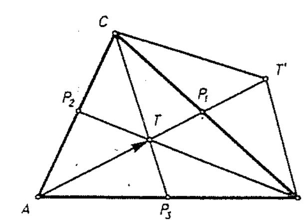
Rješenje. Zadovoljimo se samo analizom ovog zadatka. Iz nje je odmah uočljiva konstrukcija i dokaz njene valjanosti. U tu svrhu nacrtajmo u ravnini bilo koji peterokut $ABCDE$ i polovišta stranica P_i (v. sl. 243).

Ako točku A zrcalimo redom oko točaka $P_1, \dots, P_5$ dobit ćemo opet točku A. Označimo sa c_i centralnu simetriju s obzirom na P_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Dakle je $(c_5 \circ c_4 \circ c_3 \circ c_2 \circ c_1)(A) = A$. Kako je kompozicija od tri centralne simetrije opet centralna simetrija, to je $c_5 \circ c_4 \circ c_3 = c$ opet centralna simetrija pa je $c_5 \circ c_4 \circ c_3 \circ c_2 \circ c_1 = c \circ c_2 \circ c_1$ centralna simetrija. Dakle je A fiksna točka te centralne simetrije, tj. njezin centar. To nam omogućuje konstrukciju točke A. U tu svrhu ako uzmemo u ravnini bilo koju točku B_1 možemo konstruirati točku $B_6 = (c_5 \circ c_4 \circ c_3 \circ c_2 \circ c_1)(B_1)$, pa je A polovište dužine $\overline{B_1 B_6}$.

d) Metoda translacije

Primjer 1. Konstruirajte trokut kojemu su zadane duljine t_a, t_b, t_c njegovih težišnica.

Rješenje. 1) Analiza. Nacrtajmo trokut $\triangle ABC$ i njegovo težište T. Translatirajmo točku T za vektor $\overrightarrow{AT}$, tj. neka je $T' = t_{\overrightarrow{AT}}(T)$ (v. sl. 244). Očito je $TBT'C$ paralelogram jer se njegove dijagonale raspolavljaju. Trokut $\triangle CTT'$ znamo konstruirati jer znamo sve njegove stranice. naime po konstrukciji je $|TT'| = \frac{2}{3}t_a$, $CT' = \frac{2}{3}t_b$ i $|CT| = \frac{2}{3}t_c$. Pomoću njega se onda može konstruirati i trokut $\triangle ABC$.



Sl. 244.

2) Konstrukcija. Konstruiramo trokut $\triangle CTT'$ iz njegovih stranica $\frac{2}{3}t_a$, $\frac{2}{3}t_b$, $\frac{2}{3}t_c$. Simetrična slika točke T' obzirom na T je tada vrh A traženog trokuta. Ako trokut $\triangle CTT'$ nadopunimo do paralelograma, dobit ćemo treći vrh B trokuta.

3) Dokaz konstrukcije. Iz konstrukcije je očito da pravac AT' siječe stranicu $\overline{BC}$ u njenom polovištu P_1 i da je $|AP_1| = t_a$. Analogno se vidi da su P_2 i P_3 polovišta stranica $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ i da je $|BP_2| = t_b$ i $|CP_3| = t_c$.

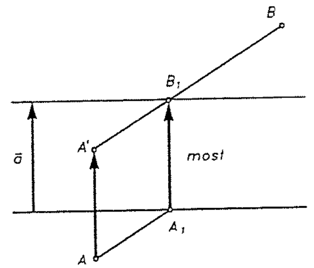
4) Diskusija. Zadatak ima uvijek jedinstveno rješenje ako su duljine težišnica takve da postoji trokut kojemu su one stranice.

Primjer 2. Naselja A i B razdvojena su kanalom kojemu su obale paralelni pravci. Gdje treba postaviti most (okomito na obalu) da put od A do B bude najkraći?

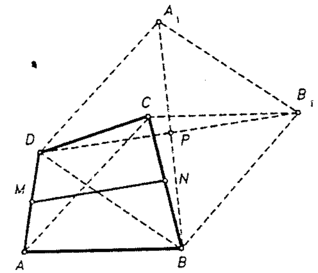
Rješenje. Navedimo samo analizu zadatka.

Translatirajmo točku A za vektor $\vec{a}$ (v. sl. 245) u položaj A'. Tada je očito $|AA'| + |A'B|$ najkraći put od A do B. Označimo li sjecište obale i dužine $\overline{A'B}$ sa B_1, onda je B_1 točka u kojoj treba graditi most.

Primjer 3. Konstruirajte četverokut kojemu su zadane duljine stranica i duljina spojnice polovišta jednog para nasuprotnih pravaca.



Sl. 245.



Sl. 246.

Rješenje. Zadovoljimo se analizom i naputkom za konstrukciju. Neka je $ABCD$ četverokut i M, N redom polovišta stranica $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$. Translatirajmo dužinu $\overline{AC}$ u položaj $\overline{DA_1}$ i u položaj $\overline{BB_1}$ (v. sl. 246). Očito je tada DBB_1A_1 paralelogram i $|DB_1| = 2|MN|$. U trokutu $\triangle DB_1C$ tada znamo sve tri stranice i možemo ga konstruirati. Neka je P polovište dužine $\overline{DB_1}$. Ako znamo konstruirati paralelogram DBB_1A_1 znat ćemo pomoću njega konstruirati i četverokut $ABCD$. Točka A_1 leži na kružnici k_1 sa središtem u C polumjera $|AD|$, a točka B leži na kružnici k_2 sa središtem također u C i polumjera $|BC|$. Kako je DBB_1A_1 paralelogram to je P polovište dužine $\overline{A_1B}$, stoga se točke A_1 i B mogu konstruirati kao u primjeru 1 odjeljka o metodi centralne simetrije.

e) Metoda homotetije

Primjer 1. Zadan je šiljasti kut i unutar njegovih krakova točka T. Konstruirajte kružnicu koja dira krakove kuta i prolazi točkom T.

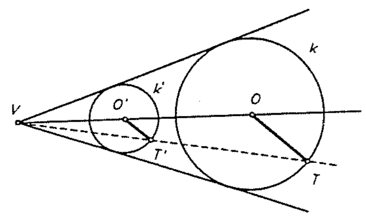
Rješenje. 1) Analiza. Neka je V vrh kuta, T zadana točka i k kružnica koja dira krakove kuta i koja prolazi točkom T. Uzmimo bilo koju kružnicu k' koja dira krakove kuta. Neka je T' jedno od sjecišta VT sa k' (v. sl. 247). Homotetija s centrom u V koja preslikava T' u T očito preslikava i k' u traženu kružnicu k.

2) Konstrukcija. Nacrta se bilo koja kružnica k', koja dira krakove kuta. Neka je T' jedno od sjecišta pravca VT sa k'. Homotetijom kojoj je centar V i koja točku T' preslikava u T se kružnica k' preslika u k. Ako središte O' od k' spojimo sa V, onda središte O od k leži na toj spojnici. Ako sada točkom T povučemo paralelu sa $O'T'$ onda ona tu spojnicu siječe u središtu O kružnice k.

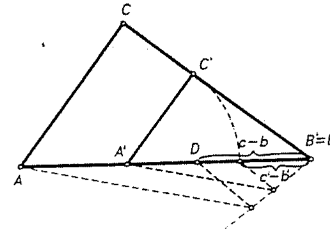
3) Dokaz konstrukcije. Najprije k prolazi kroz T. Treba vidjeti da k dira krakove kuta. Kako se homotetijom krakovi kuta preslikaju u same sebe i tangente u tangente, to k dira krakove.

4) Diskusija. Zadatak ima uvijek dva rješenja. U slučaju da se T nalazi na simetrali zadanog kuta, lakše se do rješenja dolazi tako da se točkom T povuče okomica na simetralu kuta i ona s krakovima kuta čini trokut, pa su tražene kružnice tom trokutu upisana i pripisana kružnica.

Primjer 2. Konstruirajte pravokutni trokut ako je zadano $c - b$ i β.



Sl. 247.



Sl. 248.

Rješenje. 1) Analiza. Ako se konstruira bilo koji pravokutni trokut kojemu je zadan kut β, onda se traženi trokut može konstruirati homotetijom tog trokuta.

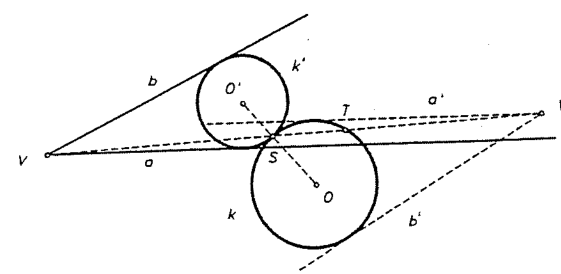
2) Konstrukcija. Nacrta se pravokutni trokut $\triangle A'B'C'$ tako da je $\sphericalangle B' = \beta$ (v. sl. 248). Na polupravcu $B'A'$ nanesu se dužine $|B'D'| = c' - b'$ i $|B'D| = c - b$. Homotetija s centrom u B' koja točku D' preslikava u D preslikava $\triangle A'B'C'$ u traženi trokut $\triangle ABC$. (Za rješenje bez homotetije uočite da je $\sphericalangle CDB = \frac{3\pi}{4} - \frac{\beta}{2}$.)

3) Dokaz konstrukcije je očit.

4) Diskusija. Zadatak ima uvijek jedinstveno rješenje za $c > b$.

Primjer 3. U ravnini su nacrtana dva neparalelna pravca a i b i kružnica k. Konstruirajte kružnicu koja dira a, b i k.

Rješenje. 1) Analiza. Neka je k' kružnica koja dira a, b i kružnicu k u točki S (v. sl. 249). Homotetija s centrom u S, koja O' preslikava u O preslikava k' u k. Neka su a' i b' slike od a i b. Tada su točke V' i V pridružene točke te homotetije. Pravac VV' siječe k u S.



Sl. 249.

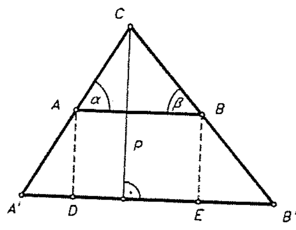
2) Konstrukcija. Konstruira se točka S kao sjecište pravca VV' i kružnice k i koristi se činjenica da je O' na simetrali kuta pravaca a i b.

3) Dokaz konstrukcije provedite sami.

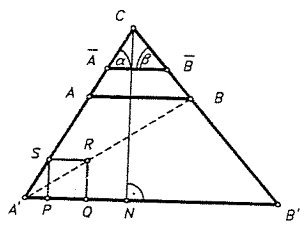
4) Diskusija. Kako općenito postoje četiri tangente paralelne s a i b to postoje četiri spojnice VV', pa to daje osam rješenja. Ako je O na simetrali kuta pravaca a i b, onda konstrukcija ne funkcionira. U tom slučaju se zadatak lako riješi bez homotetije i postoje četiri rješenja.

Primjer 4. Konstruirajte trokut kome su zadani šiljasti kutovi α i β i $c+v_c = p$.

Rješenje. **1) Analiza.** Neka je ΔABC traženi trokut. Nacrtamo trokut $\Delta A'B'C'$ homotetičan s ΔABC (v. sl. 250), tako da mu je visina povučena iz C jednaka $p = c + v_c$. Iz A i B spustimo okomice na $A'B'$ i neka su njihova



Sl. 250.



Sl. 251.

nožišta redom D i E. Kako je visina trokuta ΔABC iz C jednaka v_c, to je visina pravokutnika $DEBA$ jednaka c. Kako je $|AB| = c$, to je taj pravokutnik zapravo kvadrat.

Stoga se zadatak svodi na to da se u trokut $\Delta A'B'C'$ upiše kvadrat kojemu jedna stranica leži na $\overline{A'B'}$, a svaki od preostalih vrhova na po jednoj od preostalih stranica. Taj se kvadrat konstruira homotetijom.

2) Konstrukcija. Nacrtajmo bilo koji trokut $\Delta \bar{A}\bar{B}C$ s kutovima α i β. Zatim ga homotetijom preslikajmo u $\Delta A'B'C'$ tako da je $|CN| = c+v_c$, gdje je N nožište okomice spuštene iz C na $A'B'$. U trokut $\Delta A'B'C$ upišimo bilo koji kvadrat $PQRS$ kao na sl. 251. Pravac $A'R$ siječe $B'C$ u vrhu B traženog trokuta. Točkom B povučemo paralelu sa $A'B'$. Ona siječe $A'C$ u vrhu A.

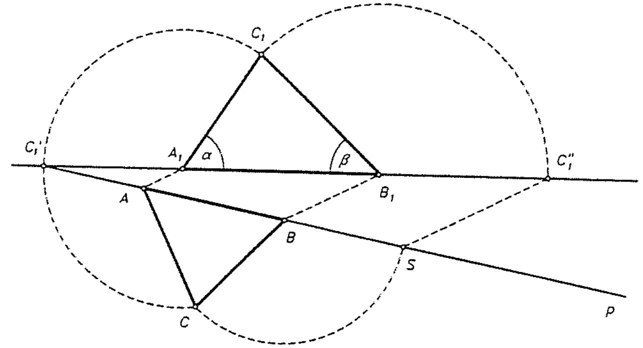
3) Dokaz konstrukcije učinite sami.

4) Diskusija. Zadatak ima uvijek jedinstveno rješenje.

f) Metoda sličnosti

Primjer 1. Konstruirajte trokut ako je zadano α, β i opseg $2s$.

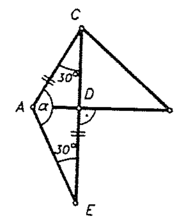
Rješenje. Navedimo samo konstrukciju. Najprije se konstruira bilo koji trokut $\Delta A_1B_1C_1$ s kutovima α i β (dakle sličan traženom). Na pravcu A_1B_1 konstruirajmo točke C_1' i C_1'' tako da je $|C_1'A_1| = |A_1C_1|$ i $|B_1C_1''| = |B_1C_1|$ (v. sl. 252). Točkom C_1' povucimo bilo koji pravac $p \neq A_1B_1$ i konstruirajmo na njemu točku S tako da je $|C_1'S| = 2s$. Točkama A_1, B_1 povucimo paralele sa SC_1'' i one sijeku p redom u točkama A i B. Nad $\overline{AB}$ konstruiramo trokut ΔABC sa stranicama $|C_1'A|$ i $|BS|$ i to je očito traženi trokut. Zadatak ima jedinstveno rješenje ako je $\alpha + \beta < 180°$.



Sl. 252.

Primjer 2. Konstruirajte jednakostraničan trokut kojemu je zadan zbroj osnovke i visine.

Rješenje. Navedimo samo analizu. Neka je ΔABC traženi trokut i $\overline{CD}$ njegova visina. Produžimo $\overline{CD}$ preko vrha D za duljinu stranice $|DE| = |AB|$. Tada je $|AD|/|DE| = \frac{1}{2}$, pa uvijek možemo konstruirati kut $\alpha = \sphericalangle AED$. Dakle se uvijek može konstruirati i trokut ΔACE, pa iz njega onda i sam trokut ΔABC. Zadatak ima uvijek jedinstveno rješenje.



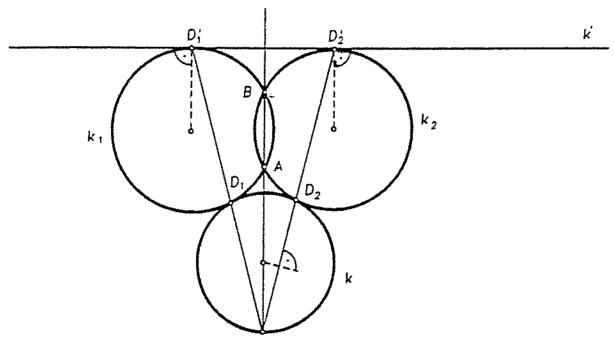
Sl. 253.

g) Metoda inverzije

Ova je metoda osobito podesna za razne konstrukcije u vezi s kružnicama. Osnovna ideja sastoji se u tome da se figura koju treba konstruirati podvrgne inverziji i to takvoj koja neke od kružnica preslikava u pravce i na taj se način zadatak pojednostavnjuje i svodi na analogan zadatak u kojemu su neke kružnice zamijenjene pravcima. Tražena kružnica se onda dobije tako da se natrag tom inverzijom dobiveni pravac ili kružnica preslika u traženu kružnicu ili pravac.

Primjer 1. Dvije kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama A i B. Na pravcu AB zadana je točka $C \neq A, B$, $C \notin \overline{AB}$. Konstruirajte kružnicu k koja prolazi točkom C i dira kružnice k_1 i k_2.

Rješenje. Navedimo analizu koja daje ideju za konstrukciju. Uzmimo inverziju s centrom u C i koeficijentom $R^2 = |CA| \cdot |CB|$. Tada kružnica inverzije preslikava točku A u B i obrnuto. To znači da slika k_1' od k_1 ide kroz A i B, a zbog konformnosti ortogonalno siječe c. Dakle je $k_1' = k_1$. Iz istih razloga je $k_2' = k_2$.

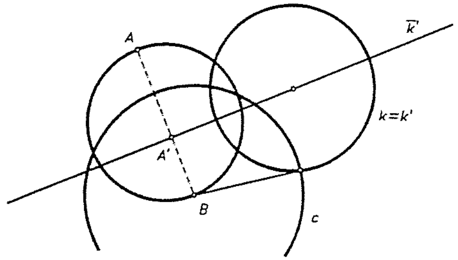


Sl. 254.

Tražena kružnica k je inverzna slika zajedničke tangente k' kružnica k_1 i k_2. Zadatak ima dva rješenja. Na sl. 254. je nacrtano samo jedno od njih.

Primjer 2. U ravnini je nacrtana kružnica k i točke A i B izvan nje. Konstruirajte kružnicu koja prolazi točkama A i B i ortogonalno siječe k.

Rješenje. Navedimo samo analizu koja daje ideju rješenja. Uzmimo inverziju s centrom u B, tako da je polumjer inverzije jednak duljini tangente povučene iz B na k. Kao u prethodnom primjeru slijedi $k = k'$. Neka je A' slika od A. Tražena kružnica $\overline{k}$ se tom inverzijom preslikava u pravac $\overline{k}'$, koji ide kroz A' i okomit je na k. Slika $\overline{k}$ tog pravca je tražena kružnica. Konstrukcija se razabire sa sl. 255.



Sl. 255.

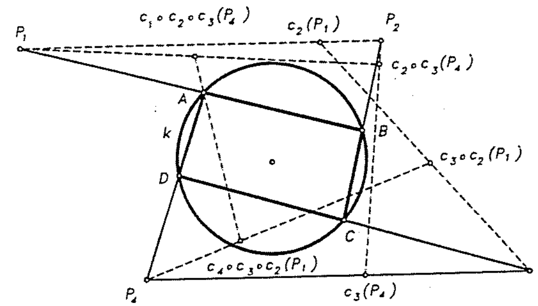
Poznati problem koji se rješava pomoću inverzije je takozvani **Apolonijev problem**. To je problem konstrukcije kružnice koja dira tri zadane kružnice. Riješit ćemo jedan poseban slučaj tog problema. Ostali se slučajevi rješavaju sasvim analogno.

Primjer 3. Tri se kružnice k_1, k_2 i k_3 sijeku u točki O. Konstruirajte kružnicu koja dira kružnice k_1, k_2, k_3.

Rješenje. Navedimo samo analizu i opis rješenja. Neka se k_1, k_2 i k_3 sijeku u O. Uzmimo inverziju s centrom u O i neka kružnica inverzije c siječe sve tri kružnice. Tada se tom inverzijom kružnice k_i preslikaju u pravce k_i', $i = 1, 2, 3$. Pri tome je k_i' upravo potencijala od k_i i c. Kako se inverzijom čuva tangencijalnost to je slika kružnice k koja dira k_1, k_2 i k_3 kružnica k' koja dira spomenute pravce. Konstruira se dakle kružnica k' koja dira te pravce (upisana i pripisane kružnice trokuta), a njena inverzna slika je tražena kružnica k (involutornost). Prema tome zadatak ima četiri rješenja. Provedite tu konstrukciju.

Primjer 4. U ravnini je nacrtana kružnica k i četiri točke P_1, P_2, P_3, P_4 izvan nje. Konstruirajte četverokut $ABCD$ upisan u k tako da pravci na kojima leže stranice četverokuta redom prolaze zadanim točkama.

Rješenje. Navedimo samo analizu koja vodi na konstrukciju.



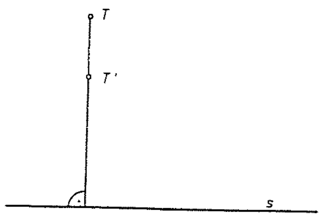
Sl. 256.

Uzmimo inverzije c_i, sa središtima P_i, a polumjeri inverzije neka su duljine tangenata povučenih iz P_i na k. Tada je $c_i(k) = k$, $i = 1, 2, 3, 4$. Dakle je $(c_4 \circ c_3 \circ c_2 \circ c_1)(A) = A$ i $(c_4 \circ c_3 \circ c_2 \circ c_1)(k) = k$. Odaberimo sada kroz A neki pravac i na njemu točke X i Y. Kompozicija $c_4 \circ c_3 \circ c_2 \circ c_1$ preslikava pravac AX u neku kružnicu. Želimo li da je ta slika pravac, onda X ne možemo odabrati bilo kako, već to treba učiniti tako da slika $(c_3 \circ c_2 \circ c_1)(X) = P_4$. To znači da je original točke X jednak $(c_1 \circ c_2 \circ c_3)(P_4)$. Stavimo $(c_1 \circ c_2 \circ c_3)(P_4) = M$. Slično će $c_1 \circ c_2 \circ c_3 \circ c_4$ slika pravca AY biti pravac ako za Y odaberemo točku $N = (c_4 \circ c_3 \circ c_2)(P_1)$. Kako se parnim brojem inverzija ne mijenja $\sphericalangle MAN$ to će točke M, N i A ležati na istom pravcu.

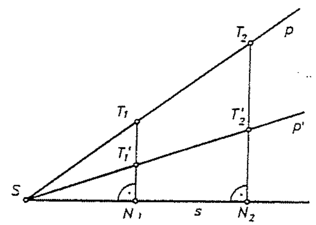
Konstruirat će se dakle $M = (c_1 \circ c_2 \circ c_3)(P_4)$, $N = c_4 \circ c_3 \circ c_2(P_1)$, pa je pomoću MN lako konstruirati točku A. Kako treba postupiti ako je neka točka P_i unutar kružnice?

h) Metoda kontraktibilnih preslikavanja

Neka je s pravac u ravnini i $0 < k < 1$ realan broj. Svakoj točki ravnine pridružimo točku T' tako da su T i T' na pravcu okomitom na s, $|T'N| = k \cdot |TN|$; T i T' s iste strane pravca s (v. sl. 257). Preslikavanje $T \mapsto T'$ zove se **kontrakcija** ravnine M prema osi s, k se zove **koeficijent kontrakcije**, a pravac s **os kontrakcije**. Svaka točka osi s je fiksna točka kontrakcije. Pravci okomiti na s su fiksni pravci, a i os s je fiksan pravac ali točku po točku. Za $k > 1$ dobiju se **dilatacije** ravnine.



Sl. 257.



Sl. 258.

Pokažimo sada da svaka kontrakcija ravnine preslikava pravac na pravac. Uzmimo pravac p koji siječe os s u točki S i kontrakciju s koeficijentom k, koja točku $T_1 \in p$ preslikava u točku T_1' pravca $ST_1' = p'$ (v. sl. 258). Treba pokazati ako je $T_2 \in p$ bilo koja točka da je onda i njena slika $T_2' \in p'$. Prema definiciji kontrakcije je

$$|T_1'N_1| = k \cdot |T_1N_1|, \; |T_2'N_2| = k \cdot |T_2N_2|, \qquad (*)$$

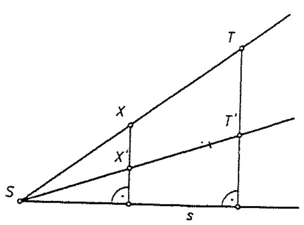
gdje su N_i nožišta okomica spuštenih iz T_i na P, i =1, 2. Trokuti $\triangle SN_1T_1$ i $\triangle SN_2T_2$ su slični, pa vrijedi

$$\frac{|T_1N_1|}{|T_2N_2|} = \frac{|N_1S|}{|N_2S|}. \qquad (**)$$

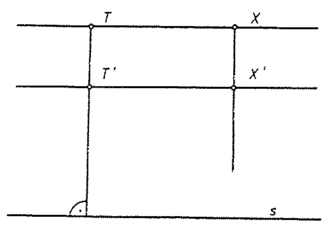
Iz $(*)$ i $(**)$ slijedi

$$\frac{|T_1'N_1|}{|T_2'N_2|} = \frac{|N_1S|}{|N_2S|}$$

pa prema Talesovom teoremu slijedi da su točke S, T_1' i T_2' kolinearne. Lako se vidi da je slika od p čitav pravac p'.



Sl. 259.



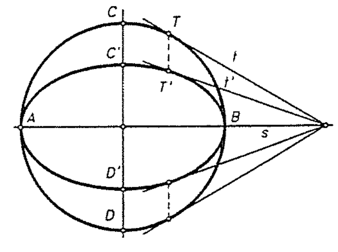
Sl. 260.

Ako je $p \| s$, onda je i $p' \| s$. Odavde slijedi da je svaka kontrakcija određena svojom osi i parom T, T' pridruženih točaka. Da se to pokaže dovoljno je pokazati

da ako su zadani s, T, T', onda za svaku točku X možemo jednoznačno konstruirati njezinu sliku X'. To se vidi ovako. Zadajmo s, T, T' i točku X (v. sl. 259). Neka je S sjecište pravca TX i osi s. Taj se pravac kontrakcijom preslikava u pravac $T'S$. Slika od X je tada očito sjecište pravca ST' i okomice povučene točkom X na s.

Ako je TX paralelan sa s, onda je kontrakcija posljedica činjenice da je slika pravca paralelnog sa s opet pravac paralelan sa s (v. sl. 260).

U pogl. VI o analitičkoj geometriji će biti pokazano da se kontrakcijom kružnice kojoj je središte na osi kontrakcije dobije elipsa i nadalje da se kontrakcijom tangenta kružnice preslikava u tangentu elipse i pri tome diralište u diralište.

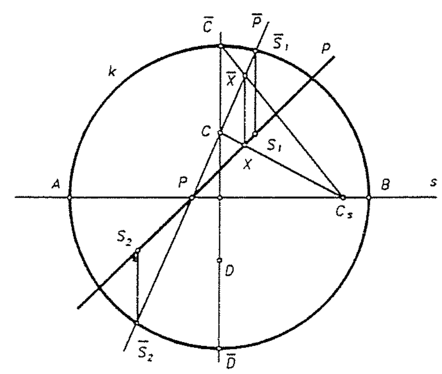


Sl. 261.

Na sl. 261. nacrtana je kružnica promjera $\overline{AB}$, ona se kontrakcijom prema osi s preslikava u elipsu s osima $\overline{AB}$ i $\overline{C'D'}$. Ta se činjenica može zgodno koristiti u konstruktivnim zadacima u vezi s elipsom.

Primjer 1. Elipsa je zadana svojim osima $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Konstruirajte sjecišta te elipse sa zadanim pravcem p.

Rješenje. Neka je pravac $s = AB$ os kontrakcije. Nacrtajmo nad $\overline{AB}$ kao dijametrom kružnicu k i neka je $\overline{\overline{C}\,\overline{D}}$ dijametar okomit na $\overline{AB}$ (v. sl. 262). Kontrakcija prema osi s koja točku $\overline{C}$ preslikava u točku C preslikat će kružnicu k u elipsu s osima $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Neka je $\overline{p}$ praslika pravca p i neka ona siječe k u točkama $\overline{S_1}$ i

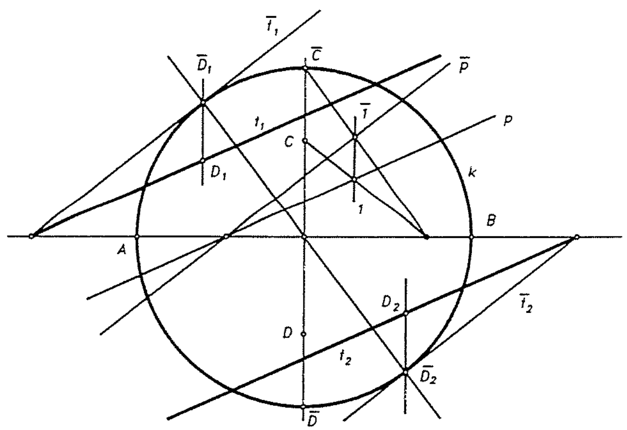


Sl. 262.

$\overline{S_2}$. Slike S_1 i S_2 točaka $\overline{S_1}$ i $\overline{S_2}$ su tada sjecišta pravca p s elipsom. $\overline{p}$ se konstruira ovako. Sjecište od p i s se preslika u sebe. Uzmimo na p neku točku X. Spojnica CX siječe s u C_s. Spojimo li $\overline{C}$ sa C_s na tom će pravcu ležati praslika $\overline{X}$ točke X. Ako točkom X povučemo okomicu na s ona siječe $\overline{C}C_s$ u točki $\overline{X}$. Spojnica $P\overline{X}$ je traženi pravac $\overline{p}$.

Primjer 2. Elipsa je zadana svojim osima $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Konstruirajte one tangente elipse koje su paralelne sa zadanim pravcem p.

Rješenje. Konstruira se kružnica k kao u prethodnom primjeru i opet uzme kontrakcija prema osi $s = AB$ koja točku $\overline{C}$ preslikava u točku C (v. sl. 263). Tangente $\overline{t_1}$ i $\overline{t_2}$ kružnice k koje su paralelne s praslikom $\overline{p}$ pravca p preslikavaju



Sl. 263.

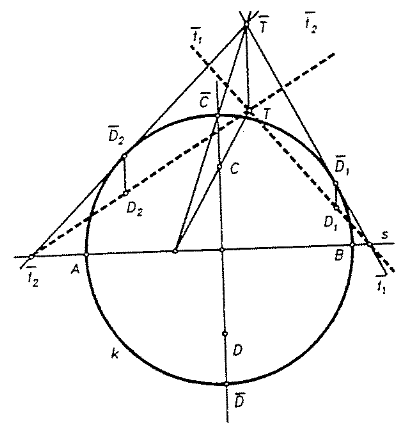
se navedenom kontrakcijom u tangente t_1 i t_2 elipse, a dirališta $\overline{D_1}$ i $\overline{D_2}$ u dirališta D_1 i D_2 od t_1 i t_2 sa elipsom.

Primjer 3. Elipsa je zadana svojim osima $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Konstruirajte one tangente te elipse koje prolaze zadanom točkom T.

Rješenje. Neka je $s = AB$ os kontrakcije i k kružnica kao u prethodnom primjeru (v. sl. 264). Sada se za točku T na standardan način nađe njezina praslika $\overline{T}$ i iz nje konstruiraju tangente $\overline{t_1}$ i $\overline{t_2}$ na k. Neka su $\overline{D_1}$ i $\overline{D_2}$ dirališta tangenata $\overline{t_1}$ i $\overline{t_2}$. Slike t_1 i t_2 tangenata $\overline{t_1}$ i $\overline{t_2}$ su tada tangente elipse, a slike D_1 i D_2 dirališta $\overline{D_1}$ i $\overline{D_2}$ su dirališta tangenata t_1 i t_2 s elipsom.

7.3. Algebarska metoda

Suština algebarske metode se sastoji u tome da se algebarski odredi veličina pomoću koje se rješava zadana konstrukcija. Konstruira se ta veličina i onda rješava zadatak. U tu je svrhu potrebno znati neke važne konstrukcije.

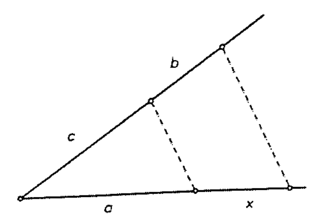


Sl. 264.

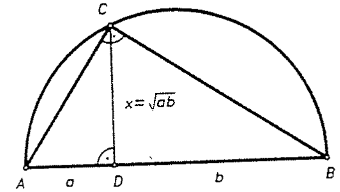
Za zadane dužine čije su duljine a, b, c, prirodni broj n i zadanu jediničnu dužinu treba konstruirati dužine čije su duljine

1. $a + b$, $a - b$;
2. na, $\frac{a}{n}$;
3. $\frac{ab}{c}$ i specijalni slučajevi ab i $\frac{a}{c}$;
4. $\sqrt{ab}$ i specijalni slučaj $\sqrt{a}$;
5. $\sqrt{a^2+b^2}$ i $\sqrt{a^2-b^2}$.

Konstrukcije **1** i **2** znamo od prije. Konstruiranje dužine $x = \frac{ab}{c}$ za zadane dužine a, b i c vrši se pomoću Talesovog teorema o proporcionalnosti na krakovima kuta. Konstrukcija je očita sa slike 265. Prema Talesovom teoremu je $x : b = a : c$, a odavde je $x = \frac{ab}{c}$. Specijalni slučaj $x = ab$ dobiva se za $c = 1$, a $x = \frac{a}{c}$ za $b = 1$.



Sl. 265.



Sl. 266.

Konstrukcija $x = \sqrt{ab}$ dobiva se pomoću Euklidovog poučka (v. sl. 266) i Talesovog teorema. Nad dužinom $\overline{AB}$, $|AB| = a+b$ kao nad dijametrom konstruira se polukružnica i u točki D digne okomica na AB. Ta okomica siječe polukružnicu u točki C. Prema Talesovom teoremu trokut ΔABC je pravokutan s pravim kutom pri vrhu C. Prema Euklidovom poučku je $x = |CD| = \sqrt{ab}$. Specijalno se $\sqrt{a}$ dobiva za $b = 1$.

Konstrukcija dužina $\sqrt{a^2+b^2}$ i $\sqrt{a^2-b^2}$ vrši se pomoću konstrukcija odgovarajućih pravokutnih trokuta.

Pomoću ovih konstrukcija može se konstruirati svaka veličina koja se iz zadanih dužina dobiva kombinacijama operacija $+, -, \cdot, :$ i vađenja drugog korijena. Navedimo neke primjere.

Primjer 1. Za zadane dužine a, b, c, d, e konstruirajte dužinu $x = \frac{abc}{de}$.
Rješenje. Najprije se prema 3 konstruira $f = \frac{ab}{d}$ i nakon toga $x = \frac{fc}{e}$.

Primjer 2. Za zadane a, b, c, d konstruirajte $x = \sqrt[4]{abcd}$.
Rješenje. Najprije se prema 4 konstruiraju $y = \sqrt{ab}$ i $z = \sqrt{cd}$ i nakon toga istom konstrukcijom $x = \sqrt{yz}$.

Primjer 3. Za zadane dužine m, n, p konstruirajte dužinu $x = \sqrt{\frac{mn+np+mp}{3}}$.
Rješenje. Najprije se prema 3 konstruiraju

$$a = \sqrt{mn},\ b = \sqrt{np},\ c = \sqrt{mp}.$$

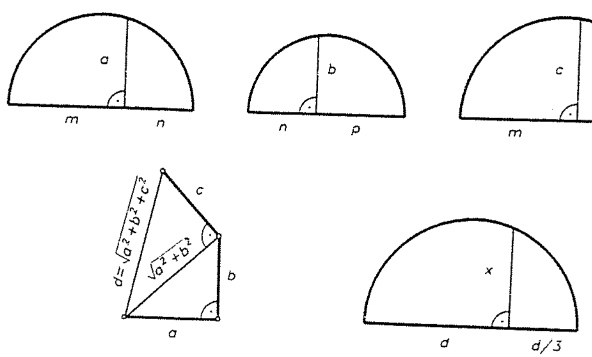
Tada je

$$x = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Uzastopnom primjenom konstrukcije 5 konstruira se $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ i onda prema 4

$$x = \sqrt{d \cdot \frac{d}{3}}.$$

Tok konstrukcije je prikazan na slici 267.

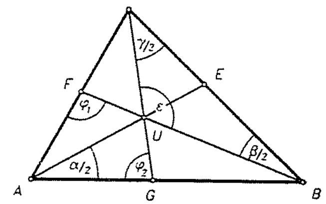


Sl. 267.

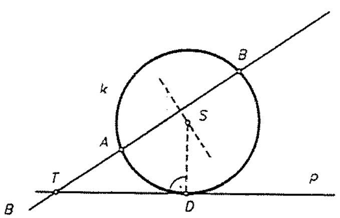
Pokažimo sada na primjerima kako se kod konstrukcija koristi algebarska metoda.

Primjer 4. U ravnini su zadana tri pravca koji se sijeku i točka A na jednom od njih. Konstruirajte trokut kojemu je A jedan vrh a simetrale kutova leže na zadanim pravcima.

Rješenje. Uvedimo oznake kao na slici 268. Kad bi znali konstruirati kut $\frac{\alpha}{2}$ znali bi izvesti i konstrukciju. φ_1 je vanjski kut trokuta ΔFBC, pa je $\varphi_1 = \frac{\beta}{2} + \gamma$. Na isti način je φ_2 vanjski kut trokuta ΔGBC, pa je $\varphi_2 = \beta + \frac{\gamma}{2}$. Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo $\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{3}{2}(\beta+\gamma) = \frac{3}{2}(180° - \alpha)$. Zbroj kutova u četverokutu $AGUF$ jednak je $\alpha + \varepsilon + \varphi_1 + \varphi_2 = 360°$, pa je $\alpha + \varepsilon + \frac{3}{2}(180° - \alpha) = 360°$, pa slijedi $\frac{\alpha}{2} = \varepsilon - 90°$. Kako ε znamo, to kut $\frac{\alpha}{2}$ znamo konstruirati, pa onda i riješiti zadatak.



Sl. 268.



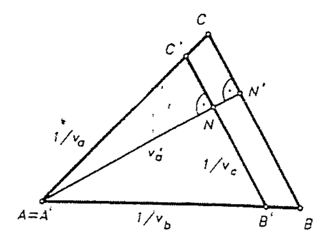
Sl. 269.

Primjer 5. Zadan je pravac p i točke A i B s iste strane od p. Konstruirajte kružnicu k koja dira pravac p i prolazi točkama A i B.

Rješenje. Pretpostavimo da je zadatak riješen. Spojimo A sa B do sjecišta T s pravcem p (v. sl. 269). Tada je $|TA| \cdot |TB|$ potencija točke T obzirom na kružnicu k. Označimo dirалište od k i p sa D. Potencija točke T je tada jednaka i broju $|TD|^2$. Dakle je $|TD|^2 = |TA| \cdot |TB|$, pa je stoga $|TD| = \sqrt{|TA| \cdot |TB|}$. Kako znamo $|TA|$ i $|TB|$ možemo konstruirati i dužinu $\overline{TD}$, pa pomoću nje i točku D. Okomica na p povučena točkom D siječe simetralu dužine $\overline{AB}$ u središtu S tražene kružnice. Očito ako pravac AB siječe p zadatak ima dva rješenja. Ako je pravac AB paralelan sa p zadatak ima jedinstveno rješenje i S je tada polovište od $\overline{AB}$.

Primjer 6. Konstruirajte trokut kojemu su zadane sve tri visine v_a, v_b, v_c.

Rješenje. Označimo površinu traženog trokuta sa P. Tada je $2P = av_a = bv_b = cv_c$. Odavde je $a : b : c = 1/v_a : 1/v_b : 1/v_c$. Dakle je traženi trokut sličan



Sl. 270.

s trokutom $\triangle A'B'C'$ kojemu su stranice jednake recipročnim vrijednostima visina $\triangle ABC$. Slijedi da se $\triangle ABC$ može ovako konstruirati. Konstruira se $\triangle A'B'C'$ tako da je $|A'B'| = 1/v_c$, $|B'C'| = 1/v_a$ i $|C'A'| = 1/v_b$. Označimo sa v_a' visinu trokuta $\triangle A'B'C'$. Uzmimo sada homotetiju s centrom u $A' = A$ koja preslikava dužinu $v_a' = |A'N|$ u dužinu $v_a = |AN'|$ (v. sl. 270).

Primjer 7. Konstruirajte tetivni četverokut kojemu su zadane duljine stranica a, b, c, d.

Rješenje. Neka su e i f dijagonale četverokuta i R radijus opisane kružnice (v. sl. 271). Prema **Ptolomejevom teoremu** je $ef = ac + bd$. Inverzijom se može također dokazati da vrijedi tzv. **Brahmaguptina**[14] **formula**(uradite to sami)

$$\frac{f}{e} = \frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

Množenjem ovih jednakosti dobivamo

$$|AC|^2 = f^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} \qquad (*)$$

Time znamo (algebarski) konstruirati f, pa stoga i $\triangle ABC$. No možemo postupiti i ovako. Primijenimo na trokut $\triangle ABC$ formulu $R^2 = \frac{a^2b^2f^2}{16P^2}$, gdje je P površina tog trokuta. Dobivamo

$$R^2 = \frac{a^2b^2f^2}{[(a+c)^2 - f^2][f^2 - (a-c)^2]},$$

što uvrštavanjem $(*)$ i sređivanjem daje

$$R^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)(a+b+c-d)}.$$

Označimo li sa $2s = a+b+c+d$ opseg četverokuta, dobivamo

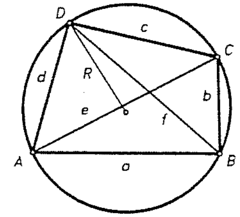
$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}.$$

Algebarskom metodom dakle konstruiramo radijus R, a dalja konstrukcija četverokuta je nakon toga jasna. ∎

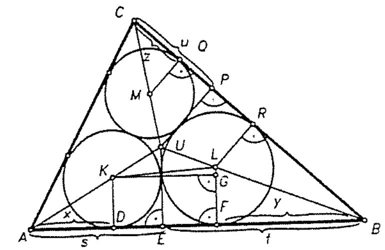
Primjer 9 (Malfattijev[15] **problem).** U zadani trokut $\triangle ABC$ upišite tri kružnice od kojih svaka dira po dvije stranice trokuta i po dvije od preostalih kružnica.

Rješenje. Središta K, L, M tih kružnica leže na simetralama unutarnjih kutova trokuta (v. sl. 272). Neka je U središte upisane kružnice i r njegov polumjer. Označimo dirališta tih kružnica sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ sa D, F, R, Q, a nožišta

[14] Brahmagupta (598– ~ 660), indijski matematičar i astronom.
[15] Gianfrancesco Malfatti (1731–1807), talijanski matematičar.



Sl. 271.



Sl. 272.

okomica povučenih iz točke U na stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ sa E i P. Neka su redom r_1 i r_2 polumjeri kružnica sa središtima K i L. Neka je $|AE| = s$, $|BE| = t$, $|AD| = x$ i $|BF| = y$. Nožište okomice povučene iz K na LF označimo sa G. Tada vrijedi

$$|LG| = r_2 - r_1, \quad |KG| = \sqrt{r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2} = 2\sqrt{r_1 r_2}.$$

Iz sličnosti $\triangle ADK \sim \triangle AEU$ slijedi

$$r_1 = \frac{xr}{s},$$

a iz $\triangle BFL \sim \triangle BEU$

$$r_2 = \frac{yr}{t}.$$

Dalje je

$$|AB| = |AD| + |DF| + |FB|,$$

tj.

$$x + y + 2\sqrt{r_1 r_2} = s + t.$$

Ako ovamo uvrstimo vrijednosti za r_1 i r_2 dobivamo

$$x + y + \frac{2r}{\sqrt{st}}\sqrt{xy} = s + t. \qquad (1)$$

Uz oznake $|PC| = u$, $|QC| = z$ dobivamo analogno

$$y + z + \frac{2r}{\sqrt{tu}}\sqrt{yz} = t + u. \qquad (2)$$

Analogno se za treću stranicu dobiva jednakost

$$z + x + \frac{2r}{\sqrt{us}}\sqrt{zx} = u + s. \qquad (3)$$

Sustav (1), (2), (3) je sustav jednadžbi za nepoznanice x, y, z. Njegovo rješenje je

$$2x = s + t + u - r + \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2},$$
$$2y = s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2},$$
$$2z = s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} + \sqrt{r^2 + u^2}.$$

Dužine čije su duljine x, y, z se na osnovu prethodnih jednakosti mogu konstruirati na slijedeći način. Kako je

$$|UA| = \sqrt{r^2+s^2}, \quad |UB| = \sqrt{r^2+t^2}, \quad |UC| = \sqrt{r^2+u^2},$$

to najprije konstruiramo

$$m = \frac{1}{2}(|UA|+|UB|+|UC|-s-t-u+r),$$

a zatim

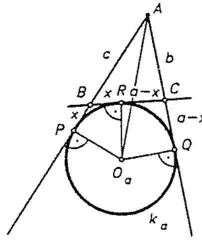
$$x = |UA|-m, \quad y = |UB|-m, \quad z = |UC|-m.$$

Iz x, y, z se tada lako konstruiraju tražene kružnice.

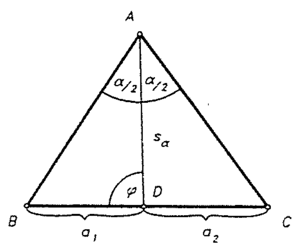
Primjer 10. Zadan je kut s vrhom A i točka T u ravnini. Točkom T povucite pravac koji krakove siječe u točkama B i C, tako da ΔABC ima zadani opseg $2s$.

Rješenje. Pretpostavimo da je zadatak riješen i neka je $k_a(O_a, r_a)$ pripisana kružnica trokuta ΔABC te neka ona dira stranice i njihove produžetke u točkama P, Q, R kao na sl. 273. Iz $|BP| = |BR| = x$ slijedi $c+x = b+a-x \Rightarrow x = s-c$, pa je $|AP| = c+x = c+s-c = s$. Konstrukcija je stoga ova. Na krakovima kuta odmjerimo dužine $|AP| = |AQ| = s$. U točkama P i Q podignemo okomice na krakove. Te se okomice sijeku u točki O_a pa iz točke T konstruiramo tangentu na kružnicu $k = k_a(O_a, |O_aP|)$ i to je traženi pravac.

Imamo 0, 1 ili 2 rješenja ovisno da li je točka unutar ili van kuta, unutar ili van kružnice k. Detalje ostavljamo čitatelju. ∎



Sl. 273.



Sl. 274.

Primjer 11. Konstruirajte trokut ako je zadano a, α, s_α. Ekvivalentno: Unutar danog kuta, na njegovoj simetrali je dana točka. Tom točkom treba položiti pravac koji od krakova kuta odsijeca danu duljinu a.

Rješenje. Zadatak se rješava algebarskom metodom i to upotrebom trigonometrije. Neka je ΔABC traženi trokut. Uvedimo oznake kao na slici 274. Prema sinusovom poučku primjenjenom na trokute ΔABD i ΔADC dobivamo

$$a_1 = \frac{s_\alpha \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\varphi+\frac{\alpha}{2})} \quad a_2 = \frac{s_\alpha \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\varphi-\frac{\alpha}{2})}.$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobije se

$$a = a_1 + a_2 = \frac{2s_\alpha \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\varphi}{\sin^2\varphi - \sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

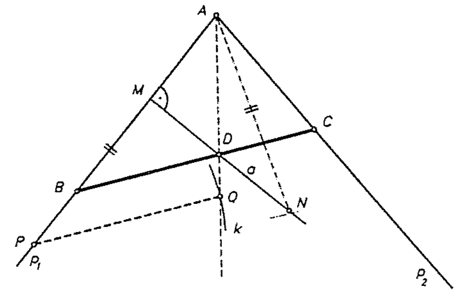
odnosno

$$a\sin^2\varphi - 2s_\alpha \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\varphi - a\sin^2\frac{\alpha}{2} = 0.$$

To je kvadratna jednadžba u $\sin\varphi$ i njezino je pozitivno rješenje

$$\sin\varphi = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{a}\left(s_\alpha\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{s_\alpha^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + a^2}\right). \qquad (*)$$

Iz ovog izraza slijedi da se $\sin\varphi$ može konstruirati, pa i φ, a pomoću φ traženi trokut. Dobiveni rezultat omogućava konstrukciju. Uzmimo u ravnini bilo koju točku A i povucimo točkom A dva polupravca p_1 i p_2 koji zatvaraju zadani kut α. Konstruiramo simetralu kuta α i na njoj točku D takvu da je $|AD| = s_\alpha$. Neka je



Sl. 275.

M nožište okomice spuštene iz točke D na p_1. Na pravcu MD odredimo točku N tako da je $|MN| = a$ (v. sl. 275). Odredimo na p_1 točku P tako da je $|MP| = |AN|$. Neka je k kružnica sa središtem u P polumjera a i Q sjecište od k i simetrale kuta α. Paralela kroz D sa PQ siječe p_1 i p_2 u vrhovima B i C traženog trokuta.

Da se pokaže da je ovime zaista konstruiran traženi trokut treba vidjeti da je $\measuredangle PQA = \varphi$, tj. da za $\sin\varphi$ vrijedi $(*)$. To se vidi tako da se konstrukcija poprati računom. Prema konstrukciji je $|AM| = s_\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$. Kako je $|MN| = a$ to je $|AN| = \sqrt{s_\alpha^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+a^2}$, pa je $|MP| = \sqrt{s_\alpha^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+a^2}$. U trokutu ΔPQA je sada

$$|AP| = |AM| + |MP| = s_\alpha\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{s_\alpha^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+a^2}$$

i $|PQ| = a$, pa iz sinusovog poučka primjenjenog na taj trokut slijedi da je

$$\sin(\measuredangle PQA) = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{a}\left(s_\alpha\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{s_\alpha^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+a^2}\right),$$

pa je zaista $\varphi = \sphericalangle PQA$. Ovime je ispravnost konstrukcije dokazana. Očito zadatak ima rješenje ako je $a \geq 2s_\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, jer samo tada k siječe simetralu kuta α. Pri tome ako je $a = 2s_\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ zadatak ima jedno rješenje, a za $a > 2s_\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ dva rješenja, no samo prividno jer se u tom slučaju dobivaju sukladni trokuti. Dakle zadatak ima jedinstveno rješenje.

Napomena. Uočite da se ova konstrukcija svodi na sljedeće. Zadan je kut svojim kracima i na simetrali kuta točka T. Točkom T povucite pravac tako da njegov odrezak unutar krakova kuta ima zadanu duljinu. U prethodnom primjeru mi smo pokazali da je ta konstrukcija izvodljiva ravnalom i šestarom. Interesantno je napomenuti ako točka T nije na simetrali kuta, onda konstrukcija nije izvodljiva ravnalom i šestarom. O tome više vidite u §8.

PETAK

7.4. Zlatni rez i konstrukcija pravilnog peterokuta i deseterokuta

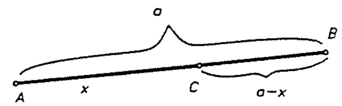
Definirajmo najprije zlatni rez.

Ako neka točka dijeli dužinu tako da se cjelina prema većem dijelu odnosi kao veći dio prema manjem, onda kažemo da ta **točka dijeli dužinu u zlatnom rezu.**

Nađimo sada za zadanu dužinu zlatni rez. Neka je dana dužina $\overline{AB}$ i neka točka $C \in \overline{AB}$ dijeli dužinu $\overline{AB}$ u zlatnom rezu. Dužina $\overline{AC}$ se još zove i zlatnim rezom dužine $\overline{AB}$.

Neka je $a = |AB|$, $x = |AC|$. Tada je $a - x = |BC|$. Prema definiciji zlatnog reza mora biti

$$a : x = x : (a - x).$$



Sl. 276.

Odavde je

$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$

pa je

$$x_{1,2} = \frac{a}{2}(\pm\sqrt{5} - 1).$$

Kako točka C leži na $\overline{AB}$, to odavde slijedi da je

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1). \tag{1}$$

Na osnovu formule (1) sada lako konstruiramo točku C koja zadanu dužinu $\overline{AB}$ dijeli u zlatnom rezu.

Nacrtajmo dužinu $\overline{AB}$ i pravokutni trokut $\triangle ABO$ tako da je kod B pravi kut i $|OB| = \frac{1}{2}|AB|$. Zatim $\overline{OB}$ nanesimo na OA od točke O tj. konstruiramo točku P tako da je $|OP| = |OB|$. Prema Pitagorinom poučku imamo

$$|OA|^2 = |AB|^2 + |BO|^2 = |AB|^2 + \frac{1}{4}|AB|^2 = \frac{5}{4}|AB|^2.$$

Dakle je

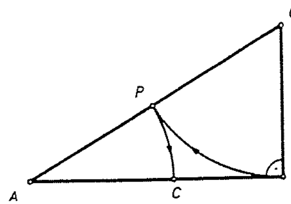
$$|OA|^2 = \frac{5}{4}a^2,$$

pa je

$$|OA| = \frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

Ako je C točka na AB takva da je $|AC| = |AP|$, tada je

$$|AC| = |AO| - |OP| = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2}.$$



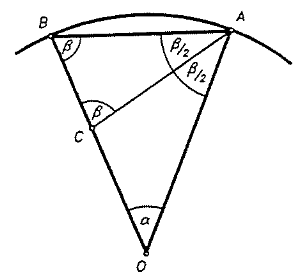
Sl. 277.

Dakle je

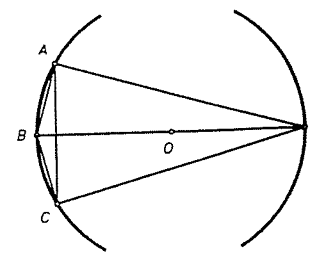
$$|AC| = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Prema (1) slijedi da točka C dijeli dužinu AB u zlatnom rezu.

Uzmimo sada pravilni deseterokut i neka je $\overline{AB}$ jedna njegova stranica, O središte opisane kružnice i r njezin polumjer, $|AB| = s_{10}$. Označimo kutove kao



Sl. 278.



Sl. 279.

na slici 278. Neka simetrala kod A siječe $\overline{OB}$ u točki C. Jer se radi o pravilnom deseterokutu to je $\alpha = 36°$ i $\beta = 72°$. Odavde slijedi da je $\sphericalangle BCA = 180° - \frac{3}{2}\beta = 72° = \beta$ i $\alpha = \frac{1}{2}\beta$. Dakle je $|AC| = |AB| = |OC|$. Kako su trokuti $\triangle OAB$ i $\triangle ABC$ slični (K–K–K) to vrijedi

$$|OA| : |AB| = |AB| : |BC|.$$

Iz ove dvije jednakosti slijedi

$$|OB| : |OC| = |OC| : |BC|,$$

dakle točka C dijeli polumjer $\overline{OB}$ u zlatnom rezu. Dakle, **stranica pravilnog deseterokuta jednaka je zlatnom rezu polumjera deseterokutu opisane kružnice** tj. $s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Nađimo sada duljinu stranice pravilnog peterokuta upisanog u kružnicu polumjera r. Promotrimo na slici 279. tetivni četverokut $ABCD$, gdje su A, B i C tri uzastopna vrha pravilnog deseterokuta. Tada je $|AB| = |BC| = s_{10}$. Prema konstrukciji je

$$|BD| = 2r. \qquad (2)$$

Prema (1) je

$$|AD| = |DC| = \sqrt{4r^2 - s_{10}^2} \overset{(1)}{=} \sqrt{4r^2 - (\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1))^2},$$

dakle

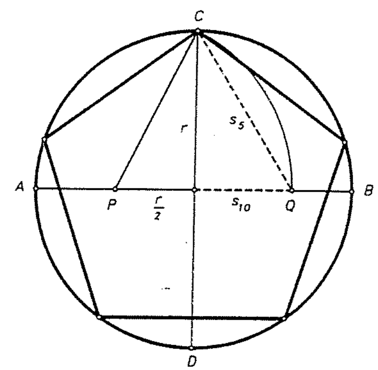
$$|AD| = |DC| = \frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}. \qquad (3)$$

Prema Ptolomejevom teoremu sada imamo (četverokut $ABCD$ je tetivni)

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|.$$

Prema slici 279 je $|AB| = |BC|$ i $|CD| = |AD|$, pa ako to uvrstimo u prethodnu jednakost dobit ćemo:

$$|AC| = \frac{2|BC| \cdot |AD|}{|BD|}.$$



Sl. 280.

Uvrstimo li ovamo (1), (2) i (3) dobijamo

$$|AC| = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = s_5. \qquad (4)$$

Dobili smo dakle duljinu stranice pravilnog peterokuta upisanog u kružnicu polumjera r. Dakle

$$|AC| = s_5.$$

Na osnovu ovoga možemo konstruirati stranicu pravilnog peterokuta upisanog u kružnicu polumjera r (sl. 280).

Povucimo promjer $\overline{AB}$ i na njega okomiti promjer $\overline{CD}$. Neka je P polovište od $\overline{AO}$. Oko P opišimo luk kružnice koja ide kroz C. Taj luk siječe $\overline{OB}$ u točki Q. Tvrdimo da je $|CQ|$ duljina stranice u tu kružnicu upisanog peterokuta, a $|OB|$ stranica u tu istu kružnicu upisanog pravilnog deseterokuta.

Da to dokažemo uočimo pravokutni trokut ΔPOC. Iz tog trokuta je

$$|PC| = \sqrt{|PO|^2 + |OC|^2} = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2} = \frac{r}{2}\sqrt{5}.$$

Prema konstrukciji je $|PQ| = |PC|$, pa je

$$|PQ| = \frac{r}{2}\sqrt{5}.$$

Sada je

$$|OQ| = |PQ| - |PO| = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Usporedba s (1) daje

$$s_{10} = |OQ|.$$

Dalje iz ΔCOQ imamo

$$|CQ| = \sqrt{|OQ|^2 + |OC|^2} = \sqrt{\frac{r^2}{2}(\sqrt{5}-1)^2 + r^2}.$$

Dakle

$$|CQ| = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Na osnovu (4) zaključujemo da je $s_5 = |CQ|$. Konstrukcija pravilnog peterokuta i deseterokuta ako je zadana stranica svodi se na prethodne konstrukcije. Dovoljno je konstruirati bilo koji pravilni peterokut i onda ga homotetijom preslikati tako da mu stranica ima unaprijed zadanu duljinu.

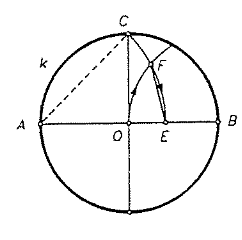
Konstrukcija pravilnog peterokuta omogućava nam i konstrukciju pravilnog petnaesterokuta. Kako je središnji kut pravilnog petnaesterokuta jednak 24° i kako je $24^\circ = 2 \cdot (72^\circ - 60^\circ)$, to kut od 24° možemo konstruirati ravnalom i šestarom, pa i petnaesterokut upisan u zadanu kružnicu.

Mi ćemo kasnije vidjeti da se svaki pravilni poligon ne može konstruirati ravnalom i šestarom; takav je na primjer pravilni sedmerokut, deveterokut itd. (vidi § 8)

Postoje međutim vrlo točne približne konstrukcije pravilnog sedmerokuta i deveterokuta, koje su u praksi više nego dostatno točne.

Tako je već njemački slikar i grafičar Albrecht Dürer (1441-1528) uočio da je stranica u kružnicu upisanog pravilnog sedmerokuta vrlo približno jednaka polovini stranice u tu kružnicu upisanog jednakostraničnog trokuta. Lako se vidi da je pogreška te konstrukcije $0,17\%$ što je praktički zanemarivo.

Navedimo još i približnu konstrukciju pravilnog deveterokuta upisanog u zadanu kružnicu. Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ bilo koja dva okomita promjera kružnice. Oko A opiše se luk kružnice kroz C i neka on siječe $\overline{AB}$ u E, a oko B luk kružnice kroz O i neka on siječe luk $\overset{\frown}{CE}$ u F. Tada je $|EF|$ približna duljina stranice pravilnog deveterokuta upisanog u zadanu kružnicu k. Pogreška ove konstrukcije je praktički zanemariva i iznosi oko $0,25\%$.



Sl. 281.

7.5. Mohr-Mascheronijeve konstrukcije

Konstrukcije izvodive samo šestarom zovemo **Mohr–Mascheronijevim konstrukcijama.** Mohr[16] (1672) i Mascheroni[17] (1797) neovisno jedan od drugoga dokazali su ovaj teorem:

TEOREM 1 (Mohr-Mascheroni). *Svaka geometrijska konstrukcija koja se može izvesti ravnalom i šestarom izvodljiva je i samo šestarom.*

Dokaz. Svaka geometrijska konstrukcija koja je izvodljiva sa šestarom i ravnalom svodi se na ove tri temeljne konstrukcije:

A. Sjecište dvaju pravaca.

B. Sjecište pravca i kružnice.

C. Sjecište dviju kružnica.

Želimo li dakle dokazati Mohr–Mascheronijev teorem treba dokazati da su sve ove tri temeljne konstrukcije izvodljive samo šestarom. Konstrukcija C je očito izvodljiva samo šestarom. Preostaju samo A i B. Pri tome uzimamo da je pravac zadan svojim dvjema točkama. Pokazat ćemo da su temeljne konstrukcije izvodljive samo sa šestarom ako su samo sa šestarom izvodljive ove dvije konstrukcije:

K_1. Konstrukcija inverzne slike točke.

K_2. Konstrukcija središta kružnice koja je zadana sa svoje tri točke.

Da su u ovom slučaju temeljne konstrukcije A i B izvodljive samo šestarom vidi se ovako:

A. Neka su nam zadana dva pravca p i q sa po svoje dvije točke. Odaberimo bilo koju točku O koja ne leži ni na jednom od tih pravaca. Uzmimo inverziju s centrom u O i bilo kojeg polumjera. Kako p i q ne prolaze centrom inverzije to su njihove slike kružnice koje idu tim centrom. Neka je p zadan sa A i B, q sa C i D. Prema K_1 možemo naći A' i B', te C' i D'. Prema K_2 ako imamo točke O, A' i B' možemo naći kružnicu p' određenu tim točkama. Na isti način je q' kružnica određena sa O, C', D' pa tako možemo naći sjecište T tih kružnica. Prema K_1 nađemo T' i to je zajednička točka pravaca p i q.

B. Neka je pravac p zadan točkama A i B, a kružnica k sa tri svoje točke C, D, E. Opet uzmimo inverziju s centrom O koji nije niti na p niti na k. Polumjer inverzije neka je po volji. Pravac p se preslikava u kružnicu p' koja je određena točkama O, A' i B', koje prema K_1 znamo konstruirati a prema K_2 znamo konstrirati i p'. Na isti način znamo konstruirati i k' jer je to kružnica kroz točke C', D', E' a nju znamo konstruirati. Slike sjecišta kružnica p' i k' su sjecišta zadanog pravca i kružnice.

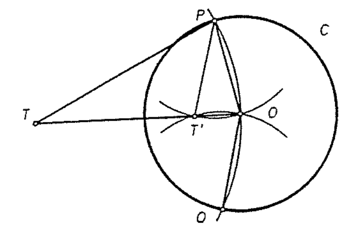
Dokažemo li dakle izvodljivost konstrukcija K_1 i K_2 samim tim smo dokazali i Mohr–Mascheronijev teroem.

[16] Georg Mohr (1640–1697), danski matematičar.

[17] Lorenzo Mascheroni (1750–1800), talijanski matematičar.

Tvrdnja 1. Ako je zadana inverzija svojim centrom O i kružnicom inverzije c, onda je za svaku točku $T \neq O$ ravnine moguće samo sa šestarom konstruirati njezinu sliku T'.

Dokaz tvrdnje 1. I. Neka je dakle zadana inverzija sa O i c i neka je točka T van kružnice (v. sl. 282). Tada se T' može ovako konstruirati: točkom T kao središtem opiše se kružnica koja prolazi kroz O i neka ona siječe c u točkama P i Q. Tim točkama kao središtem opišimo kružnice koje idu kroz O. Drugo sjecište tih kružnica je tražena točka T'. Da je T' zaista na OT to je jasno. Pokažimo da su T



Sl. 282.

i T' zaista pridružene točke u toj inverziji. Trokuti $\triangle OT'P$ i $\triangle OPT$ su slični jer su jednakokračni i imaju zajednički kut kod O, pa se podudaraju u svim kutovima. Iz te sličnosti slijedi

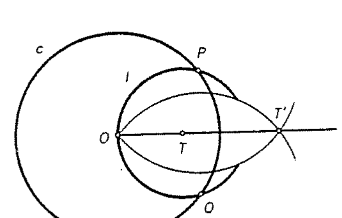
$$|OT| : |OP| = |OP| : |OT'|,$$

odnosno

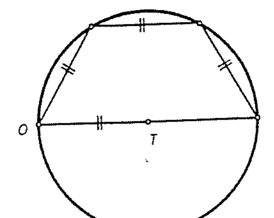
$$|OT| \cdot |OT'| = |OP|^2$$

pa su T i T' pridružene točke.

II. Neka je T unutar kruga bliže kružnici nego središtu tj. $|OT| > \frac{r}{2}$ (v. sl. 283). Konstrukcija je u ovom slučaju analogna. Točkom T (kao središtem) opiše se kružnica kroz O i neka ona siječe c u točkama P i Q. Sada opet točkama P i Q (kao središtima) opišemo kružnice kroz O. Drugo sjecište T' tih dviju kružnica je inverzna slika od T. Dokaz ispravnosti je formalno isti kao pod I.



Sl. 283.



Sl. 284.

III. Neka je sada $|OT| \leq \frac{r}{2}$. U ovom slučaju se kružnice c i l ne sijeku i konstrukcija ne funkcionira. Sada se konstrukcija provodi na ovaj način. Konstruirajmo na zraci OT točku T_1 tako da je $|OT_1| = 2 \cdot |OT|$. To je moguće pomoću šestara ovako kao na sl. 284. Postupak nastavljamo konstrukcijom točaka $T_2, T_3, \ldots, T_n$ na zraci OT takvih da je

$$|OT_2| = 3 \cdot |OT|, \ldots, |OT_n| = (n+1) \cdot |OT|$$

i

$$|OT_n| > \frac{1}{2}r.$$

To je moguće učiniti samo šestarom, a da takav n postoji posljedica je Arhimedovog aksioma. Sada za točku T_n konstruirajmo prema II točku T_n'. Pogledajmo koja svojstva ima ta točka. Vrijedi

$$|OT_n| \cdot |OT_n'| = k^2, \ |OT| \cdot |OT'| = k^2.$$

Odavde je

$$|OT_n| \cdot |OT_n'| = |OT| \cdot |OT'|.$$

Sjetimo se da je

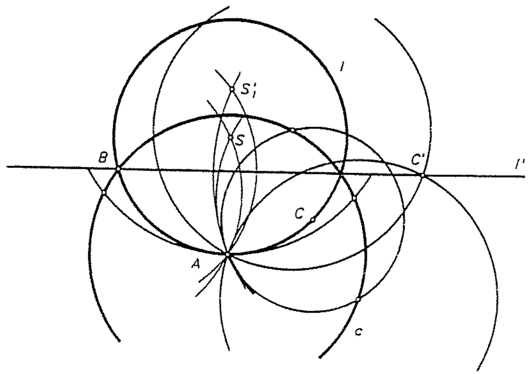
$$|OT_n| = (n+1) \cdot |OT|,$$

pa ako to uvrstimo u prethodnu relaciju dobivamo

$$|OT'| = (n+1) \cdot |OT_n'|,$$

dakle T' dobijemo tako da od O $(n+1)$-puta nanesemo $|OT_n'|$.

Tvrdnja 2. Neka su A, B, C tri nekolinearne točke. Samo sa šestarom moguće je konstruirati središte kružnice koja prolazi tim točkama.



Sl. 285.

Dokaz tvrdnje 2. Neka su zadane točke A, B i C. Uzmimo inverziju s centrom u A takvu da kružnica inverzije k prolazi kroz B (v. sl. 285).

Sada konstrukcijom iz dokaza tvrdnje 1 konstruiramo C'. Pravac $l' = BC'$ ima svojstvo da ga navedena inverzija preslikava u traženu kružnicu. No, sliku l tog

pravca lako nalazimo. Tu se radi o tome da se odredi središte kružnice u koju se preslikava l'. Središte S te kružnice je inverzna slika zrcalne točke S_1' točke A s obzirom na l'. Sada opet konstrukcijom iz tvrdnje 1 nađemo $S = S_1''$ i S je središte tražene kružnice. ∎

7.6. Steinerove konstrukcije

U prethodnom odjeljku smo vidjeli da je svaka konstrukcija koja je izvodljiva ravnalom i šestarom izvodljiva i samo sa šestarom. Postavlja se pitanje da li je ona izvodljiva i samo sa ravnalom. Pri tome smatramo da je pravac konstruiran ako su konstruirane njegove dvije točke, a kružnica ako konstruiramo njeno središte i točka kojom ona prolazi. Pokazalo se da konstrukcije izvodljive ravnalom i šestarom nisu izvodljive samo ravnalom. No, uz neke dodatne uvjete jesu. Jedan takav uvjet je da je u ravnini u kojoj se vrši konstrukcija nacrtana jedna kružnica sa svojim središtem.

Neka je u ravnini zadana (nacrtana) jedna čvrsta kružnica k zajedno sa svojim središtem O. Konstrukcije u toj ravnini izvedene samo jednim ravnalom zovu se tada **Steinerove konstrukcije.**

TEOREM 2 (Jakob Steiner, 1833). *Svaka geometrijska konstrukcija koja se može izvesti ravnalom i šestarom, izvodljiva je kao Steinerova konstrukcija.*

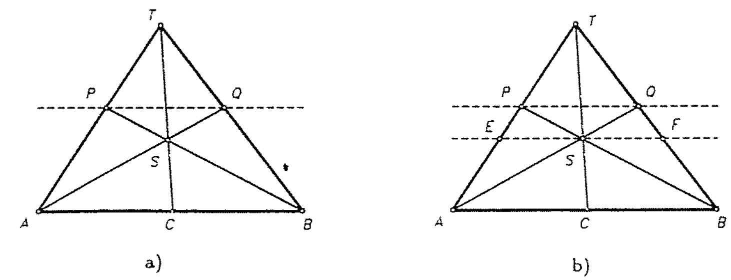
Dokaz. Da dokažemo teorem, pokazat ćemo prvo da se neke osnovne konstrukcije mogu izvršiti Steinerovom konstrukcijom.

1. Danom točkom P konstruirati paralelu danom pravcu AB.

Razmotrit ćemo dva slučaja.

a) Pretpostavimo da znamo polovište C dužine $\overline{AB}$. Neka je T bilo koja točka na AP (v. sl. 286a). Spojimo T sa B i C. Neka je $PB \cap TC = S$, a $AS \cap TB = Q$. Tada je PQ tražena paralela sa AB. Zaista, neka je $EF \parallel AB$ i $S \in EF$ (v. sl. 286b). Tada je $\Delta TES \sim \Delta TAC$ i $\Delta TSF \sim \Delta TCB$, pa je

$$\frac{|ES|}{|AC|} = \frac{|TS|}{|TC|} = \frac{|SF|}{|CB|},$$



Sl. 286.

pa zbog $|AC| = |CB|$ slijedi $|ES| = |SF|$. Zbog $\Delta PES \sim \Delta PAB$ i $\Delta QSF \sim \sim \Delta QAB$ slijedi

$$\frac{|PB|}{|PS|} = \frac{|AB|}{|ES|} = \frac{|AB|}{|SF|} = \frac{|QA|}{|QS|},$$

pa imamo

$$\frac{|PB|}{|PS|} - 1 = \frac{|QA|}{|QS|} - 1$$

tj.

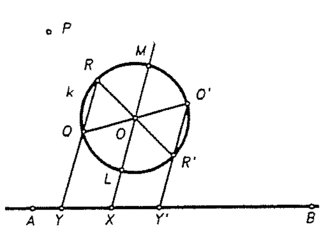
$$\frac{|PB| - |PS|}{|PS|} = \frac{|QA| - |QS|}{|QS|},$$

odakle dobivamo

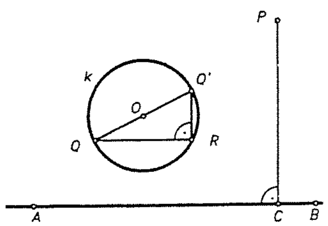
$$\frac{|SB|}{|PS|} = \frac{|SA|}{|QS|}.$$

Stoga je $\Delta SPQ \sim \Delta SAB$ (S-K-S), pa je $\sphericalangle SPQ = \sphericalangle SBA$. To povlači da je $PQ \parallel AB$.

b) Ako ne znamo polovište dužine $\overline{AB}$, postupimo ovako. Uzmimo bilo koju točku $X \in \overline{AB}$ (v. sl. 287). Spojimo O i X i neka tu spojnicu siječe čvrsta kružnica k u točkama L i M, tj. $OX \cap k = \{L, M\}$. Tada je O središte od $\overline{LM}$. Odaberimo $R \in k$ (osim L, M), pa onda prema a) povucimo paralelu RQ kroz R sa LM ($Q \in k$). Neka su $\overline{RR'}$ i $\overline{QQ'}$ dijametri od k i neka je $Q'R' \cap AB = Y'$. Tada se lako vidi (dokažite) da je X središte dužine $\overline{YY'}$. Metodom iz a) se sada konstruira paralela kroz P sa $YY' = AB$.



Sl. 287.



Sl. 288.

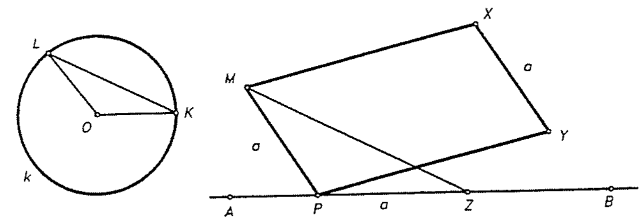
2. Danom točkom P konstruirati okomicu na dani pravac AB.

Točkom $Q \in k$ povucimo paralelu $QR \parallel AB$, $R \in k$. Pri tom koristimo konstrukciju 1 (Q odaberemo tako da $\overline{QR}$ nije dijametar od k) (v. sl. 288). Neka je $\overline{QQ'}$ dijametar od k (dakle $Q' \in k$). Paralela kroz P sa $Q'R$ (koristeći konstrukciju 1) daje traženu okomicu. Zaista, $QR \parallel AB$, a $Q'R \parallel PC$, pa je $\sphericalangle QRQ' = \sphericalangle ACP$. Međutim $\sphericalangle QRQ'$ je prema Talesovom teoremu pravi kut, pa je i $\sphericalangle ACP$ pravi kut, kao što treba biti.

Daljnja osnovna konstrukcija je ova.

3. Nanijeti danu dužinu $\overline{XY}$, $|XY| = a$ na pravac AB na obje strane od točke $P \in AB$ (v. sl. 289).

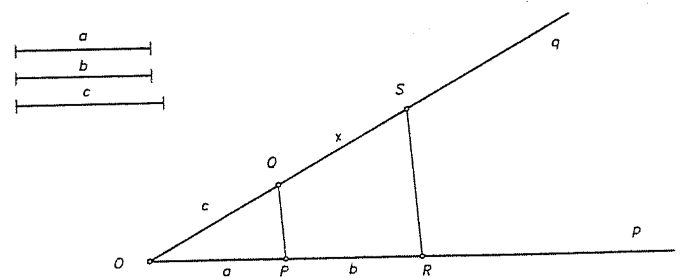
Neka je dana dužina $\overline{XY}$ duljine $|XY| = a$, pravac AB i na njemu točka P. Prvo konstruirajmo dužinu $\overline{PZ}$ duljine $|PZ| = a$ prema točki B (slučaj "prema A" je sličan).



Sl. 289.

Prvo konstruiramo paralele PM i XM sa XY i PY redom koristeći konstrukciju 1. Tako dobijemo paralelogram $PYXM$ (isti daje $|XY| = |MP|$). Sada nacrtajmo radijuse $OK \parallel AB$ i $OL \parallel MP$. Konačno konstruiramo paralelu $MZ \parallel LK$. Tada je $|PZ| = a$. Zaista. Tri para paralela (OK, PZ), (OL, MP) i (KL, MZ) čine kuteve trokuta ΔPZM jednakim kutevima trokuta ΔOKL, pa kako je ΔOKL jednakokračan, to je takav i ΔPZM, pa je $|PZ| = |MP| = |XY| = a$.

4. Konstruirati četvrtu proporcionalu duljina a, b, c (tj. konstruirati dužinu duljine x, tako da je $a : b = c : x$).



Sl. 290.

Uzmimo dva pravca p i q kroz točku O i konstrukcijom 3 odmjerimo dužine a, b, c kao na slici 290.

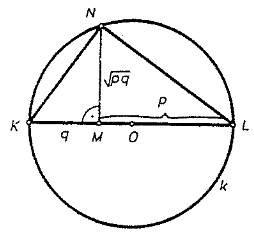
Sada konstrukcijom 1 povučemo paralele $RS \parallel PQ$, što daje četvrtu proporcionalu prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti.

5. Konstruirati geometrijsku sredinu $\sqrt{xy}$ dvaju danih segmenata x, y, tj. konstruirati z za koji je $x/z = z/y$.

Prvo zbrojimo segmente konstrukcijom 3 kojom dobivamo $t = x + y$. Tada koristeći dijametar d čvrste kružnice k nađemo konstrukcijom 4. četvrte proporcionale p i q od (t, x, d) i (t, y, d) redom, tj. $t/x = d/p$, $t/y = d/q$, odnosno $p = dx/t$,

$q = dy/t$. Odavde je $p + q = (dx + dy)/t = d(x+y)/t = dt/t = d$. Neka je

$$r = \sqrt{pq} = \sqrt{\frac{dx}{t} \cdot \frac{dy}{t}} = \frac{d}{t}\sqrt{xy}.$$



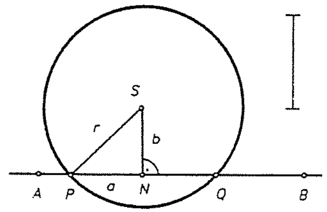
Sl. 291.

Stoga je tražena duljina $\sqrt{xy}$ četvrta proporcionala od d, r, t. Na taj smo način problem konstrukcije geometrijske sredine reducirali na specijalne segmente p i q čija je suma d. Za konstrukciju $\sqrt{pq}$ uzmimo bilo koji dijametar KOL od k. Konstrukcijom 3 odmjerimo na KL dužinu $\overline{LM}$, takvu da je $|LM| = p$, pa onda $|KM| = d - p = q$. Konstrukcijom 2 podignimo okomicu $\overline{MN}$. Tada je $|MN| = r = \sqrt{pq}$, što slijedi iz Euklidovog teorema.

Sada kao u dokazu Mohr–Mascheronijevog teorema pokažimo da Steinerovim konstrukcijama možemo izvesti konstrukcije A, B i C.

Konstrukciju A je očito moguće izvesti samo ravnalom.

B. Konstruirati sjecište danog pravca AB i dane kružnice $k(S, r)$.



Sl. 292.

Od te kružnice znamo dakle samo njen centar S i veličinu radijusa r. Konstrukcijom 2 nađimo nožište N okomice spuštene iz S na AB. Tada je N središte tražene tetive $\overline{PQ}$. Neka je $|SN| = b$.

Uočimo da znamo konstruirati duljinu $|SN| = b$. Neka je $|PN| = a$. Tada iz pravokutnog trokuta ΔSNP imamo da je

$$a^2 = r^2 - b^2 = (r - b)(r + b).$$

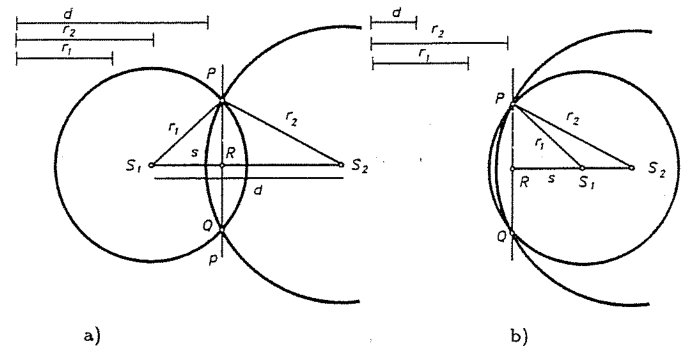
Kako su oba r i b poznati, konstrukcijom 3 možemo odrediti $r - b$ i $r + b$, a konstrukcijom 5 i duljinu

$$a = \sqrt{(r - b)(r + b)}.$$

Opet konstrukcijom 3 odmjerimo na AB dužinu duljine a na obje strane od N, čime dobijemo oba tražena sjecišta P i Q.

C. Konstruirati sjecišta kružnica $k_1(S_1, r_1)$ i $k_2(S_2, r_2)$.

Neka je $r_2 \geq r_1$, a $|S_1S_2| = d$. Kružnice se sijeku u dvije točke P i Q ako je $r_2 \leq d < r_1 + r_2$ (sl. 293a)) ili $r_2 > d > r_2 - r_1$ (sl. 293b)).



Sl. 293.

Imamo $PQ \perp S_1S_2$. Kosinusov teorem primjenjen na ΔPS_1S_2 daje

$$r_2^2 = r_1^2 + d^2 - 2r_1 d \cos \measuredangle PS_1S_2.$$

Neka je $PQ \cap S_1S_2 = R$, a $|S_1R| = s$. Smatrat ćemo da je s pozitivan ako je $R \in \overline{S_1S_2}$, a negativan ako je R na produžetku dužine $\overline{S_1S_2}$. U svakom je slučaju $\cos \measuredangle PS_1S_2 = s/r_1$, pa je $r_2^2 = r_1^2 + d^2 - 2ds$. Stoga je

$$s = \frac{r_1^2 + d^2 - r_2^2}{2d}.$$

Iz podataka koji su nam poznati, tj. r_1, r_2 i d mi ćemo redom konstruirati

$$s = \frac{r_1^2}{2d} + \frac{d^2}{2d} - \frac{r_2^2}{2d}.$$

Ova tri člana su redom četvrte proporcionale od $2d, r_1, r_1$; $2d, d, d$; $2d, r_2, r_2$. Svaka od njih se može konstruirati primjenom konstrukcije 4 (a pri tom se $2d$ nađe iz d konstrukcijom 3). Nakon toga se s nađe dvostrukom primjenom konstrukcije 3. Na taj način možemo naći točku R na S_1S_2 (opet konstrukcijom 3), a nakon toga u R podignemo okomicu p na S_1S_2 konstrukcijom 2. Na taj se način problem svodi na konstrukciju presjeka jedne od kružnica s pravcem p, što znamo napraviti koristeći konstrukciju B. ■

§ 8. Izvodljivost konstrukcija ravnalom i šestarom

Podsjetimo se da ako nam je zadana jedinična dužina i dužina čija je duljina a, onda možemo konstruirati ravnalom i šestarom dužinu čija je duljina jednaka $\sqrt{a}$, pa iz toga slijedi da možemo konstruirati i sve dužine koje se iz zadanih dužina dobiju operacijama zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i uzimanja drugog korijena. Specijalno, odavde slijedi da se mogu konstruirati dužine čije su duljine jednake korijenima zadane kvadratne jednadžbe. Drugim riječima korijeni kvadratne jednadžbe mogu se konstruirati ravnalom i šestarom. Za kompleksni broj kažemo da je **konstruktibilan** ako znamo konstruirati njegov realan i imaginaran dio. Sada ćemo preciznije uvesti pojam konstruktibilnog realnog broja. U tu svrhu trebat će nam pojam algebarskog i transcendentnog broja kao i pojam proširenja polja.

Neka je P neko polje (u daljem tekstu to će biti potpolje od $\mathbf{R}$ ili $\mathbf{C}$). Neka je α realan ili kompleksan broj, $\alpha \notin P$. Ako je α korijen neke algebarske jednadžbe s koeficijentima iz P, onda kažemo da je α **algebarski broj** obzirom na polje P ili nad P. Ako takva algebarska jednadžba ne postoji, onda kažemo da je α **transcendentan** obzirom na polje P ili nad poljem P. Primijetimo da je svaki $a \in P$ algebarski obzirom na P, i to stoga jer je on rješenje jednadžbe $x - a = 0$, čiji su koeficijenti elementi iz P. Ako se radi o polju $P = \mathbf{Q}$ racionalnih brojeva, onda se naprosto govori o **algebarskim** i **transcendentnim** brojevima. Npr. $\sqrt{2}$ je algebarski broj, jer je on korijen jednadžbe $x^2 - 2 = 0$ čiji su koeficijenti iz $\mathbf{Q}$. Isto su tako npr. algebarski brojevi $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{4} - 3\sqrt[7]{15}$ itd. dok su npr. brojevi e, π transcendentni, a isto tako i tzv. Liouville–ov broj $\alpha = 0,1100010\ldots$, gdje na mjestima $1!, 2!, 3!, \ldots$ stoje jedinice, a na ostalim mjestima 0, tj.

$$\alpha = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}.$$

Dokaz transcendentnosti broja e nije jako težak, a prvi je to dokazao Ch. Hermite 1873. Dokaz da je π trancendentan je nešto teži, a prvi ga je dao F. Lindemann 1882. i time negativno riješio problem **kvadrature kruga** (o tome se detaljno može više naći u D. Blanuša, Viša matematika II dio, drugi svezak, Tehnička knjiga, Zagreb 1974, str. 467; V. Perić, Algebra, II dio, Svjetlost, Sarajevo, 1980, str. 169, ili N. I. Feljdman, Sedmaja problema Hilberta, MGU, Moskva, 1982). Daljnji primjeri transcendentnih brojeva su $2^{\sqrt{2}}$ i općenitije a^b, gdje su $a \neq 0$, $a \neq 1$, a i b algebarski brojevi, $b \notin \mathbf{Q}$. Odavde neposredno slijedi da je npr. i $\log r$ transcendentan broj za $r \in \mathbf{Q}$, $r > 0$, $r \neq 10^k$, $k \in \mathbf{Z}$. U stvari G. Cantor je dokazao 1873. da transcendentnih brojeva ima neprebrojivo mnogo, dakle "više" nego algebarskih kojih je prebrojivo mnogo.

Neka je $P \subseteq \mathbf{C}$ potpolje, a $\alpha \in \mathbf{C} \setminus P$. Označimo sa $P[\alpha]$ skup svih brojeva oblika

$$f(\alpha) = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_k\alpha^k,$$

gdje je $k \in \mathbf{N}$, $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_k \in P$. Lako se vidi da je $P[\alpha]$ prsten, ali općenito ne mora biti polje. Označimo nadalje sa $P(\alpha)$ skup svih kvocjenata $f(\alpha)/g(\alpha)$, gdje su $f(\alpha), g(\alpha) \in P[\alpha]$, $g(\alpha) \neq 0$. Očito je da je $P(\alpha)$ polje. Polje $P(\alpha)$ zove se **algebarsko proširenje** polja P, ako je α algebarski broj nad poljem P, a **transcendentno proširenje** ako je α transcendentan nad P. Kraće ćemo govoriti da je $P(\alpha)$ proširenje polja P dobiveno adjunkcijom (dodavanjem) elementa α. (Uočite da je za $\alpha \in P$ $P(\alpha) = P$.)

Primjer 1. Za polje $P = \mathbf{Q}$ i $\alpha = \sqrt{5}$ odredite $P[\sqrt{5}]$ i $P(\sqrt{5})$.

Rješenje. Prema definiciji od $P[\alpha]$, $P[\sqrt{5}]$ je skup svih elemenata

$$f(\sqrt{5}) = c_0 + c_1\sqrt{5} + c_2(\sqrt{5})^2 + \ldots + c_k(\sqrt{5}^k),\ k \in \mathbf{N},\ c_0, c_1, c_2, \ldots, c_k \in Q.$$

Očito je da su svi elementi oblika $a + b\sqrt{5}$, $a, b \in \mathbf{Q}$. Dakle

$$P[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}.$$

Odavde slijedi da je $P(\sqrt{5})$ dan sa

$$P(\sqrt{5}) = \left\{\frac{a + b\sqrt{5}}{c + d\sqrt{5}} \mid a, b, c, d \in \mathbf{Q},\ c + d\sqrt{5} \neq 0\right\}.$$

No zbog

$$\frac{a + b\sqrt{5}}{c + d\sqrt{5})} = \frac{(a + b\sqrt{5})(c - d\sqrt{5})}{(c + d\sqrt{5})(c - d\sqrt{5})} = \frac{ac - 5bd}{c^2 - 5d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 5d^2}\sqrt{5},$$

slijedi da je

$$P(\sqrt{5}) = P[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}.$$

Razlog rezultata ovog primjera je u tome da je $\sqrt{5}$ algebarski broj (nad $\mathbf{Q}$). Vrijedi općenito ova tvrdnja.

PROPOZICIJA 1. *Ako je α algebarski broj nad poljem P, onda je $P[\alpha]$ polje i vrijedi $P[\alpha] = P(\alpha)$.*

Dokaz. Kako je α algebarski, slijedi da postoji polinom $p(x) \in P[x]$, $p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots + p_nx^n$, $p_n \neq 0$, tako da je $p(\alpha) = 0$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je p ireducibilan nad P (jer bi inače umjesto p mogli odabrati jedan njegov ireducibilan faktor). Očito uvijek vrijedi $P[\alpha] \subseteq P(\alpha)$. Dokažimo obratnu inkluziju. Neka je $\beta \in P[\alpha]$. Tada postoji polinom $f(x) \in P[x]$, $f(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_kx^k$, $k \in \mathbf{N}$, $c_i \in P$, takav da je $\beta = f(\alpha)$. Tvrdimo da se β može napisati u obliku $\beta = a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$, gdje je n stupanj baš polinoma p. Zaista, podijelimo li $f(x)$ sa $p(x)$, neka je $r(x)$ ostatak tj. $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$ gdje je $r(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$, (jer je stupanj od r manji od n = stupanj od p). Za $x = \alpha$ slijedi $f(\alpha) = r(\alpha)$, tj.

$$\beta = f(\alpha) = r(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1},$$

čime je tvrdnja dokazana.

Neka je sada $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \in P(\alpha)$. Prema upravo dokazanom vrijedi

$$\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}}{b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1}}, \quad g(\alpha) \neq 0 \qquad (*)$$

Pokažimo da je $f(\alpha)/g(\alpha) \in P[\alpha]$. U tu svrhu promotrimo polinom $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}$. g nije nul–polinom jer je $g(\alpha) \neq 0$. Polinom g nije djeljiv s p jer je st $g <$ st p. No p je po pretpostavci ireducibilan pa su stoga g i p relativno prosti polinomi. Stoga prema teoremu o najvećoj zajedničkoj mjeri postoje polinomi $\varphi(x), \psi(x) \in P[x]$, takvi da je $g(x)\varphi(x) + p(x)\psi(x) = 1$. Stavimo li ovdje $x = \alpha$ onda zbog $p(\alpha) = 0$ slijedi $g(\alpha) \cdot \varphi(\alpha) = 1$. Dakle postoji polinom $\varphi(x) \in P[x]$, takav da je

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{g(\alpha)}.$$

Stoga je $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = f(\alpha) \cdot \varphi(\alpha)$, pa je $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \in P[\alpha]$ čime je propozicija dokazana. ∎

Propozicija 1 je važna jer ćemo biti u situaciji da polje $\mathbb{Q}$ proširujemo algebarskim brojevima, pa ćemo $\mathbb{Q}(\alpha)$ konstruirati kao $\mathbb{Q}[\alpha]$. U teoriji konstrukcija, važna proširenja su proširenja polja $\mathbb{Q}$ brojevima oblika $\varrho = \sqrt{A}$, $A \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{A} \notin \mathbb{Q}$. Takvo proširenje polja $\mathbb{Q}$ zove se **proširenje kvadratnim radikalom** ili kraće **kvadratno proširenje.**

Nadalje, bit ćemo u situaciji da vršimo uzastopna kvadratna proširenja, pa ako $\mathbb{Q}$ najprije proširimo sa ϱ_1, pa nakon toga $\mathbb{Q}(\varrho_1)$ sa ϱ_2, onda to proširenje bilježimo sa $\mathbb{Q}(\varrho_1, \varrho_2)$, tj. pišemo $\mathbb{Q}(\varrho_1, \varrho_2) = (\mathbb{Q}(\varrho_1))(\varrho_2)$. Dakle imamo da je

$$\mathbb{Q}(\varrho_1, \varrho_2) = \{a + b\varrho_2 \mid a, b \in \mathbb{Q}(\varrho_1)\}.$$

Kažemo da je realni broj x moguće **elementarno konstruirati** (ili da je **konstruktibilan**) ako je $x \in \mathbb{Q}$ ili $x \in \mathbb{Q}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k)$, gdje je $\varrho_i = \sqrt{A_i}$, $A_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \ldots, k$, a $\varrho_i \notin \mathbb{Q}(\varrho_1, \ldots, \varrho_{i-1})$ (pri čemu uzimamo $\mathbb{Q}(\varrho_0) = \mathbb{Q}$). Kompleksan broj z je moguće **elementarno konstruirati** ako je moguće elementarno konstruirati njegov realni dio $\operatorname{Re} z$ i imaginarni dio $\operatorname{Im} z$.

Ako se korijeni algebarske jednadžbe s racionalnim koeficijentima mogu elementarno konstruirati, onda kažemo da je ta jednadžba **rješiva u kvadratnim radikalima.**

Ako su $P \subseteq K$ polja onda kažemo da je K **proširenje polja** P (a P potpolje od K). Očito se K može shvatiti kao vektorski prostor nad poljem P. **Stupanj proširenja** od K nad poljem P, $[K : P]$ se definira kao dimenzija od K nad P, tj. $[K : P] = \dim_P K$.

Sada se može izreći ekvivalentna definicija konstruktibilnosti. Broj $\alpha \in \mathbb{C}$ je konstruktibilan ako postoji konačan niz proširenja $\mathbb{Q} \subset P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset P_k$ polja $\mathbb{Q}$ tako da je $[P_1 : \mathbb{Q}] = [P_2 : P_1] = \ldots = [P_k : P_{k-1}] = 2$ i $\mathbb{Q}(\alpha) \subset P_k$. Još jedna ekvivalentna formulacija je ova: $\alpha \in \mathbb{C}$ je konstruktibilan ako i samo ako α leži u proširenju P polja $\mathbb{Q}$ stupnja $[P : \mathbb{Q}] = 2^k$ za neko $k \in \mathbb{N}_0$.

O rješivosti jednadžbe trećeg stupnja u kvadratnim radikalima govori ovaj teorem.

TEOREM 1. *Jednadžba trećeg reda s racionalnim koeficijentima rješiva je u kvadratnim radikalima ako i samo ako ima racionalni korijen.*

Dokaz. Najprije ako jednadžba trećeg reda s racionalnim koeficijentima ima racionalni korijen p/q ($q \neq 0$), onda se ona može faktorizirati kao $(qx - p)(rx^2 + sx + t) = 0$, gdje su svi koeficijenti racionalni, pa odatle odmah slijedi tvrdnja.

Obratno. Pođimo od jednadžbe

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \qquad (*)$$

Treba pokazati ako je $(*)$ rješiva u kvadratnim radikalima, onda ona ima racionalan korijen. Pretpostavimo suprotno.

Jednadžba $(*)$ ima bar jedan realan korijen. Neka je to x_1 (koji dakle, po pretpostavci nije racionalan). Kako je jednadžba $(*)$ rješiva u kvadratnim radikalima, to postoje iracionalni brojevi $\varrho_1 = \sqrt{A_1}, \ldots, \varrho_k = \sqrt{A_k}$, $k \geq 1$, $A_j \in \mathbb{Q}$, $j = 1, \ldots, k$, takvi da je

$$x_1 \in \mathbb{Q}(\varrho_1, \ldots, \varrho_k).$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $\varrho_k \notin \mathbb{Q}(\varrho_1, \ldots, \varrho_{k-1})$, jer bi u suprotnom u našoj konstrukciji ϱ_k bio suvišan i mogli bismo stati kod ϱ_{k-1}. Analogno možemo pretpostaviti da $x_1 \notin \mathbb{Q}(\varrho_1, \ldots, \varrho_{k-1})$. Pokazat ćemo najprije da su svi korijeni od $(*)$ realni i konstruktibilni.

Pretpostavka $x_1 \in \mathbb{Q}(\varrho_1, \ldots, \varrho_k)$ povlači da je x_1 oblika

$$x_1 = p + q\varrho_k, \quad p, q \in \mathbb{Q}(\varrho_1, \ldots, \varrho_{k-1}), \quad q \neq 0.$$

Pokazat ćemo da je $x_2 = p - q\varrho_k$ također korijen od $(*)$ koji je očito realan i konstruktibilan. U tu svrhu uvrstimo $x_1 = p + q\varrho_k$ u $(*)$. Dobijemo

$$f(x_1) = P + Q\varrho_k = 0,$$

gdje je $P = p^3 + 3pq^2A_k + ap^2 + aq^2A_k + bp + c$, $Q = 3p^2q + q^3A_k + 2apq + bq$. Dakle su $P, Q \in \mathbb{Q}(\varrho_1, \ldots, \varrho_{k-1})$. Ako bi vrijedilo $Q \neq 0$, onda bi bilo $\varrho_k = -P/Q$, tj. $\varrho_k \in \mathbb{Q}(\varrho_1, \ldots, \varrho_{k-1})$, suprotno pretpostavci. Dakle $Q = 0$, što povlači $P = 0$. Ako sada u $(*)$ uvrstimo $x_2 = p - q\varrho_k$ lakim računom dobivamo da je

$$f(x_2) = P - Q\varrho_k,$$

pa $P = Q = 0$ povlači $f(x_2) = 0$. Dakle, x_2 je korijen jednadžbe $(*)$ i $x_2 \neq x_1$ (jer je $q \neq 0$). Neka je x_3 treći korijen od $(*)$. Prema Vieté–ovoj formuli $x_1 + x_2 + x_3 = -a$ slijedi $x_3 = -a - 2p$. Odavde radi $a \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Q}(\varrho_1, \ldots, \varrho_{k-1})$ slijedi da je $x_3 \in \mathbb{Q}(\varrho_1, \ldots, \varrho_{k-1})$. Dakle je i x_3 realan i konstruktibilan.

Kontradikcija koja dokazuje tvrdnju teorema sastojat će se u tome da iz naših pretpostavki slijedi $x_2 \in Q(\varrho_1, \dots \varrho_{k-1})$ i tada $x_1 \in Q(\varrho_1, \dots, \varrho_{k-2})$. To se sada dobije tako da se ponovi predhodni postupak na korijen x_3. ■

Koristeći ovu teoriju pokazat ćemo **nemogućnost** izvodljivosti nekih **konstrukcija ravnalom i šestarom.** Naime, očito je da je ravanlom i šestarom moguće konstruirati (uz zadanu jediničnu dužinu) dužinu kojoj je duljina jednaka zadanom konstruktibilnom broju i samo takve dužine.

Primjer 2 (duplikacija kocke[18]). Ovaj stari klasični problem sastoji se u tome da se ravnalom i šestarom konstruira brid kocke čiji je volumen dva puta veći od volumena zadane kocke.

Rješenje. Neka je $\overline{AB}$ zadana dužina kocke. Treba konstruirati brid $\overline{CD}$ kocke koja ima volumen $|CD|^3 = 2|AB|^3$. Stavimo li da je $|CD|/|AB| = x$, dobivamo jednadžbu $x^3 - 2 = 0$. Kako ova jednadžba nema racionalnih korijena (jer su jedini kandidati za korijene ± 1, ± 2, a ni jedan od njih nije korijen te jednadžbe), to prema Teoremu 1 slijedi da se korijeni te jednadžbe ne mogu elementarno konstruirati, pa se ni dužina $\overline{CD}$ ne može elementarno konstruirati. ■

Primjer 3 (trisekcija kuta[19]). Ovaj se klasični problem sastoji u tome da se zadani kut ravnalom i šestarom podijeli na tri jednaka dijela. Neki se kutevi mogu "trisecirati". Takvi su npr. 45°, 90° itd. , ali pokažimo da se neki kutovi ne mogu "trisecirati".

Rješenje. Očito kut φ možemo konstruirati ako i samo ako je broj $z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\cos\varphi$ konstruktibilan, ili ekvivalentno ako i samo ako je $x = \mathrm{Re}\, z = \cos\varphi$ konstruktibilan.

Stoga se trisekcija kuta φ svodi na konstrukciju broja $z = e^{i\varphi/3}$, tj. na konstrukciju broja $x = \mathrm{Re}\, z = \cos\frac{\varphi}{3}$. Iz

$$d = \mathrm{Re}\, z = \cos\varphi = \cos(3 \cdot \frac{\varphi}{3}) = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3} = 4x^3 - 3x$$

zaključujemo da se problem trisekcije kuta φ svodi na pitanje da li jednadžba

$$4x^3 - 3x - d = 0,\ d = \cos\varphi$$

ima racionalni korijen. Ako je $\varphi = 90°$, dakle $d = 0$, onda ta jednadžba ima racionalan korijen ($x = 0$), pa je prema Teoremu 1 trisekcija kuta od 90° moguća, što je i inače evidentno. Isto tako je i 45° moguće trisecirati, što nije izravna posljedica Teorema 1 (zašto?). Neka je $\varphi = 60°$. Tada je $d = \cos 60° = \frac{1}{2}$, pa jednadžba glasi

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Supstitucijom $x = 2y$ dobiva se jednadžba $y^3 - 3y - 1 = 0$, a ova nema racionalni korijen, pa stoga ni predhodna jednadžba nema racionalni korijen. Stoga nije moguće konstruirati broj

$$\cos 20° = \cos\frac{\pi}{9},$$

[18] Taj se problem zove i *Delfijski problem*

[19] Za ovaj i naredne primjere trebaju nam znanja iz trigonometrije (vidi pogl. IV)

pa ni kut $\frac{2\pi}{18}$ nije moguće elementarno konstruirati, pa zbog toga nije moguće elementarno konstruirati pravilni 18-terokut, pa stoga ni pravilni deveterokut, te stoga niti pravilni n-terokut za $n = 9k$, $k \in \mathbb{N}$. O konstrukciji pravilnih n-terokuta bit će još riječi kasnije. ■

Primjer 4. Nije moguće konstruirati šestarom i ravnalom trokut kome su zadane dvije stranice a i b i radijus r upisane kružnice.

Dokaz. Taj je trokut očito moguće konstruirati ako i samo ako je moguće konstruirati kut γ ili što je ekvivalentno broj $\mathrm{tg}\,\gamma/2$. Uvedimo oznake kao na slici 294. Neka je s poluopseg trokuta. Tada je $x = a + b - s$. Iz pravokutnog trokuta $\triangle CDU$ slijedi

$$r = (a + b - s)\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}. \tag{*}$$

Iz

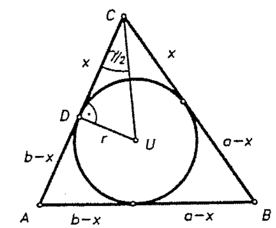
$$r = \frac{P}{s} = \frac{ab\sin\gamma}{2s}$$

slijedi

$$s = \frac{ab\sin\gamma}{2r}.$$

Uvrštavanjem u (*) dobijemo

$$r = \left(a + b - \frac{ab\sin\gamma}{2r}\right)\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}.$$



Sl. 294.

Prelaskom na polovične kutove dobivamo jednadžbu

$$r(a+b)\,\mathrm{tg}^3\frac{\gamma}{2} - (r^2 + ab)\,\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2} + r(a+b)\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2} - r^2 = 0. \tag{**}$$

Pokažimo da postoji jedinstven trokut za koji je $r = 1$, $a = 2$, $b = 3$. Tada (**) postaje $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$, gdje je $x = \mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}$. Kako je $f(0) = -1$ i $f(1) = 2$, to ova jednadžba ima jedinstveno realno rješenje $0 < \mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2} < 1$, pa je $0° < \gamma < 90°$, što znači da takav trokut postoji. Međutim, ta jednadžba nema racionalni korijen pa prema teoremu 1, taj trokut nije moguće elementarno konstruirati. ■

Primjer 5. Nije moguće elementarno konstruirati trokut ako mu je zadano a, b, s_α (tj. dvije stranice i simetrala jednog od tim stranicama nasuprotnih kutova).

Dokaz. Pokažimo prvo da postoji trokut $\triangle ABC$ tako da je $a = 1$, $b = 1$, $s_\alpha = 1$. Pođimo od jednakokračnog trokuta s krakovima $a = b = 1$ s nekim kutom $\sphericalangle ACB$. Pustimo li da $\sphericalangle ACB$ raste od blizu 0° do blizu 180°, onda se pripadni s_α mijenja od neke vrijednosti manje od 1 do neke vrijednosti veće od 1, pa mora postojati $\sphericalangle ACB$ takav da je $s_\alpha = 1$ (neprekidnost!). Trokut je moguće konstruirati ako znamo konstruirati još stranicu c. Najprije je očito $p(\triangle ADC) + p(\triangle ABD) = p(\triangle ABC)$ (v. sl. 295), tj.

$$\frac{1}{2}s_\alpha b\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}s_\alpha c\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha,$$

odnosno

$$(b+c)s_\alpha = 2bc\cos\frac{\alpha}{2}.$$

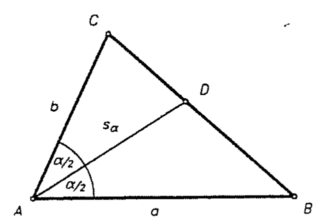
Iz $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, slijedi

$$s_\alpha^2(b+c)^2 = bc\left[(b+c)^2 - a^2\right].$$

Uvrstimo li ovamo $a = b = s_\alpha = 1$, dobivamo nakon sređivanja

$$c^3+c^2-2c-1=0.$$

Ova jednadžba nema racionalnih korijena, pa se c ne može konstruirati ravnalom i šestarom, te stoga ni traženi trokut. ■



Sl. 295.

Primjer 6. Nije moguće elementarno konstruirati trokut komu je zadano s, r, R ($2s$ je opseg, a r i R radijusi upisane i opisane kružnice).

Dokaz. Imamo redom $a = 2R\sin\alpha = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, te $s-a = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, odakle je

$$\frac{s-a}{a} = \frac{r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{4R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{ar}{4R(s-a)} \tag{1}$$

S druge strane iz $r = (s-a)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ i $a = 4R\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$ slijedi

$$\frac{r}{a} = \frac{(s-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{4R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{a(s-a)}{4rR} \tag{2}$$

(1) i (2) povlače (zbrajanjem)

$$a^3 - 2sa^2 + (s^2+r^2+4rR)a - 4rRs = 0. \tag{3}$$

(Uočite da su b i c rješenja iste jednadžbe, pa slijedi $ab+bc+ca = s^2+r^2+4rR$). Uzmimo $s=6$, $R=2$, $r=1$. Tada (3) postaje $f(a) = a^3-12a^2+45a-48=0$. Zbog $f(1)<0$, $f(2)>0$ slijedi da postoji korijen te jednadžbe za koji je $1<a<2$, pa takav trokut postoji. S druge strane, jednadžba $x^3-12x^2+45x-48=0$ nema racionalnih korijena (što se lako vidi supstitucijom $x=y+4$), pa trokut nije konstruktibilan. ■

Primjer 7. Nije moguće elementarno konstruirati trokut komu su zadane duljine s_α, s_β, s_γ simetrala njegovih kutova.

Dokaz. Neka je $\overline{AA'}$ simetrala kuta α. Iz $\triangle AA'B$ slijedi

$$\frac{s_\alpha}{c} = \frac{\sin\beta}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}. \tag{1}$$

Iz $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$ slijedi $2s = 2R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma) = 8R\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$, pa je

$$\frac{c}{s} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) nalazimo

$$\frac{s_\alpha}{s} = \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}. \tag{3}$$

Slično dobivamo izraze za s_β/s i s_γ/s. Uzmimo da je $s_\beta = s_\gamma$. Tada je zbog Steinerovog teorema (v. 2.3. Primjer 3c) $\beta=\gamma$, pa na osnovi (3) nalazimo

$$\frac{s_\alpha}{s_\beta} = \frac{\sin\frac{3\beta}{2}}{2\cos\beta}.$$

Odavde i iz $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$, uz oznake $k = \frac{s_\alpha}{s_\beta}$ i $x = \sin\frac{\beta}{2}$ dobivamo jednadžbu

$$4x^3 - 4kx^2 - 3x + 2k = 0.$$

Ako je $k=3$, ta jednadžba prelazi u jednadžbu

$$4x^3 - 12x^2 - 3x + 6 = 0, \tag{4}$$

za koju se lako vidi da nema racionalnih korijena. Odavde i iz Teorema 1 slijedi da se elementarno ne može konstruirati $\triangle ABC$ za koji je $s_\alpha = 3$, $s_\beta = s_\gamma = 1$.

S druge strane takav trokut postoji jer jednadžba (4) ima rješenje između $5/8$ i $6/8$, pa je kut $\beta=\gamma$ između 62° i 74° a kut α između 32° i 56°. ■

Sada se osvrnimo malo na jednadžbu četvrtog stupnja. U tu svrhu nam treba njena rezolventa. Podsjetimo (v. pogl. II) da za jednadžbu

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,\ a, b, c, d \in \mathbb{Q}, \tag{1}$$

njena **rezolventa** je jednadžba trećeg reda

$$(ay-c)^2 = 4\left(\frac{a^2}{4} - b + 2y\right)(y^2-d). \tag{2}$$

Ona je navedena stoga da izraz u uglatoj zagradi u zapisu

$$f(x) = (x^2 + \frac{a}{2}x + y)^2 - [(\frac{a^2}{4} - b + 2y)x^2 + (ay-c)x + y^2 - d]$$

bude kvadrat nekog linearnog polinoma $Ax + B$. Stoga su veze među korijenima x_i jednadžbe (1) i korijenima y_i rezolvente (2) kvadratne, tj. vrijedi

$$x_i^2 + \frac{a}{2}x_i + y_i = \pm(Ax_i + B).$$

Odatle onda neposredno slijedi ovaj teorem.

TEOREM 2. *Jednadžba četvrtog stupnja (1) je rješiva u kvadratnim radikalima ako i samo ako je u kvadratnim radikalima rješiva njezina rezolventa (2).*

Iz Teorema 1 i 2 onda dobivamo kriterij za konstruktibilnost korijena jednadžbe četvrtog stupnja.

KOROLAR 1. *Korijeni jednadžbe (1) se mogu elementarno konstruirati ako i samo ako njezina rezolventa (2) ima racionalni korijen.*

Primjer 8. Unutar danog kuta zadana je točka. Pokažite da se elementarno ne može tom točkom konstruirati dužina zadane duljine, kojoj su krajevi na krakovima kuta.

Rješenje. Uzmimo posebni slučaj da je kut pravi i promotrimo u koordinatnom sustavu točku (1,2) kroz koju treba prolaziti pravac koji siječe osi u točkama čija je udaljenost jednaka 6. Taj pravac ima jednadžbu $y - 2 = k(x-1)$. Taj pravac možemo elementarno konstruirati ako i samo ako možemo konstruirati koeficijent smjera k. No, iz uvjeta da je navedena udaljenost 6 i $k \neq 0$ slijedi $((k-2)/k)^2 + (k-2)^2 = 36$, tj.

$$k^4 - 4k^3 - 31k^2 - 4k + 4 = 0.$$

Rezolventa te jednadžbe je jednadžba

$$f(y) = 2y^3 + 31y^2 - 144 = 0.$$

Kandidati za racionalni korijen te jednadžbe su brojevi p/q, gdje su

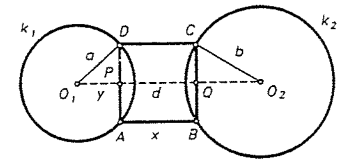
$$p = \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm9, \pm12, \pm16, \pm18, \pm24, \pm36, \pm48, \pm72, \pm144,$$

$q = \pm1, \pm2$. Iako se vidi da niti jedan od ovih nije korijen. (U stvari, zbog $f(2) < 0$, $f(3) > 0$, $f(-3) > 0$, $f(-2) < 0$, $f(-12) > 0$, $f(-16) < 0$, dovoljno je ispitati samo one kandidate koji su u uniji $[-16,-12] \cup [-3,-2] \cup [2,3]$). Prema Korolaru 1, k nije moguće elementarno konstruirati, te stoga ni traženi pravac. ■

Primjer 9. U ravnini su nacrtane kružnice k_1 i k_2. Pokažite da nije moguće ravnalom i šestarom konstruirati kvadrat $ABCD$, tako da je $A, D \in k_1$, a $B, C \in k_2$.

Rješenje. neka su O_1, O_2 središta kružnica k_1 i k_2, te $P = O_1O_2 \cap AD$, $Q = O_1O_2 \cap BC$. Nadalje, neka je $|O_1A| = a$, $|O_2C| = b$, $|O_1O_2| = d$, $|AB| = x$, $|O_1P| = y$. Tada je $y^2 + (x/2)^2 = a^2$ i $(d-x-y)^2 + (x/2)^2 = b^2$. Stavimo li $a^2 - b^2 = c^2$, dobivamo nakon sređivanja jednadžbu

$$c^4 + (d-x)^4 + 2c^2(d-x)^2 + x^2(d-x)^2 = 4a^2(d-x)^2$$



Sl. 296.

odnosno

$$x^4 - 3dx^3 + \frac{2c^2 + 7d^2 - 4a^2}{2}x^2 + (4a^2d - 2d^3 - 2c^2d)x + \frac{(c^2+d^2)^2 - 4a^2d^2}{2} = 0.$$

Da dobijemo što jednostavniju jednadžbu uzmimo vrijednosti $a = 2$, $b = 1$, pa stoga $c^2 = 3$ i $d = 4$. Tada dobivamo

$$x^4 - 12x^3 + 51x^2 - 88x + \frac{105}{2} = 0.$$

Rezolventa ove jednadžbe je

$$4y^3 - 102y^2 - 846y - 2297 = 0.$$

Lako se vidi da ona nema racionalnih korijena, pa prema Korolaru 1, problem nije moguće riješiti u kvadratnim radikalima, tj. izvesti konstrukciju ravnalom i šestarom. (Nekoliko specijalnih slučajeva kao npr. $d = 2a = 2b$ i stoga $c = 0$ u slučaju da se kružnice diraju očito ima rješenje $x = d$.) ■

Navedimo sada tablicu o konstruktibilnosti trokuta ako su zadane tri od veličina

$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, v_a, v_b, v_c, t_a, t_b, t_c, s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$.

Redni broj	Zadani elementi	Rješivost	Redni broj	Zadani elementi	Rješivost
1.	a, b, c	da	8.	a, b, s_α	ne
2.	a, b, α	da	9.	a, b, s_γ	da
3.	a, b, γ	da	10.	a, α, β	da
4.	a, b, v_a	da	11.	a, α, v_a	da
5.	a, b, v_c	da	12.	a, α, v_b	da
6.	a, b, t_a	da	13.	a, α, t_a	da
7.	a, b, t_c	da	14.	a, α, t_b	da

Redni broj	Zadani elementi	Rješivost
15.	a, α, s_α	da
16.	a, α, s_β	ne
17.	a, β, γ	da
18.	a, β, v_a	da
19.	a, β, v_b	da
20.	a, β, v_c	neodređen
21.	a, β, t_a	da
22.	a, β, t_b	da
23.	a, β, t_c	da
24.	a, β, s_α	ne
25.	a, β, s_β	da
26.	a, β, s_γ	da
27.	a, v_a, v_b	da
28.	a, v_a, t_a	da
29.	a, v_a, t_b	da
30.	a, v_a, s_α	da
31.	a, v_a, s_β	ne
32.	a, v_b, v_c	da
33.	a, v_b, t_a	da
34.	a, v_b, t_b	da
35.	a, v_b, t_c	da
36.	a, v_b, s_α	ne
37.	a, v_b, s_β	da
38.	a, v_b, s_γ	da
39.	a, t_a, t_b	da
40.	a, t_a, s_α	da
41.	a, t_a, s_β	ne
42.	a, t_b, t_c	da
43.	a, t_b, s_α	ne
44.	a, t_b, s_β	ne
45.	a, t_b, s_γ	ne
46.	a, s_α, s_β	ne
47.	a, s_β, s_γ	ne
48.	α, β, γ	neodređen
49.	α, β, v_a	da
50.	α, β, v_c	da
51.	α, β, t_a	da
52.	α, β, t_c	da
53.	α, β, s_α	da
54.	α, β, s_γ	da
55.	α, v_a, v_b	da

Redni broj	Zadani elementi	Rješivost
56.	α, v_a, t_a	da
57.	α, v_a, t_b	da
58.	α, v_a, s_α	da
59.	α, v_a, s_β	ne
60.	α, v_b, v_c	da
61.	α, v_b, t_a	da
62.	α, v_b, t_b	da
63.	α, v_b, t_c	da
64.	α, v_b, s_α	da
65.	α, v_b, s_β	da
66.	α, v_b, s_γ	ne
67.	α, t_a, t_b	da
68.	α, t_a, s_α	da
69.	α, t_a, s_β	ne
70.	α, t_b, t_c	da
71.	α, t_b, s_α	ne
72.	α, t_b, s_β	ne
73.	α, t_b, s_γ	ne
74.	$\alpha, s_\alpha, s_\beta$	ne
75.	$\alpha, s_\beta, s_\gamma$	ne
76.	v_a, v_b, v_c	da
77.	v_a, v_b, t_a	da
78.	v_a, v_b, t_c	da
79.	v_a, v_b, s_α	ne
80.	v_a, v_b, s_γ	da
81.	v_a, t_a, t_b	da
82.	v_a, t_a, s_α	da
83.	v_a, t_a, s_β	ne
84.	v_a, t_b, t_c	da
85.	v_a, t_b, s_α	da
86.	v_a, t_b, s_β	ne
87.	v_a, t_b, s_γ	ne
88.	v_a, s_α, s_β	ne
89.	v_a, s_β, s_γ	ne
90.	t_a, t_b, t_c	da
91.	t_a, t_b, s_α	ne
92.	t_a, t_b, s_γ	ne
93.	t_a, s_α, s_β	ne
94.	t_a, s_β, s_γ	ne
95.	$s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$	ne

U ovoj tablici nisu navedeni zadaci istog tipa. Tako na primjer, pod rednim brojem 2 navedena je konstrukcija trokuta ako je zadano a, b, α. Jasno je da postoji još 5 zadataka istoga tipa, to su a, b, β; a, c, α; a, c, γ; b, c, β i b, c, γ.

§ 9. Konstrukcije pravilnih poligona

Do sada smo već ustanovili da se elementarno mogu konstruirati pravilni trokut, četverokut (tj. kvadrat), peterokut, šesterokut, osmerokut, deseterokut itd. Općenito, očito, se može konstruirati pravilni n-terokut za n oblika $n = 2^{k+1}$, $n = 3\cdot 2^k$, $n = 5\cdot 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. To je stoga što se njihovi središnji kutovi $\frac{2\pi}{n}$ dobiju (uzastopnim) raspolavljanjem središnjih kutova trokuta, četverokuta i peterokuta. Općenitije, ako znamo konstruirati pravilni n-terokut, onda znamo i pravilni $2n$-terokut.

Pokazat ćemo sada da se pravilni sedmerokut ne može elementarno konstruirati. Da dokažemo da se pravilni sedmerokut ne može konstruirati ravnalom i šestarom, dovoljno je dokazati da se ne može konstruirati pravilni sedmerokut upisan u jediničnu kružnicu. Kako je središnji kut pravilnog sedmerokuta $2\pi/7$, dovoljno je vidjeti da broj $\cos 2\pi/7$ nije konstruktibilan.

PROPOZICIJA 1. *Broj* $\cos 2\pi/7$ *nije konstruktibilan.*

Dokaz. Oko točke $z = 0$ kompleksne ravnine opišimo jediničnu kružnicu i uzmimo pravilni sedmerokut kojemu je jedan vrh u točki $z_0 = 1$. Kompleksni brojevi koji reprezentiraju vrhove tog sedmerokuta su prema Moivré–ovoj formuli korijeni jednadžbe $z^7 - 1 = 0$. Faktorizacijom dobivamo jednadžbu

$$(z-1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0.$$

Vrhovi osim z_0 su rješenja jednadžbe

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Podijelimo li ovu jednadžbu sa z^3, onda uz $x = z + \frac{1}{z} = z + \overline{z}$ dobivamo jednadžbu

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Ova jednadžba nema racionalnih korijena, pa se prema Teoremu 1 njeni korijeni ne mogu elementarno konstruirati. No, jedan od njegovih korijena je za $\varepsilon = e^{2\pi i/7} = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$ broj $x = \varepsilon + \overline{\varepsilon} = \cos\frac{2\pi}{7}$. ■

Ustanovili smo već da pravilni deveterokut i osamnaesterokut ne možemo konstruirati ravnalom i šestarom (vidi Primjer 3 - trisekcije kuta). Kasnije ćemo vidjeti da se pravilni 11-terokut, 13-terokut, 14-terokut ne mogu konstruirati. No, sada ćemo efektivno pokazati da se pravilni 17-terokut može konstruirati.

PROPOZICIJA 2. *Pravilni sedamnaesterokut je moguće konstruirati ravnalom i šestarom.*

Dokaz. Pokazat ćemo da vrijedi

$$\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{1}{16}\left(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}\right),\quad (*)$$

što znači da je $\cos 2\pi/17$ izražen u kvadratnim radikalima, pa stoga konstruktibilan, a to pak znači da je pravilni 17-terokut moguće konstruirati ravnalom i šestarom.

Kao i u prethodnoj propoziciji polazimo od jednadžbe $z^{17}-1=0$. Njeni korijeni su $z_k=e^{2k\pi i/17}=\cos\frac{2k\pi}{17}+i\sin\frac{2k\pi}{17}$, $k=0,1,\ldots,16$. Neka je $\varepsilon=z_1=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}$. Tada je $z_k=\varepsilon^k$, $k=0,1,\ldots,16$. Promotrimo brojeve

$$y_1=\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^8+\varepsilon^9+\varepsilon^{13}+\varepsilon^{15}+\varepsilon^{16},\quad y_2=\varepsilon^3+\varepsilon^5+\varepsilon^6+\varepsilon^7+\varepsilon^{10}+\varepsilon^{11}+\varepsilon^{12}+\varepsilon^{14}.$$

Zbog Vieté–ove formule je $y_1+y_2=-1$. Nađimo sada y_1y_2. Iz $\varepsilon^{17+l}=\varepsilon^l$ slijedi $y_1y_2=4(y_1+y_2)=-4$. Stoga su y_1, y_2 korijeni jednadžbe $t^2+t-4=0$, pa je $t_{1,2}=(-1\pm\sqrt{17})/2$. Zbog $t_1>0$, $t_2<0$, pokažemo li da je $y_1>0$, bit će $y_1=t_1$. U tu svrhu uočimo da je $\varepsilon^k+\varepsilon^{-k}=2\cos\frac{2k\pi}{17}$, te da je $\varepsilon^{17-k}=\varepsilon^{-k}$. Odatle slijedi da je

$$\begin{aligned}y_1&=(\varepsilon+\varepsilon^{16})+(\varepsilon^2+\varepsilon^{15})+(\varepsilon^4+\varepsilon^{13})+(\varepsilon^8+\varepsilon^9)=\\&=(\varepsilon+\varepsilon^{-1})+(\varepsilon^2+\varepsilon^{-2})+(\varepsilon^4+\varepsilon^{-4})+(\varepsilon^8+\varepsilon^{-8}).\end{aligned}$$

Stoga je

$$y_1=2\cos\frac{2\pi}{17}+2\cos\frac{4\pi}{17}+2\cos\frac{8\pi}{17}+2\cos\frac{16\pi}{17}=4\left(\cos\frac{3\pi}{17}\cos\frac{\pi}{17}-\cos\frac{5\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\right),$$

a kako je cos padajuća funkcija na $[0,\pi/2]$ slijedi da je $y_1>0$. Dakle je

$$y_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2},\quad y_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}.\quad (1)$$

Sada postupak nastavljamo sa y_1, tj. napišemo ga u obliku $y_1=u_1+u_2$, gdje je $u_1=\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^{13}+\varepsilon^{16}$, $u_2=\varepsilon^2+\varepsilon^8+\varepsilon^9+\varepsilon^{15}$. Kao i prije lako se vidi da je

$$u_1+u_2=y_1,\quad u_1u_2=y_1+y_2=-1,$$

pa su u_1, u_2 korijeni jednadžbe $t^2-y_1t-1=0$. Iz $u_1=(\varepsilon+\varepsilon^{16})+(\varepsilon^4+\varepsilon^{13})=$ $=(\varepsilon+\varepsilon^{-1})+(\varepsilon^4+\varepsilon^{-4})$ slijedi

$$u_1=2\cos\frac{2\pi}{17}+2\cos\frac{8\pi}{17}>0,$$

pa je

$$u_1=\frac{y_1+\sqrt{y_1^2+4}}{2},\quad u_2=\frac{y_1-\sqrt{y_1^2+4}}{2}.\quad (2)$$

Napišimo sada $y_2=u_3+u_4$, gdje je $u_3=\varepsilon^3+\varepsilon^5+\varepsilon^{12}+\varepsilon^{14}$, $u_4=\varepsilon^6+\varepsilon^7+\varepsilon^{10}+\varepsilon^{11}$. Lako se vidi da je $u_3u_4=y_1+y_2=-1$, pa su u_3, u_4 korijeni jednadžbe $t^2-y_2t-1=$ $=0$. Kao i prije lako se vidi da je $u_3>0$, pa je

$$u_3=\frac{y_2+\sqrt{y_2^2+4}}{2},\quad u_4=\frac{y_2-\sqrt{y_2^2+4}}{2}.\quad (3)$$

Konačno, napišimo u_1 u obliku $u_1=u_5+u_6$, gdje je $u_5=\varepsilon+\varepsilon^{16}$, $u_6=\varepsilon^4+\varepsilon^{13}$. Očito je

$$u_5=\varepsilon+\varepsilon^{-1}=2\cos\frac{2\pi}{17}>2\cos\frac{8\pi}{17}=\varepsilon^4+\varepsilon^{-4}=u_6.\quad (4)$$

Dalje je $u_5u_6=\varepsilon^5+\varepsilon^3+\varepsilon^{14}+\varepsilon^{12}=u_3$, pa su u_5 i u_6 korijeni jednadžbe $t^2-u_1t+u_3=$ $=0$, a odavde je radi $u_5>u_6$ sigurno

$$u_5=\frac{u_1+\sqrt{u_1^2-4u_3}}{2},\quad u_6=\frac{u_1-\sqrt{u_1^2-4u_3}}{2}.\quad (5)$$

Iz (4) slijedi da je $\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{1}{2}u_5$, pa ako ovamo uvrstimo (5) dobivamo

$$\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{1}{4}\left(u_1+\sqrt{u_1^2-4u_3}\right),$$

a odavde uvrštavanjem (3), (2), (1) redom, slijedi (*). Pri tom treba pokazati da vrijedi i jednakost

$$-4\sqrt{34+2\sqrt{17}}+\sqrt{170-26\sqrt{17}}=-\sqrt{170+38\sqrt{17}}.\ \blacksquare$$

Gauss se vrlo intenzivno bavio pitanjem konstrukcija pravilnih n-terokuta i prvo što je riješio bilo je pitanje konstruktibilnosti pravilnih p-terokuta za p prost broj i pravilnih p^a-terokuta ($a\in\mathbf{N}$), a potom i kriterija za konstruktibilnost bilo kojeg pravilnog n-terokuta. No, krenimo redom. Trebamo prvo malo algebre.

Za $n\in\mathbf{N}$, promotrimo polinom $x^n-1\in\mathbf{Z}[x]$. Nad poljem $\mathbf{C}$ se ovaj polinom može faktorizirati kao $x^n-1=(x-\varepsilon_0)(x-\varepsilon_1)\ldots(x-\varepsilon_{n-1})$, gdje je $\varepsilon_k=e^{2\pi ik/n}$, $k=0,\ldots,n-1$. Ovi korijeni iz jedinice čine multiplikativnu grupu G koja je izomorfna s cikličkom grupom $\mathbf{Z}_n$. Vrijedi $\varepsilon_k=(\varepsilon_1)^k$. Element $\varepsilon\in G$ je generator te grupe ako je $\varepsilon^n=1$, ali $\varepsilon^r\neq 1$ za $r<n$. Takav element zovemo **primitivni n-ti korijen iz jedinice**. Lako se vidi da je ε_k primitivni n-ti korijen iz jedinice ako i samo ako su k i n relativno prosti, tj. $M(k,n)=1$. Takvih primitivnih n-tih korijena iz jedinice ima $\varphi(n)$ (Eulerova funkcija, v. VII). Definirajmo sada **ciklotomski polinom (ili polinom dijeljenja kružnice)**

$$\Phi_n(x)=\prod_{\substack{1\le k\le n\\ M(k,n)=1}}(x-\varepsilon_k),$$

tj. kao polinom čiji su svi korijeni primitivni n-ti korijeni iz jedinice. Dakle $\Phi_n(x) \in \in \mathbb{C}[x]$ i $st\Phi_n(x) = \varphi(n)$. Očito, poznavanje bilo kojeg korijena ε_k od Φ_n daje potenciranjem kutove $r \cdot 2\pi/n$, tj. kutove pravilnog n-terokuta upisanog u jediničnu kružnicu $|z| = 1$ u kompleksnoj ravnini pa je konstrukcija pravilnog n-terokuta ekvivalentna konstrukciji jednog (pa onda i svih) primitivnog n-tog korijena iz jedinice.

LEMA 1. $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$.

Dokaz. Promotrimo grupu $G = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\}$. Neka je red elementa ε_k jednak d (tj. red podgrupe generirane sa ε_k). Tada zbog Lagrange-ovog teorema da red podgrupe dijeli red grupe slijedi $d|n$. Stoga, ako je $\varepsilon_k \in G$ primitivni d-ti korijen iz jedinice, onda $d|n$.

Obratno, ako $d|n$, $n = kd$, a ε d-ti primitivni korijen iz jedinice, onda je $\varepsilon^d = 1$, pa je $\varepsilon^{kd} = \varepsilon^n = 1$ i stoga $\varepsilon \in G$. Prema tome se grupa G sastoji iz svih primitivnih d-tih korijena iz jedinice za sve d za koje je $d|n$. Formula iz leme kaže upravo to isto. ∎

LEMA 2. *$\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$, tj. Φ_n je polinom s cjelobrojnim koeficijentima.*

Dokaz. Indukcijom po n. $\Phi_1(x) = x \in \mathbb{Z}[x]$, $\Phi_2(x) = x - 1 \in \mathbb{Z}[x]$. Pretpostavimo da je $\Phi_r(x) \in \mathbb{Z}[x]$, za $r < n$. Prvo, polinom $\Phi_n(x)$ je očito normiran. Po pretpostavci indukcije je

$$f(x) = \prod_{\substack{d|n \\ d \neq n}} \Phi_d(x)$$

normirani polinom iz $\mathbb{Z}[x]$. Prema Lemi 1 je $\Phi_n(x) = (x^n - 1)/f(x)$, a prema teoremu o dijeljenju polinoma s ostatkom slijedi da je i $\Phi_n(x)$ polinom s cijelim koeficijentima, jer su takvi $x^n - 1$ i $f(x)$ i $f(x)$ je normiran. ∎

Neka je p prost broj. Izračunajmo $\Phi_p(x)$ i $\Phi_{p^a}(x)$ $(a \in \mathbb{N})$. Stavimo li $\varepsilon_p = = \varepsilon_0 = 1$, imamo

$$\Phi_p(x) = \prod_{1 \le k < p} (x - \varepsilon_k) = \frac{1}{x-1} \prod_{1 \le k \le p} (x - \varepsilon_k) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + 1.$$

Nadalje, kako su svi djeljitelji od p^a oblika p^b i kako je za $c < b$ polinom $x^{p^b} - 1$ djeljiv sa $x^{p^c} - 1$, to je

$$\Phi_{p^a}(x) = \frac{x^{p^a} - 1}{x^{p^{a-1}} - 1} = x^{p^{a-1}(p-1)} + x^{p^{a-1}(p-2)} + \ldots + x^{p^{a-1}} + 1.$$

Uočite da je stupanj od $\Phi_{p^a}(x)$ jednak $\varphi(p^a) = p^{a-1}(p-1)$.

LEMA 3. *Polinomi $\Phi_p(x)$ i $\Phi_{p^a}(x)$ su ireducibilni nad* $\mathbb{Q}$. (Općenito su polinomi $\Phi_n(x)$ ireducibilni nad $\mathbb{Q}$, ali to nećemo dokazati, jer je to malo složenije.)

Dokaz. Podsjetimo se Eisensteinovog kriterija (v. pogl. II): Ako je

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

za kojeg postoji prost broj p takav da je $p \nmid a_n$, $p|a_{n-1}$, $p|a_{n-2}, \ldots, p|a_0$, ali $p^2 \nmid a_0$, onda je $f(x)$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$. Stavimo li sada $x = y + 1$ u $\Phi_p(x)$, dobivamo

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = \frac{(y+1)^p - 1}{y} =$$
$$= y^{p-1} + \binom{p}{1} y^{p-2} + \binom{p}{2} y^{p-3} + \ldots + \binom{p}{k} y^{k-1} + \ldots + \binom{p}{p-2} y + p.$$

Kako $p \mid \binom{p}{k}$, $1 \le k \le p - 1$, slijedi da je $\Phi_p(x)$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$. Koristeći gornju formulu za $\Phi_{p^a}(x)$ i Eisensteinov kriterij slijedi opet uz $x = y + 1$ slično ireducibilnost za $\Phi_{p^a}(x)$. ∎

Vratimo se konstruktibilnosti kutova. Neka je zadan kut $\psi \in [0, \pi]$, pa time i njegov kosinus $c = \cos\psi$. Neka je $\varphi = \psi/n$ i $d = \cos\varphi$. Iz $(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = = \cos n\varphi + i \sin\varphi$ dobijemo $\cos n\varphi$ kao polinom u $\cos\varphi$ koji počinje s $\cos^n \varphi$. Ako je $n = 2^k$ za neko $k \in \mathbb{N}$, onda očito uzastopnim raspolavljanjem možemo konstruirati φ pa stoga i d. Obratno, ako je d konstruktibilan, onda d mora ležati u nekom proširenju stupnja 2^k nad poljem $\mathbb{Q}(c)$.

Prost broj p oblika $p = 2^{2^k} + 1$, $k \ge 0$, se zove **Fermatov prost broj**. Za $k = 0, 1, 2, 3, 4$ dobivamo redom proste brojeve 3, 5, 17, 257, 65537. No, $k = 5$ daje broj $2^{2^5} + 1$ koji ima djeljitelj 641 pa nije prost (dokažite to!). Da li osim navedenih postoje i drugi Fermatovi prosti brojevi danas (1991 g.) je otvoren problem.

TEOREM 1. *(i) Neka je $p \ge 3$ prost broj. Ako je moguće elementarno konstruirati pravilni p-terokut, onda je p Fermatov prost broj.*

(ii) Ako je moguće konstruirati pravilni p^a-terokut onda je $p^{a-1}(p-1)$ potencija od 2, tj. ili je $p = 2$ ili je pak $a = 1$ i p je Fermatov prost broj.

Dokaz. (i) Broj $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{p} + i \sin\frac{2\pi}{p}$ je p-ti primitivni korijen iz jedinice. Kako je prema Lemi 3 $\Phi_p(x)$ ireducibilan i $st\Phi_p(x)\varphi(p) = p - 1$, onda mora biti $p - 1 = 2^k$, tj. $p = 2^k + 1$ za neko $k \in \mathbb{N}$. Da bi prirodan broj $2^k + 1$ bio prost broj mora k biti potencija od 2, tj. $k = 2^l$ $(l \ge 0)$. U protivnom bi naime bio $k = ab$, $a \ne 1$ neparan, pa bi $2^k + 1 = (2^b)^a + 1$ imao netrivijalan faktor $2^b + 1$. Dakle, p mora biti Fermatov prost broj.

(ii) Kako je $st\Phi_{p^a}(x) = p^{a-1}(p-1)$ to iz istih razloga mora biti $p^{a-1}(p-1) = 2^k$, odakle slijedi tvrdnja.

LEMA 4. *Neka su k i l relativno prosti prirodni brojevi. Konstruktibilnost pravilnog kl-terokuta je izvediva ako i samo ako je izvediva konstrukcija pravilnog k-terokuta i pravilnog l-terokuta.*

Dokaz. Ako se može konstruirati kut $\alpha = 2\pi/kl$, onda se očito mogu konstruirati kutovi $l\alpha = 2\pi/k$ i $k\alpha = 2\pi/l$. Obratno, ako možemo konstruirati kutove

$\alpha_1 = 2\pi/k$ i $\alpha_2 = 2\pi/l$, onda možemo konstruirati i kutove oblika $u\alpha_1 + v\alpha_2$, gdje su u, v cijeli brojevi. Kako su k i l relativno prosti, to postoje $u, v \in \mathbb{Z}$ takvi da je $uk + vl = 1$ (v. pogl. VII). No, tada se može konstruirati i kut $u\alpha_1 + v\alpha_2 = 2\pi\left(\frac{u}{k} + \frac{v}{l}\right) = \frac{2\pi}{kl}$. ∎

Odavde i iz Teorema 1 slijedi neposredno

TEOREM 2. *Ako se pravilni n-terokut može konstruirati, onda je n ili potencija od 2 ili je rastav na proste brojeve od n oblika $2^r p_1 p_2 \ldots p_k$, gdje je $r \geq 0$, a p_i su različiti Fermatovi prosti brojevi.* ∎

Vrijedi i obrat Teorema 2. Na temelju Leme 4, dovoljno je dokazati da se za Fermatov broj $p = 2^{2^k} + 1$ može konstruirati pravilni p-terokut. Dokaz ove činjenice zahtijeva poznavanje Galoisove teorije, u što nećemo ovdje ulaziti (vidi V. Perić, Algebra II, Svjetlost, Sarajevo, 1980 ili B. Hornfeck, Algebra, W. de Gruyter, Berlin, 1973), pa smo se odlučili za nešto dulji, ali elementarni dokaz, u kojem ćemo koristiti neke pojmove i činjenice iz elementarne teorije brojeva, koje ćemo dokazati u pogl. VII.

Tako dolazimo do osnovnog teorema.

TEOREM 3 (Gauss, 1796). *Pravilni n-terokut se može konstruirati ravnalom i šestarom ako i samo ako je n potencija od 2 ili je $n = 2^r p_1 p_2 \ldots p_k$, gdje je $r \geq 0$, a p_i su različiti Fermatovi prosti brojevi.*

Dokaz. Kako smo, dakle, već istakli, preostaje dokazati da se može konstruirati pravilni n-terokut, gdje je $n = p$ Fermatov prost broj, tj. $p = 2^{2^N} + 1$. Drugim riječima, treba pokazati da je primitivni p-ti korijen iz jedinice ω konstruktibilan.

Svi p-ti primitivni korijeni iz jedinice su tada $\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{p-1}$. Tada je ω korijen jednadžbe $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = 0$ (a i svi ostali p-ti primitivni korijeni jedinice). Iz Vietove formule slijedi da je $\sum_{k=1}^{p-1} \omega^k = -1$. Iz definicije ω se odmah vidi $\omega^i = \omega^j \Leftrightarrow i \equiv j (\mathrm{mod}\, p)$ (usp. pogl. VII). Također se vidi da nekongruentnih primitivnih p-tih korijena iz jedinice ima $\varphi(p-1)$.

Neka je g neki eksponent nekog primitivnog p-tog korijena iz jedinice modulo p. Tada su brojevi $g, g^2, g^3, \ldots, g^{p-1}$ nekongruentni i svaki je $\not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ pa se svi primitivni p-ti korijeni iz jedinice mogu reprezentirati kao $\omega^g, \omega^{g^2}, \ldots, \omega^{g^{p-1}}$. Pisat ćemo naprosto kraće $[k]$ umjesto ω^k. Neka je $S = \{[g], [g^2], \ldots, [g^{p-1}]\}$. S je skup svih p-tih primitivnih korijena jedinice. Svaki član od S (u navedenom poretku) je g-ta potencija prethodnog, a prvi je g-ta potencija posljednjeg. Dakle, sve primitivne p-te korijene iz jedinice možemo dobiti tako da startamo od bilo kojeg i tada ih redom podižemo na g-tu potenciju; npr. startamo li od $[g^j]$, onda redom dobijamo $[g^j], [g^{j+1}], [g^{j+2}], \ldots, [g^{p-1}], [g], \ldots, [g^{j-1}]$.

Označimo $S_1 = \{[g], [g^3], [g^5], \ldots, [g^{p-2}]\}$, $S_2 = \{[g^2], [g^4], [g^6], \ldots, [g^{p-1}]\}$. Uočimo da svaki od njih dobijemo uzastopnom g^2-tom potencijom nekog od elemenata, ili pak možemo smatrati da S_1 i S_2 dobijemo tako da uzmemo "svaki drugi" element od S.

Za $i = 1, 2$, particionirajmo (raspolovimo) S_i u dva skupa $S_{i,1}$, $S_{i,2}$ na analogan način. Tako je $S_{i,1}$ generiran uzastopnim potenciranjem s g^4 prvog elementa od S_i (ili uzimajući "svaki drugi" element od S_i startajući s prvim elementom), a $S_{i,2}$ uzastopnim potenciranjem sa g^4 počev s drugim elementom od S_i.

Sada nastavimo to raspolavljanje skupova sve dok ne dođemo do jednočlanih skupova. Preciznije, taj proces možemo induktivno ovako opisati. **m-skupom** ćemo zvati skup dobiven iz m raspolavljanja, pa će takav imati m indeksa: S je 0-skup, S_1 i S_2 su 1-skupovi, $S_{1,1}, S_{1,2}, S_{2,1} S_{2,2}$ su 2-skupovi itd. Svaki m-skup je generiran potenciranjem g^{2^m}-tom potencijom nekog elementa i svaki takav skup sadrži $(p-1)/2^m$ elemenata. Svaki m-skup $S_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$ daje dva $(m+1)$-skupa $S_{i_1, \ldots, i_m, 1}$ i $S_{i_1, i_2 \ldots, i_m, 2}$. Prvi je generiran sukcesivnim potenciranjem $g^{(2^{m+1})}$-tim potenciranjem prvog elementa, a drugi tim istim potenciranjem drugog elementa od $S_{i_1, \ldots, i_m}$. Konačni efekt je opet uzimanje svakog drugog elementa. Takva dva dobivena $(m+1)$-skupa zvat ćemo **komplementarni**.

Uočimo da je ovdje važno da je $p - 1$ potencija od 2. Kad naime $p - 1$ ne bi bilo tog oblika, onda opetovana podjela na dva jednaka skupa ne bi bila moguća, a niti bi tada skup mogao biti dobiven sukcesivnim potenciranjem sa g^{2^m}. No, u našem slučaju, nakon $m = 2^N$ podjela, svaki skup sadrži jedan jedini element i to neki primitivni p-ti korijen iz jedinice.

Nazovimo **period** skupa sumu njegovih elemenata, a **m-period** ako je period nekog m-skupa. Dva perioda su **komplementarna** ako su periodi komplementarnih skupova. Stoga svaki m-period je suma nekih $(p-1)/2^m$ primitivnih p-tih korijena iz jedinice i posebno za $m = 2^N$, svaki takav m-period je točno jedan takav primitivni p-ti korijen jedinice. Teorem će stoga biti dokazan, ako pokažemo da je za svako $0 \leq m \leq 2^N$, svaki m-period konstruktibilan. To ćemo pokazati indukcijom po m. Srž postupka je da će $(m+1)$-period biti korijen kvadratne jednadžbe čiji koeficijenti su linearne kombinacije m-perioda (čiji korijeni će biti komplementarni periodi).

Podsjetimo da ako znamo sumu i produkt dvaju brojeva, recimo $x_1 + x_2 = A$, $x_1 x_2 = B$, onda su x_1, x_2 korijeni jednadžbe $x^2 - Ax + B = 0$. Ako su A i B konstruktibilni, onda su takvi x_1 i x_2.

Dokažimo dakle da su svi m-periodi konstruktibilni, $0 \leq m \leq 2^N$. Za $m = 0$, jedini 0-period je suma svih primitivnih p-tih korijena, a ta je jednaka -1, što je konstruktibilan broj. Pretpostavimo da su svi do $(m-1)$-perioda konstruktibilni. Neka je α m-period, a β njemu komplementarni m-period. Dokažimo da su $\alpha + \beta$ i $\alpha\beta$ konstruktibilni. Kako je $\alpha + \beta$ točno jedan od $(m-1)$-perioda, slijedi da je zbog induktivne pretpostavke taj konstruktibilan. Konstruktibilnost $\alpha\beta$ će slijediti iz sljedeće tvrdnje.

TVRDNJA. $\alpha\beta$ se može izraziti kao linearna kombinacija s nenegativnim cijelim koeficijentima svih m-perioda, $1 \leq m \leq 2^N - 1$. U toj linearnoj kombinaciji komplementarni periodi imaju iste koeficijente. Za $m = 2^N$, $\alpha\beta = 1$.

Dokaz Tvrdnje. α i β su sume elemenata u dva komplementarna m-skupa S' i S''. Ta dva m-skupa su dobivena iz jednog $(m-1)$-skupa, a generirana su uzastopnim potenciranjem sa $g^{(2^{m-1})}$ nekog elementa ω^k. Stavimo li $h = g^{(2^{m-1})}$ i

$f = 1+(p-1)/2^{m-1}$, onda je taj $(m-1)$-skup $[k], [kh], [kh^2], \ldots, [kh^{f-2}]$. Daljnjim potenciranjem od h ne dobivamo ništa novo, jer je $h^{f-1} = \left(g^{(2^{m-1})}\right)^{(p-1)/2^{m-1}} \equiv$ $\equiv g^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod} p)$ (tu smo koristili Fermatov teorem). Stoga je

$$\alpha = [k] + [kh^2] + \ldots + [kh^{f-3}], \qquad \beta = [kh] + [kh^3] + \ldots + [kh^{f-2}].$$

Za $m = 2^N$, $h = g^{(p-1)/2} \equiv -1(\mathrm{mod} p)$, pa je $\alpha\beta = \omega^k\omega^{-k} = 1$. Za $m < 2^N$, grupiramo članove ovako (podsjetimo $[kh^i][kh^j] = [kh^i + kh^j]$, jer $[t]$ znači ω^t):

$$\begin{aligned}\alpha\beta = & [k+kh] + [kh^2 + kh^3] + \ldots + [kh^{f-3} + kh^{f-2}] + \\ & + [k + kh^3] + [kh^2 + kh^5] + \ldots + [kh^{f-3} + kh] + \\ & + [k + kh^5] + [kh^2 + kh^7] + \ldots + [kh^{f-3} + kh^3] + \\ & \vdots \\ & + [k + kh^{f-4}] + [kh^2 + kh^{f-2}] + \ldots + [kh^{f-3} + kh^{f-6}] + \\ & + [k + kh^{f-2}] + [kh^2 + kh] + \ldots + [kh^{f-3} + kh^{f-4}].\end{aligned}$$

Svaki redak je suma generirana potenciranjem sa h^2 nekog od elemenata. Nadalje, nijedan od eksponenata nije kongruentan 0 modulo p. Zaista, dovoljno je pogledati prvi stupac. Pretpostavimo da je $k + kh^{2j+1} \equiv 0(\mathrm{mod} p)$ gdje je $1 \leq 2j + 1 \leq f-2$. Tada je $h^{2j+1} \equiv -1 \pmod p \Rightarrow h^{4j+2} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow g^{(2^{m-1})(4j+2)} \equiv$ $\equiv 1(\mathrm{mod} p)$, pa kako je g primitivni korijen modulo p, to mora $p-1 \mid (2^{m-1})(4j+2)$. No,

$$2 \leq 4j + 2 \leq 2f - 4 = \frac{p-1}{2^{m-2}} - 2 \Rightarrow (2^{m-1})(4j+2) \leq 2(p-1) - 2^m < 2(p-1).$$

Stoga bi bilo $p - 1 = 2^{m-1}(4j+2) = 2^m(2j+1)$. No, kako $p-1$ nema neparnih faktora, jedini slučaj koji može nastupiti je $j = 0$, ali bi tada imali $p - 1 = 2^m \leq$ $\leq 2^{2^N - 1} = \frac{p-1}{2}$, što je nemoguće. Dakle, svaki redak je neki m-period, no ne nužno $\alpha\beta$. Ukupno ima 2^m m-skupova, svaki s odgovarajućim periodom. Nadalje, prvi i posljednji redak su komplementarni m-periodi, jer uzmemo li h-tu potenciju nekog elementa prvog retka dobijemo element posljednjeg retka. Tako npr. uzmemo li h-tu potenciju prvog elementa prvog retka, dobijemo

$$[k + kh]^h = [kh + kh^2] = [kh^2 + kh],$$

što je drugi element zadnjeg retka. Na isti način se vidi da je svaki i-ti redak odozgo komplementaran i-tom retku odozdo. Broj redaka je paran i iznosi $(f-1)/2$, pa se svi reci mogu tako spariti, pa se svaki m-period javlja kao i njegov komplement. Time je tvrdnja dokazana.

Prema tvrdnji $\alpha\beta$ je suma članova oblika $a(\gamma + \widetilde{\gamma})$, gdje je $a \in \mathrm{N}_0$, a γ i $\widetilde{\gamma}$ komplementarni m-periodi. Kako su γ i $\widetilde{\gamma}$ komplementarni, to je $\gamma + \widetilde{\gamma}$ neki $(m-1)$-period, pa stoga konstruktibilan prema induktivnoj pretpostavci. Kao suma konstruktibilnih brojeva slijedi da je $\alpha\beta$ i sam konstruktibilan. Ranije smo već pokazali da je $\alpha + \beta$ konstruktibilan, pa su konačno α i β konstruktibilni. (Pokušajte ovaj dokaz popratiti za pravilni sedamnaesterokut.) ■

SUBOTA

IZBOR IZ PISMENIH ISPITA IZ ELEMENTARNE MATEMATIKE I

22.1.1990.

1. Za aritmetički niz $(a_k)_{k\in\mathrm{N}}$, $d = a_{k+1} - a_k$, pokažite da vrijedi

$$\frac{1}{a_1a_2a_3} + \frac{1}{a_2a_3a_4} + \ldots + \frac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}} = \frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_1a_2} - \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}\right), \quad \forall n \in \mathrm{N}.$$

2. Riješite nejednadžbu $\log_{x+3}(x^2 - x) < 1$.

3. Riješite jednadžbu $|1 - \log_{\frac{1}{5}} x| + 2 = |3 - \log_{\frac{1}{5}} x|$.

4. Da li su dva trokuta sukladna ako se podudaraju u simetrali kuta, visini spuštenoj iz vrha tog kuta i jednom od preostalih kutova?

5. Ako je polinom $F(x) = f_1(x^3) + xf_2(x^3)$ djeljiv s $x^2 + x + 1$, onda su polinomi f_1 i f_2 djeljivi s $x - 1$. Dokažite.

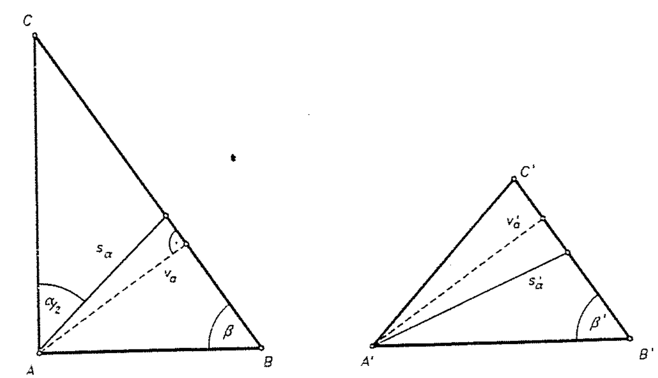
RJEŠENJA:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_ka_{k+1}a_{k+2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_ka_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}}\right) = \frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_1a_2} - \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}\right)$.

2. 1) $x \in \langle -3, -2\rangle \Rightarrow x^2 - x > x + 3 \Rightarrow (x-3)(x+1) > 0$, a to je ispunjeno za sve $x \in \langle -3, -2\rangle$.
2) $x \in \langle -2, +\infty\rangle \Rightarrow 0 < x^2 - x < x + 3 \Rightarrow x \in \langle -1, 0\rangle \cup \langle 1, 3\rangle$.

3. Stavimo $t = \log_{\frac{1}{5}} x$, pa dobivamo jednadžbu $|1 - t| + 2 = |3 - t|$ koju zadovoljava svaki $t \leq 1$. Stoga je $\log_{\frac{1}{5}} x \leq 1$, odnosno $x \in \left[\frac{1}{5}, +\infty\right\rangle$.

4. Ne moraju biti. $s_\alpha = s'_\alpha$, $v_a = v'_a$, $\beta = \beta'$, ali $\triangle ABC \ncong \triangle A'B'C'$.



5. $F(x) = f_1(x^3) + xf_2(x^3) = f_1(x^3) - f_1(1) + xf_2(x^3) - xf_2(1) + f_1(1) + xf_2(1)$. Budući je $f_i(x^3) - f_i(1)$ djeljivo sa $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, to mora biti $f_1(1) + xf_2(1) = 0$, odnosno $f_1(1) = f_2(1) = 0$. To znači da su polinomi f_1 i f_2 djeljivi sa $x - 1$.

8.6.1990.

1. Asistent je na papiru napisao polinom $f(x) = x^2 + 10x + 20$ i taj papir dao studentima u predavaonici. Svaki student je ili umanjio za 1 ili povećao za 1 ili slobodni član ili koeficijent uz x (ali ne oba). Na kraju je na papiru ostao napisan polinom $g(x) = x^2 + 20x + 10$. Da li je istina da je u nekom trenutku na papiru bio napisan polinom sa cjelobrojnim korijenima?

2. Dokažite da postoji jedinstven trokut čije su dužine stranica uzastopni prirodni brojevi, a jedan od kutova je dva puta veći od jednog od preostala dva.

3. Riješite jednadžbu: $\dfrac{\log_x(2a-x)}{\log_x 2} + \dfrac{\log_a x}{\log_a 2} = \dfrac{1}{\log_{(a^2-1)} 2}$ ovisno o realnom parametru a.

4. Riješite sustav nejednadžbi:

$$\frac{\sqrt{\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2}}{\log_5\left(\frac{1}{3}(\log_3 5 - 1)\right)} \geq 0$$

$$x - \sqrt{x} - 2 \geq 0.$$

5. Dokažite da je zbroj prvih $1 + 3 + 9 + \ldots + 3^n$ prirodnih brojeva jednak

$$1^2 + 3^2 + 9^2 + \ldots + (3^n)^2.$$

RJEŠENJA:

1. Označimo sa $f_i(x)$ polinom koji je napisao i-ti student. Dakle, $f_0(x) = x^2 + 10x + 20, \ldots, f_n(x) = x^2 + 20x + 10$. Neka je $a_i = f_i(-1)$. Tada je $a_0 = 11$, $a_i = a_{i-1} \pm 1$, $a_n = -9$. Budući je $a_0 > 0$ i $a_n < 0$, zaključujemo da $\exists i \in \{2, \ldots, n-1\}$ takav da je $a_i = 0$. Neka je $f_i(x) = x^2 + ax + b$. Iz $f_i(-1) = 0$ slijedi $b = a - 1$, odnosno $f_i(x) = (x+1)(x+a-1)$, pa je $f_i(x)$ polinom sa cjelobrojnim korijenima.

2. Neka je $2\alpha = \beta$. Tada je $\gamma = \pi - 3\alpha$, pa imamo (sinusov poučak):

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin 2\alpha}{b} = \frac{\sin 3\alpha}{c}.$$

Odavde je $\frac{b}{a} = 2\cos\alpha$ i $\frac{c}{a} = 4\cos^2\alpha - 1$. Stoga je $b^2 = a(a+c)$. Budući su a, b, c uzastopni prirodni brojevi i $a < b$, imamo 3 mogućnosti: 1) $a = n$, $b = n+1$, $c = n-1$; 2) $a = n$, $b = n+1$, $c = n+2$; 3) $a = n$, $b = n+2$, $c = n+1$. Prve dvije mogućnosti otpadaju, a treća daje $n = 4$, te je jedini trokut s traženim svojstvom onaj čije su stranice $a = 4$, $b = 6$, $c = 5$.

3. Za $a > 1$, $a \neq 2$, $x > 0$, $x \neq 1$, $x < 2a$ imamo: $\log_2(2a - x) + \log_2 x = \log_2(a^2 - 1)$, odnosno $2ax - x^2 = a^2 - 1$, tj. $x = a \pm 1$. Prema tome, za $a \in \langle 1, +\infty\rangle \setminus \{\sqrt{2}, 2\}$ imamo dva rješenja: $x_1 = a + 1$, $x_2 = a - 1$, dok je za $a = 2$ rješenje $x = 3$.

4. Budući je $\log_5\left(\frac{1}{3}(\log_3 5 - 1)\right) < \log_5\left(\frac{1}{3}\right) < 0$, prva nejednadžba je ekvivalentna sa: $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$. odnosno $x \in \{2, 4\}$. Drugu nejednadžbu zadovoljava $x = 4$.

5. Zbroj prvih $1 + 3 + 9 + \ldots + 3^n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$ prirodnih brojeva je jednak

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3^{n+1} - 1}{2}\right)\left(\frac{3^{n+1} - 1}{2} + 1\right) = \frac{1}{8}(3^{n+1} - 1)(3^{n+1} + 1) = \frac{3^{2n+2} - 1}{8},$$

dok je

$$1 + 3^2 + 9^2 + \ldots + (3^n)^2 = 1 + 9 + 9^2 + \ldots + 9^n = \frac{9^{n+1} - 1}{8} = \frac{3^{2n+2} - 1}{8},$$

te su ova dva broja jednaka.

22.6.1990.

1. Za aritmetički niz $a_1, a_2, \ldots$ vrijedi $\dfrac{S_m}{S_n} = \dfrac{m^2}{n^2}$. ($S_k$ je k-ta parcijalna suma.) Pokažite da je tada

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

2. Riješite jednadžbu $3^x 2^{\frac{3x}{x+2}} = 6$.

3. Riješite nejednadžbu

$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x+1} < \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{4 - x^2} + 1.$$

4. Dane su dvije stranice trokuta (b i c) i simetrala kuta između njih (duljine s). Izračunajte treću stranicu trokuta!

5. Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)$ polinomom $h(x) = x^4 + x^2 + 1$, ako $f(x)$ pri dijeljenju polinomom $h_1(x) = x^2 + x + 1$ daje ostatak $r_1(x) = -x + 1$, a pri dijeljenju polinomom $h_2(x) = x^2 - x + 1$ daje ostatak $r_2(x) = 3x + 5$.

RJEŠENJA:

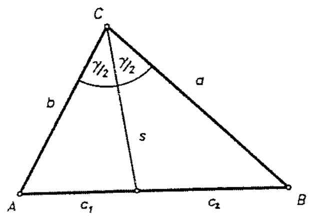
1. $$\frac{S_2}{S_1} = \frac{2a_1 + d}{a_1} = 4 \Rightarrow d = 2a_1 \Rightarrow \frac{a_m}{a_n} = \frac{a_1 + (m-1) \cdot 2a_1}{a_1 + (n-1) \cdot 2a_1} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

2. $$3^{x-1} = 2^{1 - \frac{3x}{x+2}} \Rightarrow 3^{x-1} = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x+2}}\right]^{x-1}.$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1. \quad 3 = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x+2}} \Rightarrow x_2 = -\log_3 36.$$

3. Uz uvjet $x \in \langle -1, 2\rangle$ nejednadžba je ekvivalentna sa $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x+1}{4-x^2} < 2$, odnosno sa $x^2+9x+5 > 0$. Odavde slijedi da je $x \in \left\langle -\infty, \dfrac{-9-\sqrt{61}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \dfrac{-9+\sqrt{61}}{2}, +\infty\right\rangle$. Dakle, rješenje je $x \in \left\langle \dfrac{-9+\sqrt{61}}{2}, 2\right\rangle$.

4. Iz slike i kosinusovog poučka slijedi:



$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{b}{a}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{b^2+s^2-c_1^2}{2bs} = \frac{a^2+s^2-c_2^2}{2as}$$

$$\Rightarrow ab^2+as^2-ac_1^2 = ba^2+bs^2-b\cdot\frac{c_1^2\cdot a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow (s^2-ab)(a-b) = \frac{a}{b}c_1^2(b-a)$$

$$\Rightarrow c_1 = \sqrt{\frac{b}{a}(ab-s^2)},\qquad c_2 = \sqrt{\frac{a}{b}(ab-s^2)} \Rightarrow c = c_1+c_2 = \sqrt{1-\frac{s^2}{ab}}\cdot(a+b).$$

5. Primijetimo da je $h(x) = h_1(x)\cdot h_2(x)$. Neka je $f(x) = h(x)\cdot q(x)+ax^3+bx^2+cx+d$. Iz $ax^3+bx^2+cx+d = (x^2+x+1)(ax+(b-a))+x(c-b)+d+a-b$ i $ax^3+bx^2+cx+d = (x^2-x+1)(ax+(b+a))+x(c+b)+d-b-a$ slijedi da je $c=b=-1$, $d+a-b=1$, $c+b=3$ i $d-a-b=5$, pa je $c=1$, $b=2$, $a=-2$, $d=5$. Prema tome, ostatak je $-2x^3+2x^2+x+5$.

6.7.1990.

1. Riješite sustav jednadžbi:

$$\log_2 y = \log_4(xy-2)$$
$$\log_9 x^2 + \log_3(x-y) = 1$$

2. Diskutirajte o skupu rješenja nejednadžbe $\log_a(1-8a^{-x}) \geq 2(1-x)$, ovisno o realnom parametru a.

3. Suma svih koeficijenta nekog polinoma stupnja n je 2, a suma svih koeficijenata uz parne potencije od x jednaka je sumi koeficijenata uz neparne potencije od x. Nađite ostatak pri dijeljenju tog polinoma polinomom $\varphi(x) = x^2-1$.

4. Konstruirajte trokut ako je zadana jedna stranica, zbroj druge dvije i visina koja odgovara jednoj od stranica čiji je zbroj zadan.

5. Zadano je p aritmetičkih nizova, svaki sa po n članova. Prvi članovi tih nizova su, redom, brojevi $1, 2, 3, \ldots, p$, a razlike (d) tih nizova su redom $1, 3, 5, \ldots, 2p-1$. Izračunajte zbroj članova svih nizova.

RJEŠENJA:

1. Uz uvjete $x > y > 0$, $xy > 2$ sustav je ekvivalentan sa:

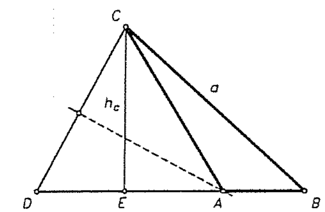
$$y^2 = xy-2$$
$$x(x-y) = 1$$

Rješavanjem ovog sustava dobivamo: $x=3$, $y=2$.

2. Ako je $a > 1$, onda je nejednadžba ekvivalentna sa $1-8a^{-x} \geq a^2\cdot a^{-x}$, odnosno $x \geq \log_a(a^2+8)$.
Ako je $0 < a < 1$, onda je nejednadžba ekvivalentna sa $0 < 1-8a^{-x} \leq a^2\cdot a^{-x}$, odnosno $\log_a(a^2+8) \leq x < \log_a 8$.

3. $f(1) = 2$, $\dfrac{f(1)+f(-1)}{2} = 1 \Rightarrow f(-1) = 0$. Neka je traženi ostatak $r(x) = ax+b$. Tada je $a+b=2$, $-a+b=0$, pa je $r(x) = x+1$.

4. Najprije konstruiramo trokut BCE u kome je $|BC| = a$, $|CE| = h_c$ i $\measuredangle E = \frac{\pi}{2}$. Potom odredimo na polupravcu BE točku D takvu da je $|BD| = b+c$. Točku A dobijemo kao presjek pravca BE i simetrale dužine CD.



5. Tražena suma je:

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{n}{2}[2k+(n-1)(2k-1)] = \sum_{k=1}^{p}\frac{n(1-n)}{2}+\sum_{k=1}^{p}n^2k =$$
$$= \frac{n(1-n)}{2}\cdot p+\frac{n^2p(p+1)}{2} = \frac{np}{2}(np+1).$$

8.12.1990.

1. Ako su $\xi_1, \ldots, \xi_n$ nultočke polinoma $P(x) = x^n+x^{n-1}+\ldots+x+1$, izračunajte

$$\frac{1}{\xi_1-1}+\frac{1}{\xi_2-1}+\ldots+\frac{1}{\xi_n-1}$$

kao funkciju od n.

2. Konstruirajte $\triangle ABC$ ako su mu zadani opseg, jedan kut i visina nasuprot tog kuta. Konstrukciju opišite detaljno i dokažite sve svoje tvrdnje.

3. Riješite sustav jednadžbi:

$$\log_{|xy|}(x^2-y^2) = 1$$
$$\log_{|xy|}(x-y) = 0.$$

4. Riješite nejednadžbu $\log_{\frac{2}{3}|x-2|}\left(2^{1-x^2}\right) \geq 0$.

5. Brojevi $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ čine aritmetički niz. Ako je poznato da je

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n = \alpha$$
$$\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \ldots + \vartheta_n^2 = \beta^2,$$

odredite razliku tog niza kao funkciju od α, β, n.

RJEŠENJA:

1. U prvom koraku konstruiramo jednadžbu čiji su korijeni $\xi_1 - 1, \xi_2 - 1, \ldots, \xi_n - 1$. Očito je to jednadžba $(x+1)^n + (x+1)^{n-1} + \ldots + (x+1) + 1 = 0$, tj.

$$\frac{(x+1)^{n+1} - 1}{(x+1) - 1} = \frac{(x+1)^{n+1} - 1}{x} = 0.$$

Sada konstruiramo jednadžbu čiji su korijeni $\frac{1}{\xi_1 - 1}, \frac{1}{\xi_2 - 1}, \ldots, \frac{1}{\xi_n - 1}$. To je jednadžba

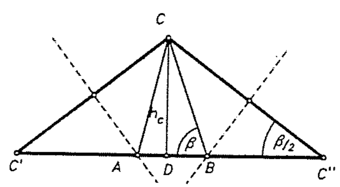
$$\frac{\left(\frac{1}{x} + 1\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{(1+x)^{n+1} - x^{n+1}}{x^n} = 0.$$

Nakon razvoja brojnika dobivamo:

$$(n+1)x^n + \frac{(n+1)n}{2}x^{n-1} + \ldots = 0, \quad \text{odnosno} \quad x^n + \frac{n}{2}x^{n-1} + \ldots = 0.$$

Sada je $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_1 - 1} = -\frac{n}{2}$.

2. Najprije konstruiramo $\triangle CDC''$ u kome je $|CD| = h_c$, $\measuredangle D = \frac{\pi}{2}$, $\measuredangle C'' = \frac{\beta}{2}$. Točka B je presjek pravca $C''D$ i simetrale dužine $\overline{CC''}$. Na polupravcu $C''D$ odredimo točku C' tako da je $|C'C''| = a + b + c$. Tada je točka A presjek pravca $C'D$ i simetrale dužine $\overline{CC'}$.



3.

1) $\quad xy > 0,\ xy \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x^2 - y^2 &= xy \\ x - y &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad y_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

2) $\quad xy < 0,\ xy \neq -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x^2 - y^2 &= -xy \\ x - y &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad y_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$$

4. 1) Ako je $\frac{2}{3}|x-2| > 1$, tj. $x \in \langle -\infty, \frac{1}{2}\rangle \cup \langle \frac{7}{2}, +\infty\rangle$, nejednadžba je ekvivalentna sa $2^{1-x^2} \geq 1$, odnosno $-1 \leq x \leq 1$. Stoga je $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right\rangle$.

2) Ako je $0 < \frac{2}{3}|x-2| < 1$, tj. $x \in \langle \frac{1}{2}, \frac{7}{2}\rangle$, nejednadžba je ekvivalentna sa $2^{1-x^2} \leq 1$, odnosno $x \geq 1$ ili $x \leq -1$. Stoga je $x \in [1, 2\rangle \cup \langle 2, \frac{7}{2}\rangle$, jer mora biti $x \neq 2$. Dakle, rješenje je $\left[-1, \frac{1}{2}\right\rangle \cup [1, 2\rangle \cup \langle 2, \frac{7}{2}\rangle$.

5. $d = \vartheta_2 - \vartheta_1$, $\vartheta_k = \vartheta_1 + (k-1)d$

$$n\vartheta_1 + d\frac{n(n-1)}{2} = \alpha \quad \Rightarrow \quad n\vartheta_1^2 + 2\vartheta_1 d\frac{(n-1)n}{2} + d^2\frac{n(n-1)^2}{4} = \frac{\alpha^2}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k^2 = n\vartheta_1^2 + 2\vartheta_1 d\sum_{k=1}^{n}(k-1) + d^2\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 =$$

$$= n\vartheta_1^2 + 2\vartheta_1 d\frac{(n-1)n}{2} + d^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \beta^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d^2\frac{n(n-1)(n+1)}{12} = \frac{\beta^2 n - \alpha^2}{n} \quad \Rightarrow \quad d = \pm\frac{2\sqrt{3(\beta^2 n - \alpha^2)}}{n\sqrt{n^2-1}}.$$

1.2.1991.

1. a) Riješite nejednadžbu: $|\log_{\sqrt{2}} x - 2| - |2 - \log_2 x| > 1$.

b) Riješite sustav jednadžbi

$$2^{x+y-1} + 2^{x-y+1} = 3$$
$$\frac{1}{7} \cdot 3^{x\log_3 2 + y\log_3 2 - 2} + 3^{x\log_3 2 - y\log_3 2 - 2} = \frac{1}{7}.$$

2. Konstruirajte $\triangle ABC$ ako je zadano $|BC| = a$, $|AC| - |AB| = d$ i razlika kutova $\delta = \measuredangle B - \measuredangle C$. Konstrukciju opišite detaljno i dokažite sve svoje tvrdnje.

3. Neka su x_1, x_2, x_3 korijeni kubne jednadžbe $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ s cjelobrojnim koeficijentima a, b, c i neka je $f(x)$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima. Da li je tada $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$ cijeli broj? Dokažite svoje tvrdnje.

4. Četiri različita cijela broja čine aritmetički niz. Jedan od tih brojeva je jednak zbroju kvadrata preostala tri broja iz niza. Nađite sve takve četvorke cijelih brojeva.

5. Dokažite matematičkom indukcijom

$$\sqrt{\underbrace{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \ldots + \sqrt{4}}}}_{n\ \text{četvorki}}} < 3.$$

RJEŠENJA:

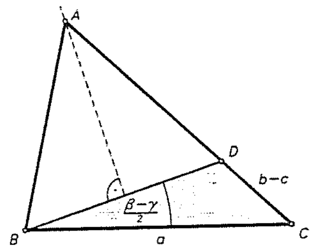
1. a) Ako je $0 < x < 2$ nejednadžba je ekvivalentna sa $-\log_2 x > \log_2 2$, pa je $x \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle$. Ako je $2 \leq x < 4$ imamo: $3\log_2 x > 5$, pa je $x \in \langle 2^{\frac{5}{3}}, 4\rangle$, dok za $x \geq 4$ imamo: $\log_2 x > 1$, što je ispunjeno za sve $x \geq 4$. Dakle, rješenje je $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle \cup \langle 2^{\frac{5}{3}}, +\infty\rangle$.

b) Supstitucijom $a = 2^{x+y}$, $b = 2^{x-y}$, dobivamo sustav

$$a + 4b = 6$$
$$a + 7b = 9,$$

čije je rješenje $a = 2$, $b = 1$, pa je $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

2. Najprije konstruiramo $\triangle BCD$ u kome je $|BC| = a$, $|CD| = d$ i $\sphericalangle B = \frac{\delta}{2}$. Točka A je presjek pravca CD i simetrale dužine $\overline{BD}$ (v. sliku).



3. $f(x) = q(x)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+r(x)$, gdje je $r(x) = kx^2+lx+m$, $k, l, m \in \mathbb{Z}$. Sada je $f(x_i) = r(x_i)$, $i = 1, 2, 3$, pa je

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) &= \\ &= k[(x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)] + l(x_1+x_2+x_3) + 3m = \\ &= k(a^2 - 2b) - la + 3m \quad \text{cijeli broj.} \end{aligned}$$

4. Možemo pretpostaviti da je $d > 0$. Tada imamo: $(b-d)^2 + b^2 + (b+d)^2 = b + 2d$, odnosno $3b^2 - b + 2d^2 - 2d = 0$. Odavde je $(6b-1)^2 = 24(d-d^2)+1$, pa mora biti $d = 1$ i $b = 0$. Dakle, postoji samo jedna četvorka brojeva sa zadanim svojstvom: $-1, 0, 1, 2$.

5. Indukcijom. Baza: $\sqrt{4} = 2 < 3$. Korak: Označimo

$$a_n = \underbrace{\sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4+\ldots+\sqrt{4}}}}}_{n \text{ četvorki}}.$$

Pretpostavimo da je $a_n < 3$. Tada je $a_{n+1} = \sqrt{4+a_n} < \sqrt{4+3} = \sqrt{7} < 3$.

15.2.1991.

1. Dokažite matematičkom indukcijom da za svaki realan broj $x > 0$, $x \neq 1$ i svaki prirodan broja $n \geq 2$ vrijedi:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\log_x 2^{k-1} \cdot \log_x 2^k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{\log_x^2 2}.$$

2. a) Riješite jednadžbu $\log_3(\sqrt{x} + |\sqrt{x} - 1|) = \log_9(4\sqrt{x} - 3 + 4|\sqrt{x} - 1|)$.
b) Riješite sustav jednadžbi

$$64^{2x} + 64^{2y} = 12$$
$$64^{x+y} = 4\sqrt{2}.$$

3. Neka je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ niz realnih brojeva takav da je $a_1 = 0$, $|a_2| = |a_1 + 1|$, $|a_3| = |a_2 + 1|, \ldots, |a_n| = |a_{n-1} + 1|, \ldots$. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq -\frac{1}{2}.$$

4. Konstruirajte $\triangle ABC$ ako je zadano $|AC| = b$, $\sphericalangle A = \alpha$ i težišnica t_a. Konstrukciju opišite detaljno i dokažite sve svoje tvrdnje.

5. Dokažite da za $n \geq 5$ ne postoji polinom n-tog stupnja $P_n(x)$ s cjelobrojnim koeficijentima koji je u n različitih cjelobrojnih točaka jednak n, a u nuli jednak 0. Da li za $n = 4$ postoji polinom s traženim svojstvom?

RJEŠENJA:

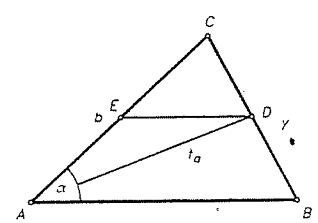
1. Baza: Za $n = 2$ imamo $\dfrac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 2^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\log_x^2 2} = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{\log_x^2 2}$.
Korak: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj $n \geq 2$. Tada je

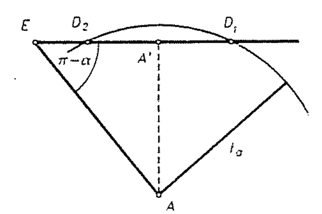
$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\log_x 2^{k-1} \cdot \log_x 2^k} &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{\log_x^2 2} + \frac{1}{\log_x 2^n \cdot \log_x 2^{n+1}} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)\frac{1}{\log_x^2 2} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{\log_x^2 2}. \end{aligned}$$

2. a) 1) $\sqrt{x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Tada je jednadžba ekvivalentna sa $(2\sqrt{x}-1)^2 = 8\sqrt{x} - 7$. Stavimo $t = \sqrt{x}$, pa dobijemo: $t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 4$.
2) $\sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$. Dobivamo da je svaki x iz ovog intervala rješenje jednadžbe. Prema tome, rješenje je: $[0, 1] \cup \{4\}$.

3. Zbrojimo jednakosti: $a_1^2 = 0$, $a_2^2 = (a_1+1)^2 = a_1^2 + 2a_1 + 1$, $a_3^2 = a_2^2 + 2a_2 + 1, \ldots, a_n^2 = a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} + 1$, $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2a_n + 1$. Dobivamo: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 + a_{n+1}^2 = 0 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + n - 1$, odnosno $2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = -n + a_{n+1}^2 \geq -n$. Odavde je $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq -\dfrac{1}{2}$.

4. Najprije konstruiramo pomoćni trokut AED u kome je $|AD| = t_a$, $|AE| = \frac{b}{2}$, $\sphericalangle E = \pi - \alpha$, zatim točku C kao centralno simetričnu točki A u odnosu na točku E, te točku B kao centralno simetričnu točki C u odnosu na točku D.





Diskusija: 1) $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Tada za $t_a \leq \frac{b}{2}$ nema rješenja, a za $t_a > \frac{b}{2}$ ima jedno rješenje.

2) $\alpha > \frac{\pi}{2}$.

$$t_a < |AA'| \Rightarrow \text{ nema rješenja}$$
$$t_a = |AA'| \Rightarrow \text{ jedno rješenje}$$
$$|AA'| < t_a < \frac{b}{2} \Rightarrow \text{ dva rješenja}$$
$$t_a \geq \frac{b}{2} \Rightarrow \text{ jedno rješenje.}$$

5. Polinom $Q_n(x) = P_n(x) - n$ ima n cjelobrojnih nultočaka $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dakle, $Q_n(x) = A(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$. Također je $Q_n(0) = P_n(0) - n = -n$. Prema tome, $-n = A(-x_1)(-x_2) \cdot \ldots \cdot (-x_n)$, odnosno $n = |Ax_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n|$. Međutim, $|Ax_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n| \geq 2^{n-2}$ (jer su najviše dva od x_i jednaki 1 i -1, a svi ostali su po apsolutnoj vrijednosti ≥ 2). Stoga je $n \geq 2^{n-2}$, a ova nejednakost ne vrijedi za $n \geq 5$. To se može dokazati indukcijom ili ovako:

$$2^{n-2} = (1+1)^{n-2} \geq 1 + (n-2) + \frac{(n-2)(n-3)}{2} \geq n - 1 + \frac{3 \cdot 2}{2} = n + 2 > n.$$

Za $n = 4$ možemo uzeti $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$ i dobijemo polinom

$$Q_4(x) = -(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = -(x^2-1)(x^2-4) = -x^4 + 5x^2 - 4,$$

tj. $P_4(x) = -x^4 + 5x^2$.

2.3.1991.

1. Koliko rješenja u skupu realnih brojeva ima jednadžba:

$$3^{\ln(1+|x|)} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln(1+x^2)}.$$

2. Konstruirajte $\triangle ABC$ ako je zadano: $|AB| = c$, visina v_a iz vrha A i razlika kutova $\beta - \gamma$. Konstrukciju opišite i diskutirajte jedinstvenost.

3. Neka je $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinom koji ima svojstvo da za svaki prirodan broj n, n-ta potencija $P^n(x)$ pri diobi sa $(x+a)^n$ daje ostatak a. Dokažite da je tada nužno $a = 1$, a polinom $P(x) \equiv 1$, tj. konstanta 1.

4. Pokažite, koristeći matematičku indukciju, ili na neki drugi način:

$$\sum_{k=9}^{n} \frac{1}{(\log_2 3)(\log_2 4)\ldots(\log_2 k)} < \sum_{k=9}^{n} \frac{1}{k^2}$$

za sve $n \in \{9, 10, 11, 12, \ldots\}$.

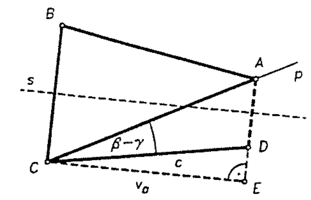
5. Da li postoji strogo rastući aritmetički niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u skupu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, tako da niz $\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_4}{a_3}, \ldots\right)$ bude geometrijski?

RJEŠENJA:

1. Funkcija $f(x) = 3^{\ln(1+|x|)} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln(1+x^2)}$ je strogo rastuća na $\langle 0, +\infty\rangle$ i strogo padajuća na $\langle -\infty, 0\rangle$. Budući je

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(2) = f(-2) = 3^{\ln 3} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln 5} \geq 3 - 2 > 0,$$

to dana jednadžba ima 2 rješenja (jedno pozitivno i jedno negativno).



2. Najprije konstruiramo $\triangle CDE$ u kome je $|CD| = c$, $|CE| = v_a$, $\sphericalangle E = \frac{\pi}{2}$. Potom konstruiramo pravac p koji zatvara kut $\beta - \gamma$ pravcem CD. Točka A je presjek pravca p i pravca CD. Pravac s je simetrala dužine $\overline{AD}$. Točka B je osnosimetrična točki C u odnosu na pravac s.

3. $P(x) = (x+a)f_1(x) + a$, $P^2(x) = (x+a)^2 f_2(x) + a \Rightarrow P(-a) = a$, $P^2(-a) = a \Rightarrow a^2 = a \Rightarrow a = 1$. Neka je $P(x) \not\equiv 1$. Tada $\exists k \in \mathbb{N}$ takav da je $P(x) = (x+1)^k \cdot f(x) + 1$, gdje je $f(-1) \neq 0$. Tada je

$$P^{k+1}(x) = \sum_{m=1}^{k+1} \binom{k+1}{m} [f(x)]^m (x+1)^{mk} + 1,$$

pa $(x+1)^{k+1} \mid (k+1)f(x)(x+1)^k$, te je $f(-1) = 0$. Dobivena kontradikcija pokazuje da je $P(x) \equiv 1$.

4. Baza: $\frac{1}{\log_2 3 \cdot \log_2 4 \cdot \ldots \cdot \log_2 9} < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{144} < \frac{1}{81} = \frac{1}{9^2}$.
Korak: Pretpostavimo da je

$$\sum_{k=9}^{n} \frac{1}{\log_2 3 \cdot \log_2 4 \cdot \ldots \cdot \log_2 k} < \sum_{k=9}^{n} \frac{1}{k^2},$$

za neki $n \geq 9$. Da bi dokazali

$$\sum_{k=9}^{n+1} \frac{1}{\log_2 3 \ldots \log_2(k+1)} < \sum_{k=9}^{n+1} \frac{1}{k^2},$$

dovoljno je dokazati da je $\log_2 3 \log_2 4 \ldots \log_2(n+1) > (n+1)^2$, za sve $n \geq 9$. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom. Baza:

$$\log_2 3 \ldots \log_2 10 > 1 \cdot 2^4 \cdot 3^3 = 432 > 10^2.$$

Korak: Pretpostavimo da je $\log_2 3 \ldots \log_2(n+1) > (n+1)^2$, za neki $n \geq 9$. Tada je

$$\log_2 3 \ldots \log_2(n+1) \log_2(n+2) > (n+1)^2 \cdot \log_2(n+2) > 3(n+1)^2 > (n+2)^2.$$

5. Iz $\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_4}{a_3}=\frac{a_3^2}{a_2^2}$ slijedi $(a_1+3d)(a_1+d)^3=a_1(a_1+2d)^3$, odnosno $2a_1d^3+3d^4=0$. Stoga je $d=-\frac{2a_1}{3}$. Uvrstimo li ovo u $\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_5}{a_4}=\frac{a_4^2}{a_3^2}$, dobivamo $-1\cdot\frac{5}{3}=3^2$. Kontradikcija. Prema tome, ne postoji niz sa zadanim svojstvom.

6.4.1991.

1. Dokažite matematičkom indukcijom da za svaki prirodan broj $n\geq 2$ vrijedi

$$2\sqrt{n+1}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1.$$

2. Niz je zadan na sljedeći način:

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=3a_n+\sqrt{8a_n^2+1}\quad \text{za}\quad n\geq 1.$$

Dokažite da su svi članovi tog niza prirodni brojevi.

3. a) Riješite jednadžbu: $2\cdot 8^x-27^x=12^x$.
b) Riješite nejednadžbu: $\log_x(2x)\leq\sqrt{\log_x(2x^3)}$.

4. Neka su x_1,x_2,x_3 nultočke polinoma $x^3+5x^2+7x+11$. Nađite polinom trećeg stupnja čije su nultočke y_1,y_2,y_3, gdje je

$$y_1=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y_2=\frac{x_2+x_3}{2},\qquad y_3=\frac{x_3+x_1}{2}.$$

5. Konstruirajte $\triangle ABC$ ako je zadano: $\sphericalangle A=\alpha$, $|AB|+|AC|=s$ i visina h_c. Konstrukciju opišite detaljno, dokažite sve svoje tvrdnje, te diskutirajte egzistenciju i jedinstvenost rješenja.

RJEŠENJA:

1. Označimo $S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Baza: $2\sqrt{3}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow 2\sqrt{6}<3\sqrt{2}+1\Leftrightarrow 5<6\sqrt{2}$, $1+\frac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}-1\Leftrightarrow 2\sqrt{2}<3\Leftrightarrow 8<9$.
Korak: Neka je $2\sqrt{n+1}-2<S_n<2\sqrt{n}-1$, za neki $n\geq 2$. Tada zbog

$$4(n^2+3n+2)<4n^2+12n+9\Leftrightarrow 2\sqrt{(n+2(n+1)}<2n+3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{n+2}<2\sqrt{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

i $4(n^2+n)<4n^2+4n+1\Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)}<2n+1\Leftrightarrow 2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1}$,

vrijedi

$$2\sqrt{n+2}-2<2\sqrt{n+1}-2+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<S_n+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=S_{n+1}<$$
$$<2\sqrt{n}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1}-1.$$

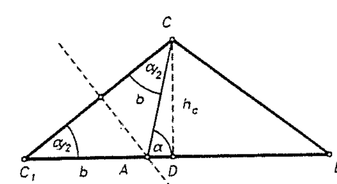
2. $(a_{n+1}-3a_n)^2=8a_n^2+1\Rightarrow a_{n+1}^2-6a_na_{n+1}+9a_n^2=8a_n^2+1\Rightarrow a_{n+1}^2-6a_na_{n+1}+a_n^2=1$. Analogno je $a_{n+2}^2-6a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+1}^2=1$. Oduzimanjem zadnje dvije jednakosti dobivamo: $(a_{n+2}-a_n)(a_{n+2}+a_n-6a_{n+1})=0$. Budući je očito $a_{n+2}>a_{n+1}>a_n$, to mora biti $a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n>0$. Prva dva člana niza $a_1=1$, $a_2=6$ su prirodni brojevi, pa prema principu matematičke indukcije zaključujemo da je svaki član niza prirodan broj.

3. a) Podijelimo jednadžbu sa 8^x i stavimo $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x$. Dobivamo: $t^3+t-2=0\Rightarrow$ $\Rightarrow t=1\Rightarrow x=0$.
b) Stavimo $y=\log_x 2$, pa dobivamo nejednadžbu $y+1\leq\sqrt{y+3}$. Ovo je očito zadovoljeno za $y\in[-3,-1]$, a za $y>-1$ imamo: $y^2+y-2\leq 0\Rightarrow -2\leq y\leq 1$. Dakle, $y\in[-3,1]$, odnosno $\log_x 2\geq -3$ i $\log_x 2\leq 1$. Za $0<x<1$ ovaj sustav nejednadžbi je ekvivalentan sa $\log_2 x\leq -\frac{1}{3}$, tj. $x\in\left\langle 0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$, a za $x\geq 1$ sa $\log_2 x\geq 1$, tj. $x\geq 2$. Prema tome, rješenje je $\left\langle 0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]\cup[2,+\infty\rangle$.

4. $x^3+5x^2+7x+11=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\Rightarrow x_1+x_2+x_3=-5$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=7$, $x_1x_2x_3=-11$. Traženi polinom $P(x)$ je jednak

$$(x-y_1)(x-y_2)(x-y_3)=x^3-(y_1+y_2+y_3)x^2+(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)x-y_1y_2y_3.$$
$$y_1+y_2+y_3=x_1+x_2+x_3=-5,$$
$$y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=\frac{1}{4}[(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)]=8$$
$$y_1y_2y_3=\frac{1}{8}[(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-x_1x_2x_3]=-3$$
$$\Rightarrow\quad P(x)=x^3+5x^2+8x+3.$$

5. Najprije konstruiramo pomoćni trokut CC_1D u kome je $\sphericalangle C_1=\frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle D=\frac{\pi}{2}$, $|CD|=h_c$, zatim točku B na pravcu C_1D tako da bude $|C_1B|=s$. Konačno, točku A dobijemo kao presjek pravca C_1B i simetrale dužine $\overline{CC_1}$. Da bi konstrukcija bila moguća nužno je i dovoljno da je $s>|AC|$. U tom slučaju je rješenje jedinstveno.



4.5.1991.

1. Aritmetički i geometrijski niz sa pozitivnim članovima $a_1,\ldots,a_n>0$ (aritmetički) $g_1,\ldots,g_n$ (geometrijski) imaju jednake krajnje članove, tj. $a_1=g_1$; $a_n=g_n$. Da li možete ocijeniti koji od tih nizova ima veći zbroj svojih članova?

2. Neka je $f(x)=\varphi(x^n)+g(x)\cdot\psi(x^n)$, gdje su φ,ψ,g polinomi i stupanj od g je barem 1, ali ne veći od $n-2$. Dokažite ili opovrgnite:
Ako je $f(x)$ djeljiv sa $x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1$, tada su $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ djeljivi sa $x-1$.

3. Konstruirajte $\triangle ABC$ ako je zadan zbroj stranica $|BC|=a$ i $|AC|=b$, razlika δ kutova $\sphericalangle A=\alpha$, $\sphericalangle B=\beta$, te visina koja odgovara stranici $\overline{BC}$.

4. Riješite jednadžbu: $\log_4(6+\sqrt{x}-|\sqrt{x}-2|)=\frac{1}{2}+\log_2|\sqrt{x}-|\sqrt{x}-2||$.

5. Riješite jednadžbu: $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} \geq 2$.

RJEŠENJA:

1. Označimo sa q kvocijent geometrijskog niza, $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} g_i$. Tada je

$$S_n = a_1(1+q^{n-1}) \cdot \frac{n}{2}, \qquad \sigma_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Dokazat ćemo da je za $n \geq 3$ i $q \neq 1$, $S_n > \sigma_n$. Očito je za $q \neq 1$ $(1-q^k)(1-q^{n-k-1}) > 0$. Sada za n paran imamo:

$$\frac{q^n-1}{q-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (q^k + q^{n-k-1}) < \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (1+q^{n-1}) = \frac{n}{2}(1+q^{n-1}),$$

dok za n neparan imamo:

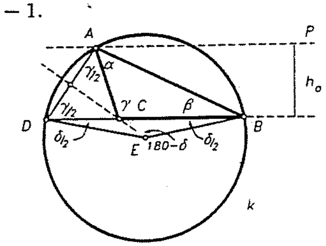
$$\frac{q^n-1}{q-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} (q^k + q^{n-k-1}) + q^{\frac{n-1}{2}} <$$

$$< \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} (1+q^{n-1}) + q^{\frac{n-1}{2}} = \frac{n-1}{2}(1+q^{n-1}) + \frac{1}{2}(1+q^{n-1}) = \frac{n}{2}(1+q^{n-1}),$$

što je trebalo dokazati.

2. Neka su ε_i, $i = 1, \ldots, n-1$, korijeni jednadžbe $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0$. Tada je $\varepsilon_i^n = 1$. Pretpostavimo da je $\psi(1) \neq 0$. $f(\varepsilon_i) = \varphi(1) + g(\varepsilon_i)\psi(1) = 0$, pa jednadžba $g(x) + \frac{\varphi(1)}{\psi(1)} = 0$ ima $n-1$ korijena što je nemoguće. Dakle, $\psi(1) = 0$. No, $\psi(1) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(\varepsilon) = \varphi(1) = 0$, pa su i $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ djeljivi sa $x - 1$.

3. Najprije konstruiramo $\triangle BDE$ u kome je $|BD| = a + b$, $\measuredangle D = \measuredangle B = \frac{\alpha - \beta}{2}$. Točka A je presjek pravca p udaljenog od pravca BD za h_a sa suprotne strane od točke E i kružnica k sa središtem E radijusa $|BE|$. Točka C je presjek pravca BD i simetrale dužine $\overline{AD}$.



4. Stavimo $\sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2| = t$. Dobivamo: $6 + t = 2t^2$, odnosno $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{3}{2}$. Za $t = 2$ dobivamo $|\sqrt{x} - 2| = \sqrt{x} - 2$, što je ispunjeno za sve $x \geq 4$. Za $t = -\frac{3}{2}$ dobivamo $|\sqrt{x} - 2| = \sqrt{x} + \frac{3}{2}$, odakle je $x = \frac{1}{16}$. Dakle, rješenje je $\left\{\frac{1}{16}\right\} \cup [4, +\infty\rangle$.

5. Uz uvjet $x > 0$, nejednadžba je ekvivalentna sa $x^{\log_2 x} \geq 16$. Logaritmiranjem dobivamo $(\log_2 x)^2 \geq 4$, pa je rješenje $\langle 0, \frac{1}{4}] \cup [4, +\infty\rangle$.

26.6.1991.

1. Dokažite matematičkom indukcijom da za svaki prirodan broj n vrijedi:

$$\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{n}}}} < 2.$$

2. Brojevi $a_1, a_2, a_3, \ldots$ čine aritmetički niz. Izrazite sumu

$$\frac{a_1 a_2 a_3}{a_1 + a_3} + \frac{a_2 a_3 a_4}{a_2 + a_4} + \ldots + \frac{a_n a_{n+1} a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}$$

kao funkciju od a_1, d, n.

3. a) Riješite jednadžbu: $3^{2x^2-6x+3} + 6^{x^2-3x+1} = 2^{2x^2-6x+3}$.

b) Riješite sustav jednadžbi:

$$|\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| = 3$$
$$xy = 3.$$

4. Riješite jednadžbu: $3x^5 + 2x^4 - 120x^2 + 37x + 78 = 0$.

5. Konstruirajte $\triangle ABC$ ako su zadane težišnice t_a, t_b, t_c. Konstrukciju opišite detaljno i dokažite sve svoje tvrdnje. Koje uvjete moraju zadovoljavati zadane veličine da bi konstrukcija bila moguća?

RJEŠENJA:

1. Označimo $x_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{n}}}}$. Vrijedi:

$$x_n^2 - 1 = \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{n}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{\frac{3}{2^2} + \sqrt{\frac{4}{2^3} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}}}}} \leq$$

$$\leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{n-1}}} = \sqrt{2} \cdot x_{n-1},$$

jer je $\frac{k}{2^{k-1}} \leq k - 1$ za $k \geq 2$. Stoga je $x_n^2 - 1 \leq \sqrt{2} \cdot x_{n-1}$. Za $n = 1$ je $x_1 = 1 < 2$. Pretpostavimo da je $x_{n-1} < 2$. Tada je $x_n^2 < 2\sqrt{2} + 1 < 4 \Rightarrow x < 2$.

2.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k a_{k+1} a_{k+2}}{a_k + a_{k+2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k a_{k+1} a_{k+2}}{2a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(a_1 + (k-1)d)(a_1 + (k+1)d)}{2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_1^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_1 kd + \sum_{k=1}^{n} \frac{(k^2-1)}{2} d^2 =$$

$$= \frac{a_1^2 \cdot n}{2} + a_1 d \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{d^2}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n\right) =$$

$$= \frac{1}{2} n \cdot \left[a_1^2 + a_1 d(n+1) + \frac{(n-1)(2n+5)}{6} d^2\right].$$

3. a) Podijelimo jednadžbu sa 2^{x^2-3x} i stavimo $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-2x}$. Dobivamo: $27t^2 + 6t - 8 = 0$, odnosno $t_1 = -\frac{2}{3}$, $t_2 = \frac{4}{9}$. Prvo rješenje otpada zbog $t > 0$. Imamo: $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$, pa je $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.
b) Iz $xy = 3$ i $x + y > 0$ slijedi $x > 0$, $y > 0$ i $x + y > 1$. Ako je $0 < x - y < 1$, dobivamo sustav $\frac{x+y}{x-y} = 8$, $xy = 3$. Njegova rješenja su $\left(\frac{3}{7}\sqrt{21}, \frac{1}{3}\sqrt{21}\right)$ i $\left(-\frac{3}{7}\sqrt{21}, -\frac{1}{3}\sqrt{21}\right)$. Drugo rješenje otpada zbog $x > 0$, $y > 0$. Ako je $x - y \geq 1$, dobivamo sustav $x^2 - y^2 = 8$, $xy = 3$. Odavde je $x^4 - 8x^2 + 9 = (x^2+1)(x^2-9) = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$, $y = 1$. Prema tome, rješenja sustava su $\left(\frac{3}{7}\sqrt{21}, \frac{1}{3}\sqrt{21}\right)$ i $(3, 1)$.

4. Lako se vidi da je jedno rješenje $x_1 = 1$.

$$(3x^5 + 2x^4 - 120x^2 + 37x + 78) : (x - 1) = 3x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 115x - 78 = Q(x).$$

Neka je $\frac{p}{q}$ racionalna nultočka polinoma $Q(x)$. Tada je

$$\frac{p}{q} \in \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{3}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm 3, \pm 6, \pm 13, \pm\frac{13}{3}, \pm 26, \pm\frac{26}{3}, \pm 39, \pm 78\right\}.$$

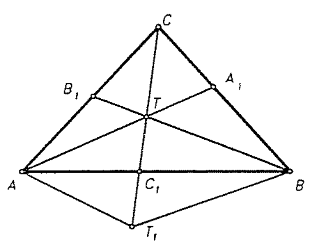
Također mora vrijediti: $p - q$ je djelitelj od $Q(1) = -180$ i $p + q$ je djelitelj od $Q(-1) = 40$. Iz ova dva uvjeta slijedi

$$\frac{p}{q} \in \left\{\pm\frac{1}{3}, -2, \pm\frac{2}{3}, \pm 3\right\}.$$

Budući je $Q(-2) = 180$, to -2 nije korijen od $Q(x)$ i $p + 2q$ nora dijeliti 180, pa otpadaju i $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$. Sada provjerom nalazimo da su 3 i $-\frac{2}{3}$ korijeni od $Q(x)$, a -3 i $-\frac{1}{3}$ nisu. Dakle, $x_2 = 3$, $x_3 = -\frac{2}{3}$.

$$(3x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 115x - 78) : (3x^2 - 7x - 6) = x^2 + 4x + 13 \Rightarrow x_4 = -2 + 3i, \quad x_5 = -2 - 3i.$$

5. Konstruiramo najprije $\triangle ATT_1$ takav da je $|AT| = \frac{2}{3}t_a$, $|AT_1| = \frac{2}{3}t_b$, $|TT_1| = \frac{2}{3}t_c$. Sada je točka C_1 polovište dužine TT_1, točka B centralno simetrična točki A u odnosu na C_1, a točka C centralno simetrična točki T_1 u odnosu na T. Konstrukcija je moguća ako je moguće konstruirati $\triangle ATT_1$, a to će biti ako je $t_a + t_b > t_c$, $t_a + t_c > t_b$ i $t_b + t_c > t_a$.



6.9.1991.

1. Riješite jednadžbu: $\log_x(1 + x^2) = \sqrt{\log_{\sqrt{x}}(x^2(1 + x^2)) + 4}$.

2. Ako su x_1 i x_2 korijeni jednadžbe $x^2 - 6x + 1 = 0$, tada je $x_1^n + x_2^n$ cijeli broj, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Dokažite!

3. Konstruirajte trokut $\triangle ABC$ ako je zadana visina v_c iz vrha C, kut β i radijus r upisane kružnice. Konstrukciju opišite i komentirajte jedinstvenost iste.

4. Zadan je niz kojemu je prvi član $3^{(4^5)}$, a svaki idući član jednak je sumi znamenaka prethodnog člana. Koliki je peti član niza?

5. Neka je $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom sedmog stupnja i neka je $|f(x_i)| = 1$ za pet različitih cijelih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_5$. Dokažite da se f ne može napisati kao produkt dva polinima sa cjelobrojnim koeficijentima, od kojih je svaki stupnja barem jedan.

RJEŠENJA:

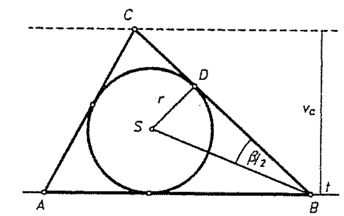
1. Stavimo $t = \log_x(1 + x^2)$, pa dobivamo jednadžbu $t^2 - 2t - 8 = 0$, odakle je (zbog $t > 0$) $t = 4$. Sada je $\log(1 + x^2) = 4\log x$, odnosno $x^4 - x^2 - 1 = 0$. Prema tome, $x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

2. $x_1 = 3 + \sqrt{2}$, $x_2 = 3 - \sqrt{2}$. Tvrdnju zadatka je dovoljno dokazati za $n \in \mathbb{N}$ jer je $x_2 = x_1^{-1}$. Dokažimo da je $x_1^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, $x_2^n = a_n - b_n\sqrt{2}$, $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$. Za $n = 1$ tvrdnja je točna. Pretpostavimo da vrijedi i za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$x_1^{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = (3a_n + 4b_n) + (2a_n + 3b_n)\cdot\sqrt{2},$$
$$x_2^{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = (3a_n + 4b_n) - (2a_n + 3b_n)\cdot\sqrt{2},$$

pa je $a_{n+1} = 3a_n + b_n$, $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$.

3. Najprije konstruiramo $\triangle BDS$ u kome je $|SD| = r$, $\sphericalangle D = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle B = \frac{\beta}{2}$. Neka je t tangenta na kružnicu $K(S, r)$ iz točke B. Tada je točka C presjek pravca udaljenog od t za v_c i tangente na $K(S, r)$ u točki D. Točka A je presjek tangente na $K(S, r)$ iz točke C i pravca t.



4. $n_1 = 3^{4^5}$. $\log n_1 = 1024 \cdot \log 3 < 512 \Rightarrow n_2 \leq 511 \cdot 9 = 4599 \Rightarrow n_3 \leq 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow$ $\Rightarrow n_4 \leq 11 \Rightarrow n_5 \leq 9$. Međutim, $9|n_1 \Rightarrow 9|n_i$, $\forall i$, pa je $n_5 = 9$.

5. Neka je $f(x) = g(x)\cdot h(x)$, $1 \leq \text{st}\, g \leq 3$. $g(x_i) = \pm 1$, za $i = 1, 2, \ldots, 5$, pa su među brojevima $g(x_i)$ točno 3 jednaka. Neka je npr. $g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) = 1$. Tada je $p(x) = g(x) - 1 = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, pa bi moralo biti $a(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) = a(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3) = -2$. Međutim, broj -2 se može na točno jedan način prikazati kao produkt 3 različita cijela broja: $-2 = 1\cdot 2\cdot(-1)$, pa dobivamo: $x_4 = x_5$, što je suprotno pretpostavci.

18.9.1991.

1. Dokažite matematičkom indukcijom da je za svaki cijeli broj $n \geq 0$ broj $7^{2n+1} + 2\cdot 13^{2n+1} + 17^{2n+1}$ djeljiv sa 50.

2. Suma prvih n članova jednog niza dana je izrazom

$$S_n = \frac{19}{2}n^2 - \frac{179}{2}n.$$

a) Dokažite da je taj niz aritmetički;
b) U tom nizu postoji jedan član koji je jednak dvostrukoj sumi svih prethodnih članova. Nađite taj član.

3. a) Rijcšite jednadžbu: $3\log(x^2) - \log^2(-x) = 9$.
b) Riješite nejednadžbu: $\dfrac{1}{1+\log x} + \dfrac{1}{1-\log x} > 2$.

4. Odredite polinom $P(x)$ petog stupnja takav da je $P(x)+1$ djeljiv sa $(x-1)^3$, a $P(x)-1$ djeljiv sa $(x+1)^3$.

5. Konstruirajte $\triangle ABC$ ako je zadano $|AB|+|AC| = s$, $|BC| = a$ i $\sphericalangle C - \sphericalangle B = \delta$. Konstrukciju opišite detaljno i dokažite sve svoje tvrdnje.

RJEŠENJA:

1. Označimo $A_n = 7^{2n+1} + 2\cdot 13^{2n+1} + 17^{2n+1}$. $A_0 = 50$. Pretpostavimo $50 \mid A_n$.

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 7^{2n+3} + 2\cdot 13^{2n+3} + 17^{2n+3} = \\ &= 7^{2n+1}\cdot(50-1) + 2\cdot 13^{2n+1}\cdot(170-1) + 17^{2n+1}\cdot(290-1) = \\ &= 7^{2n+1}\cdot 50 + 13^{2n+1}\cdot 50 + 290\cdot(13^{2n+1}+17^{2n+1}) - A_n. \end{aligned}$$

$13^{2n+1} + 17^{2n+1}$ je djeljivo sa $13+17 = 30$, pa $50 \mid A_{n+1}$.

2. a) $a_1 = -80$, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{19}{2}n^2 - \frac{179}{2}n - \frac{19}{2}(n-1)^2 + \frac{179}{2}(n-1) = 19n - 99 = -80 + (n-1)\cdot 19$. Prema tome, (a_n) je aritmetički niz u kome je $a_1 = -80$ i $d = 19$.
b) Neka je $A_k = 2\cdot S_{k-1}$. Tada je $-80 + 19(k-1) = 19(k-1)^2 - 1179(k-1) \Rightarrow 19k^2 - 236k + 297 = 0 \Rightarrow k_1 = 11$, $k_2 = \frac{27}{19}$. Zbog cjelobrojnosti, traženi član je $a_{11} = 110$.

3. a) $x < 0$, $t = \log(-x) \Rightarrow t^2 - 6t + 9 = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow x = -1000$.
b)

$$\frac{2}{1-\log^2 x} > 2 \Leftrightarrow 0 < 1 - \log^2 x < 1$$

$$1 - \log^2 x > 0 \Leftrightarrow \log^2 x < 1 \Leftrightarrow -1 < \log x < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{10} < x < 10$$

$$1 - \log^2 x < 1 \Leftrightarrow \log^2 x > 0 \Leftrightarrow \log x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1.$$

Rješenje je $\left\langle \frac{1}{10}, 1\right\rangle \cup \langle 1, 10\rangle$.

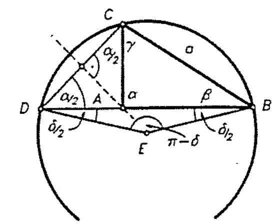
4.

$$P(x) + 1 = (ax^2 + bx + c)(x-1)^3 \Rightarrow$$
$$P(x) = ax^5 + (b-3a)x^4 + (3a-3b+c)x^3 + (3b-3c-a)x^2 + (3c-b)x - c - 1$$
$$P(x) - 1 = (dx^2 + ex + f)(x+1)^3 \Rightarrow$$
$$P(x) = dx^5 + (e+3d)x^4 + (3d+3e+f)x^3 + (3e+3f+d)x^2 + (3f+e)x + f + 1$$

Uspoređivanjem koeficijenata dobivamo sustav od 6 linearnih jednadžbi sa 6 nepoznanica. Rješavanjem sustava dobivamo: $a = -\frac{3}{8}, b = -\frac{9}{8}, c = -1, d = -\frac{3}{8}, e = \frac{9}{8}, f = -1$. Odavde je

$$P(x) = -\frac{3}{8}x^5 + \frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{8}x.$$

5. Najprije konstruiramo pomoćni trokut BDE u kome je $|BD| = s$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = \frac{\delta}{2}$. Točka C je presjek kružnice sa središtem u E radijusa $|BE|$ i kružnice sa središtem u B radijusa a. Točka A je presjek pravca BD i simetrale dužine $\overline{CD}$. Iz konstrukcije je $\sphericalangle BCD = \frac{1}{2}(\pi + \delta) = \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}$. S druge strane, $\sphericalangle BCD = \gamma + \frac{\alpha}{2} = \gamma + \frac{\pi}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma-\beta}{2}$, pa je stvarno $\sphericalangle C - \sphericalangle B = \delta$.



28.9.1991.

1. Dokažite matematičkom indukcijom da za sve $n \in \mathbf{N}$ i $a \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{a^2 + \ldots + \sqrt{a^2}}} < |a| + 1,$$

gdje na lijevoj strani nejednakosti ima n korijena.

2. Odredite sve aritmetičke nizove čija je razlika $d = 2$, a kvocijent $\frac{S_{3n}}{S_n}$ ne ovisi od n (S_n je zbroj prvih n članova niza).

3. a) Riješite jednadžbu: $x^{\sqrt[3]{x^2}} = (\sqrt{x})^x$.
b) Riješite nejednadžbu: $\sqrt{2(5^x + 24)} - \sqrt{5^x - 7} \geq \sqrt{5^x + 7}$.

4. Neka su a, b, c različiti cijeli brojevi. Da li postoji polinom $P(x)$ za koji vrijedi $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$?

5. Konstruirajte $\triangle ABC$ ako je zadano $|BC| = a$, $\sphericalangle A = \alpha$, te visina h_a na stranicu $\overline{BC}$. Konstrukciju opišite detaljno i dokažite sve svoje tvrdnje.

RJEŠENJA:

1. Označimo $A_n = \sqrt{a^2 + \sqrt{a^2 + \ldots + \sqrt{a^2}}}$. Baza: $A_1 = \sqrt{a^2} = |a| < |a| + 1$. Korak: Pretpostavimo da je $A_n < |a| + 1$.

$$A_{n+1}^2 = a^2 + A_n < a^2 + |a| + 1 \leq a^2 + 2|a| + 1 = (|a|+1)^2 \Rightarrow A_{n+1} < |a| + 1.$$

2. $\frac{S_{3n}}{S_n} = \frac{3n(a_1 + 3n - 1)}{n(a_1 + n - 1)} = c \Rightarrow 3(a_1 + 3n - 1) = c(a_1 + n - 1) \Rightarrow n(9 - c) = (a_1 - 1)(c - 3)$. Desna strana zadnje jednakosti ne ovisi od n, pa ne ovisi ni lijeva. Dakle, $c = 9$ i $a_1 = 1$. Prema tome, zadatak ima samo jedno rješenje: $1, 3, 7, 9, \ldots$

3. a) Uz uvjet $x > 0$ jednadžba je ekvivalentna sa $x^{\frac{2}{3}}\log x = x \cdot \frac{1}{2}\log x$, odnosno $\left(x^{\frac{2}{3}} - \frac{x}{2}\right)\log x = 0$. $\log x = 0 \Rightarrow x_1 = 1$. $x^{\frac{2}{3}} = \frac{x}{2} \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = 2 \Rightarrow x_2 = 8$.

b) Uz uvjet $5^x \geq 7$, tj. $x \geq \log_5 7$, imamo: $2(5^x + 24) \geq 5^x - 7 + 5^x + 7 + 2\sqrt{5^{2x} - 49}$. Odavde je $2\sqrt{5^{2x} - 49} \leq 48$, pa je $5^{2x} \leq 625 = 5^4$. Prema tome, rješenje je $[\log_5 7, 2]$.

4. Postoji polinom 2. stupnja $P(x) = Ax^2 + Bx + C$ s traženim svojstvom.

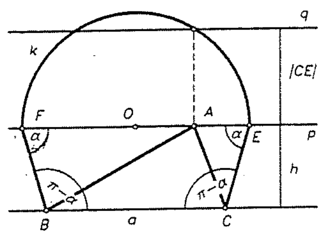
$$P(a) = Aa^2 + Ba + C = b, \qquad P(b) = Ab^2 + Bb + C = c, \qquad P(c) = Ac^2 + Bc + C = a.$$

Rješavajući ovaj sustav dobivamo:

$$A = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{(b-a)(c-a)(b-c)}, \qquad B = \frac{ab^2 + bc^2 + a^2c - a^3 - b^3 - c^3}{(b-a)(c-a)(b-c)},$$

$$C = \frac{a^3b + b^3c + ac^3 - a^2c^2 - a^2b^2 - b^2c^2}{(b-a)(c-a)(b-c)}.$$

5. Konstruiramo pravac p na udaljenosti h_a od pravca BC. Na njemu odredimo točke E i F takve da je $\sphericalangle FBC = \sphericalangle ECB = \pi - \alpha$. Točka O je polovište dužine $\overline{EF}$. Konstruiramo kružnicu k sa središtem O radijusa $\frac{1}{2}|EF|$, te pravac q na udaljenosti $|CE|$ od pravca p sa suprotne strane od BC. Točka A je presjek pravca q i kružnice k.



$$|AF| \cdot |AE| = |CE|^2 \cdot |BF| \Rightarrow \frac{|AF|}{|BF|} = \frac{|CE|}{|AE|} \Rightarrow \triangle ABF \sim \triangle ACE \Rightarrow \sphericalangle A = \alpha.$$

23.10.1991.

1. Dokažite matematičkom indukcijom da za svaki prirodan broj $n \geq 2$ vrijedi:

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

2. Neka je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ niz realnih brojava takav da je $a_1 = 0$, $|a_2| = |a_1 + 1|$, $|a_3| = |a_2 + 1|, \ldots, |a_n| = |a_{n-1} + 1|, \ldots$. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq -\frac{1}{2}.$$

3. a) Riješite jednadžbu:

$$\log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x}(4x^2 - 4x + 1) = 2.$$

b) Riješite sustav jednadžbi:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{65}{36}$$
$$xy - x + y = 118.$$

4. Neka su x_1, x_2, x_3, x_4 korijeni jednadžbe $x^4 + 5x^3 + \alpha x^2 + 3x + 5 = 0$. Odredite α tako da bude $x_1 \cdot x_2 = 1$.

5. Konstruirajte $\triangle ABC$ ako je zadano $|AC| = b$, $\sphericalangle A = \alpha$ i težišnica t_a. Konstrukciju opišite detaljno i dokažite sve svoje tvrdnje. Diskutirajte egzistenciju i jedinstvenost rješenja.

RJEŠENJA:

1. Baza: $\frac{16}{3} < 6$. Korak: Pretpostavimo da je

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad \text{tj.} \quad \frac{(2n)!(n+1)}{n! \cdot n!} > 4^n,$$

za neki $n \in \mathrm{N}$, $n \geq 2$. Tada je

$$\frac{(2n+2)! \cdot (n+2)}{(n+1)! \cdot (n+1)!} = \frac{(2n)! \cdot (n+1)}{n! \cdot n!} \cdot \frac{(2n+1)2(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+1)(n+1)} >$$
$$> 4^n \cdot \frac{4n^2 + 10n + 4}{n^2 + 2n + 1} > 4^n \cdot 4 = 4^{n+1}.$$

2. Vidi 3. zadatak 15.2.1991.

3. a) Uz uvjet $x < \frac{1}{3}$, $x \neq 0$, jednadžba je ekvivalentna sa

$$\log_{1-2x}(1 - 2x) + \log_{1-2x}(1 - 3x) - \log_{1-3x}(1 - 2x)^2 = 2.$$

Stavimo $t = \log_{1-2x}(1 - 3x)$, pa dobivamo $t^2 - t - 2 = 0$, odnosno $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Prvo rješenje otpada, a iz drugoga slijedi da je $x = \frac{1}{4}$.

b) $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} \Rightarrow 36t^2 + 65t + 36 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{9}{4}$, $t_2 = -\frac{4}{9}$. Drugo rješenje otpada, a iz prvog dobivamo sustav $x - y = 2$, $xy = 120$, čija su rješenja $x_1 = 12$, $y_1 = 10$ i $x_2 = -10$, $y_2 = -12$.

4. Iz Vieteovih formula slijedi:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -5$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \alpha$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -3$$
$$x_1x_2x_3x_4 = 5.$$

Iz prve i treće jednakosti dobivamo $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 + x_4 = -\frac{11}{2}$, a iz četvrte $x_3x_4 = 5$. Sada je iz druge jednakosti $\alpha = 6 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = \frac{13}{4}$.

5. Vidi 4. zadatak 15.2.1991.

Kazalo

(leksikografski sortiran indeks pojmova i naziva)

G

H

I

J

K

R

S

U